PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN HOUDEBINE

Étude de certains groupes ayant des invariants de Ulm donnés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4
« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. n° 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___4_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ETUDE DE CERTAINS GROUPES AYANT DES INVARIANTS DE ULM DONNES

par

Jean HOUDEBINE

I - ω-bases

Soit G un p-groupe réduit dont les invariants de Ulm d'ordre α sont k_α.

Théorème 1. Pour tout α, soit H_α un espace vectoriel sur Z/pZ de dimension k_α. Il existe un homomorphisme injectif φ de $G[p]$ dans $\prod_\alpha H_\alpha$ vérifiant les conditions suivantes

$$(G[p] \cap p^\beta G) = \varphi(G[p]) \cap \prod_{\alpha \geqslant \beta} H_\alpha$$

$$(G[p]) \supset \bigoplus_\alpha H_\alpha$$

Pour démontrer ce théorème choisissons, pour chaque α, H_α tel que $G[p] \cap p^\alpha G = H_\alpha \oplus (G[p] \cap p^{\alpha+1}G)$.

H_α est bien un espace vectoriel de dimension k_α.

Construisons alors par récurrence K_α tel que

$$K_\alpha \oplus (G[p] \cap p^\alpha G) = G[p] \quad \text{et} \quad K_\alpha \subset K_\beta \quad \text{si} \quad \beta \geqslant \alpha$$

Il suffit de prendre

$$K_0 = 0$$

$$K_\alpha = H_\beta \oplus K_\beta \quad \text{si} \quad \alpha = \beta+1$$

Si α est un ordinal limite, $\left(\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta\right) \cap p^\alpha G$ est réduit à zéro. En effet, si $x \neq 0$ appartient à K_β pour $\beta<\alpha$, il n'appartient pas à $p^\beta G$ d'après l'hypothèse de récurrence. On choisit alors pour K_α un supplémentaire de $G[p] \cap p^\alpha G$ contenant $\left(\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta\right)$.

Soit alors $x \in G[p]$. On sait que

$$G[p] = K_\alpha \oplus H_\alpha \oplus (G[p] \cap p^{\alpha+1}G)$$

on posera x_α la composante de x sur H_α dans cette décomposition.

Montrons que $\varphi(x) = \{x_\alpha\}$ possède les propriétés de l'énoncé

φ est un homomorphisme, c'est évident

pour que $x \in p^\alpha G$, il faut et il suffit que $x_\gamma = 0$ pour $\gamma<\alpha$

La condition nécessaire résulte immédiatement de la construction puisque x appartient à $p^{\gamma+1}G$ pour tout $\gamma<\alpha$.

La condition suffisante se démontre par récurrence : si $\beta = \delta+1$, alors l'hypothèse de récurrence montre que $x \in p^\delta G$; dans la décomposition

$$K_\delta \oplus H_\delta \oplus (G[p] \cap p^\beta G),$$

la composante sur K_δ est donc nulle. Comme $x_\delta = 0$, $x \in (G[p] \cap p^\beta G)$.

Si β est un ordinal limite, l'hypothèse de récurrence montre que $x \in p^\gamma G$ pour tout $\gamma>\beta$ donc a $p^\beta G = \bigcap_{\gamma<\beta} p^\gamma G$

φ est injectif : en effet si $x_\gamma = 0$ pour tout γ alors $x \in p^\alpha G$ pour tout α

$\varphi(H_\alpha) = H_\alpha$. En effet, si $x \in H_\alpha$ $x_\beta = 0$ pour $\beta<\alpha$ car $x \in p^\alpha G$. D'autre part, $x \in K_\gamma$ pour $\gamma \geqslant \alpha+1$ car $K_\gamma \supset K_{\alpha+1}$. Donc $x_\gamma = 0$ pour $\gamma \geqslant \alpha+1$. Cela montre que $\varphi(G[p]) \supset \oplus H_\alpha$.

<u>Définition</u>. Pour tout entier n, soit I_n des ensembles de cardinal k_n. On appelle ω-base de G une famille x_i^n ($n \in N$, $i \in I_n$) telle que pour tout n $p^n x_i^n$ ($i \in I_n$) soit une base d'un sous espace vectoriel H_n du socle tel que

$$G[p] \cap p^n G = H_n \oplus (G[p] \cap p^{n+1}G).$$

Il existe de telles ω-bases.

En effet, il suffit de choisir une base e_i^n dans les H_n ; chaque e_i^n appartenant à $p^n G$, il existe x_i^n tel que $p^n x_i^n = e_i^n$.

Lemme 1. Soit x_i^n une ω-base ; soient μ_i^n des entiers et soit $\sum_{\substack{i \\ n\leq m}} \mu_i^n x_i^n = y$ une combinaison linéaire finie. Si $y \in p^r G$, alors

$$\mu_i^n = 0 \quad \text{modulo} \quad p^{n+1} \quad \text{si} \quad n \leqslant r-1$$
$$\mu_i^n = 0 \quad \text{modulo} \quad p^{r} \quad \text{si} \quad n \geqslant r-1$$

On le démontre par récurrence sur r. Le résultat est évident pour $r = 0$. Démontrons le pour r en l'admettant pour r-1.

Raisonnons maintenant par récurrence sur m. Si $m \leqslant r-2$, le résultat est obtenu par l'hypothèse de récurrence. Supposons donc $m \geqslant r-1$ et admettons le résultat pour m-1.

Comme $y \in p^r G$, on peut écrire $y = p^r t$. L'hypothèse de récurrence sur r montre que pour $n \geqslant r-2$ $\mu_i^n = \lambda_i^n p^{r-1}$ et que

$$y = p^r t = \sum_{\substack{r-1\leq n\leq m \\ i}} \lambda_i^n p^{r-1} x_i^n$$

On en déduit en multipliant par p^{m-r+1}, en posant $p^m x_i^m = e_i^m$

$$p^{m+1} t = \sum_{\substack{i \\ n\leq m}} \lambda_i^n p^m x_i^n = \sum_i \lambda_i^m e_i^m$$

Comme $\sum_i \lambda_i^m e_i^m$ appartient à H_m et que $p^{m+1}t$ appartient $p^{m+1}G$, on en déduit $\sum_i \lambda_i^m e_i^m = 0$. Donc $\lambda_i^m = 0$ modulo p. Posons $\lambda_i^m = p\nu_i^m$. On a alors :

$$y - \sum_i p^r \nu_i^m x_i^m = \sum_{\substack{i \\ n\leq m-1}} \mu_i^n x_i^n$$

Le premier membre étant divisible par p^r, l'hypothèse de récurrence faite sur m-1 montre le résultat.

Lemme 2. Soit $y \in G[p^s]$. Pour $r \geqslant 1$, il existe une combinaison linéaire finie $\sum_{\substack{n\leq r+s-2 \\ i}} \mu_i^n x_i^n$ telle que

$$y - \sum_{\substack{n\leq r+s-2 \\ i}} \mu_i^n x_i^n \text{ appartient à } p^r G.$$

Démontrons ce lemme par récurrence sur s. Pour $s = 0$, le résultat est évident car $y = 0$. Supposons le résultat pour s-1, soient $y \in G[p^s]$ et $r \geqslant 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence py appartenant à $G[p^{s-1}]$ est de la forme

$$py = \sum_{\substack{n \leqslant r+s-2 \\ i}} \mu_i^n x_i^n + p^{r+1} t$$

D'après le lemme 1, μ_i^n est divisible par p : $\mu_i^n = p \lambda_i^n$. On a donc :

$$p \left(y - \sum_{\substack{n \leqslant r+s-2 \\ i}} \lambda_i^n x_i^n - p^r t\right) = 0$$

Ainsi le $2^{\text{ème}}$ facteur appartient au socle et le **théorème donne :**

$$y - \sum_{\substack{n \leqslant r+s-2 \\ i}} \lambda_i^n x_i^n - p^r t = \sum_{\substack{n \leqslant r-1 \\ i}} \gamma_i^n p^n x_i^n - p^r u.$$

Comme $s \geqslant 1$ $r+s-2 > r-1$ et, l'égalité s'écrit sous la forme

$$y - \sum_{\substack{n \leqslant r+s-2 \\ i}} (\lambda_i^n + p^n \gamma_i^n) x_i^n = p^r (u-t).$$

<u>Lemme 3</u>. Soient $y \in G[p^s]$ et $r \geqslant 1$ et $q \geqslant r$. Soient deux combinaisons linéaires finies

$$z = \sum_{\substack{i \\ n \leqslant q}} \mu_i^n x_i^n \quad \text{et} \quad t = \sum_{\substack{i \\ n \leqslant q}} \lambda_i^n x_i^n$$

telles que y-z et y-t appartiennent à $p^r G$, alors $\mu_i^n x_i^n = \lambda_i^n x_i^n$ pour $n \leqslant r-1$.

En effet, $z-t = \sum_{\substack{i \\ n \leqslant q}} (\mu_i^n - \lambda_i^n) x_i^n$ appartient à $p^r G$ et d'après le lemme 1,

$$(\mu_i^n - \lambda_i^n) x_i^n = 0 \quad \text{pour} \quad n \leqslant r-1.$$

<u>Définition</u>. Soient $y \in G$ et x_i^n une ω-base. On appelle composantes de y sur l'ω base x_i^n des entiers γ_i^n inférieurs à p^{n+1} tels que, si $y \in G[p^s]$,

$$\left(y - \sum_{n \leqslant r+s-2} \gamma_i^n x_i^n\right) \in p^r G.$$

Lemme 4 . Il existe de telles composantes et les γ_i^n sont définis d'une manière unique.

Si $y \in G[p^s]$, le lemme 2 nous montre l'existence de λ_i^n tels que

$$y - \sum_{\substack{n \leq m + s-1 \\ i}} \lambda_i^n x_i^n \in p^{m+1}G$$

On pose alors $\gamma^m = \lambda_i^m$ pour tout i. Montrons que

$$y - \sum_{\substack{n \leq r+s-2 \\ i}} \gamma_i^n x_i^n \in p^r G$$

Le lemme 2 montre l'existence de ν_i^n et de t tels que :

$$y - \sum_{\substack{n \leq r+2s-3 \\ i}} \nu_i^n x_i^n = p^{r+s-1}t$$

Si $y - \sum_{\substack{n \leq m+s-1 \\ i}} \lambda_i^n x_i^n \in p^{m+1}G$ avec $m \leq r+s-2$ le lemme 1 mpntre que

$\lambda_i^n x_i^n = \nu_i^n x_i^n$ pour $n \leq m$ et en particulier $\gamma_i^m = \nu_i^m$ pour $m \leq r+s-2$.

D'autre part, $p^s y = o$, donc

$$- \sum_{\substack{n \leq r+2s-3 \\ i}} p^s \nu_i^n x_i^n \in p^{r+2s-1}G$$

D'après le lemme 1 $p^s \nu_i^n = o$ modulo p^{n+1} donc $\nu_i^n = p^{n-s+1} \zeta_i^n$.

On en déduit : $y = \sum_{\substack{n \leq r+s-2 \\ i}} \gamma_i^n x_i^n + \sum_{\substack{r+s-1 \leq k \leq r+2s-3 \\ i}} p^{n-s+1} \zeta_i^n + p^{r+s-1}t$

Le résultat se déduit de la remarque $n \geq r+s-1 \Longrightarrow n-s+1 \geq r$

L'unicité modulo p^{n+1} résulte immédiatement du lemme 3.

Lemme 5. Si $y \in G[p^s]$, la condition nécessaire et suffisante pour que $y \in p^r G$ est que les composantes de y vérifient les conditions suivantes :

$$\gamma_i^n = 0 \text{ modulo } p^{n+1} \text{ pour } n \leq r-1$$

$$\gamma_i^n = 0 \text{ modulo } p^r \text{ pour } r-1 \leq n \leq r+s-2.$$

C'est une conséquence immédiate de la définition des composantes et du lemme 1.

II - Etude d'un groupe dont l'invariant de Ulm d'ordre ω n'est pas nul

Théorème. Soit G un groupe dont les invariants de Ulm sont 1 pour les rangs entiers et le rang ω et 0 pour les autres. Alors il existe une ω base x_n et une suite y_m $(m\geq 1)$ telles que

$$y_n - py_{n+1} = x_{n-1} \quad \text{pour} \quad n>0$$

et

$$py_1 \in G[p] \cap p^{\omega}G$$

Faisons cette construction par récurrence. Supposons donc qu'il existe une ω base x_n et $y_1 \ldots y_m$ une suite finie telle que les composantes de y_m soient nulles jusqu'à l'ordre m-2, que

$$y_i = x_{i-1} + px_i + \ldots + p^{k+1} x_{i+k} + \ldots + p^{m-i-1} x_{m-2} + p^{m-i} y_m \text{ et que}$$

la composante m-1 de y_m est égale à 1 et $y_m - x_{m-1}$ n'est pas divisible par p^2.

Soit μ_n les composantes de y_m, $p^m y_m = py_1$ est un élément de $p^{\omega}G \cap G[p]$ donc $p^m \mu_n = 0 \bmod p^{n+1}$, c'est-à-dire

$$\mu_n = 0 \mod p^{n-m+1}$$

puisque $y_m - x_{m-1}$ a ses composantes nulles jusqu'à l'ordre m-1, et **divisibles** par p^{n-m+1} pour $n>m-1$, on a :

$y_m - x_{m-1}$ est divisible par p

$\mu_m \neq 0 \mod p^2$ sinon les composantes étant nulles pour $n<m$ et divisible par p^2 pour $n-m+1\geq 2$ c'est-à-dire $n\geq m+1$; $y_m - x_{m-1}$ serait divisible par p^2.

Soit donc z tel que $pz = y_m - x_{m-1}$ et soit λ_n ses composantes.

pz a ses composantes $p\lambda_n x_n$ nulles jusqu'à l'ordre m-1

posons $z' = z - \sum_{n\leq m-1} \lambda_n x_n$ on a $pz' = pz$

On sait que $p\lambda_n = \mu_n \mod p^n$, donc comme $\mu_m = 0 \mod p^{n-m+1}$

$$\lambda_n = 0 \mod p^{n-m}$$

D'où $z' - \lambda_m x_m - \lambda_{m+1} x_{m+1}$ à toutes les composantes divisibles par p^2, donc est divisible par p^2

$$z' = \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} + p^2 t$$

- Si $\lambda_{m+1} \neq 0 \mod p^2$

On pose

$$x'_n = x_n \quad \text{pour} \quad n \neq m$$

$$x'_m = \lambda_m x_m$$

$$\text{et} \quad z' = y_{m+1}$$

1) x'_n est encore une -base car $p\lambda_m \neq 0 \mod p^2$, donc $\lambda_m \neq 0 \mod p$;

2) les composantes de y_{m+1} sont les mêmes que celles de z', sauf en x'_m où elle vaut 1 ;

3) $y_{m+1} - x'_m$ est bien divisible par p et non par p^2.

- Si $\lambda_{m+1} = 0 \mod p^2$

On pose

$$x'_n = x_n \quad \text{pour} \quad n \neq m$$

$$x'_m = \lambda_m x_m + p x_{m+1}$$

$$\text{et} \quad z' = y_{m+1}$$

1) x'_n est encore une ω-base ;

2) les composantes de y_{m+1} sont les mêmes que celles de z', sauf en x'_m, où elle vaut 1 et en x'_{m+1} où elle vaut $\lambda_{m+1}-p$, $\lambda_{m+1}-p$ n'est pas nul mod p^2 ;

3) $y_{m+1} - x'_m$ est bien divisible par p et non par p^2.

Cette construction par récurrence ne modifiant qu'un des termes de l'ω-base, il est évident que cela donne le résultat.

Pour le début de la récurrence, on choisit une base x_n et soit e_ω un élément de $p^\omega G \cap G[p]$. Par hypothèse, il existe z tel que $pz = e_\omega$.
Si z a pour composante ν_0 et ν_1, on pose

$$y_1 = z - \nu_0 x_0 - \nu_1 x_1 + x_0 + px_1$$

pz ayant des composantes nulles, ν_1 est divisible par p de sorte que $py_1 = pz$, $y_1 - x_0$ n'est pas divisible par p^2, et la composante 0 de y_1 est 1.

Construction du groupe K

Soit φ une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\left(\frac{Z}{pZ}\right)^N$ qui envoie l'élément ayant toutes ses composantes égales à 1 sur 1 et $\frac{Z}{pZ}^{(N)}$ sur 0.
On considère le groupe K_φ défini de la manière suivante :

$$K = {}^t\prod_n \frac{Z}{p^n Z} \times \frac{Z}{pZ}$$

On représente un élément de K par

$$((\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots), \lambda)$$

où α_n est un entier inférieur à p^n.

Soient α_n et β_n des entiers inférieurs à p^n ; on note q_n et r_n le quotient et le reste de la division de $\alpha_n + \beta_n$ par p^n

$$\alpha_n + \beta_n = q_n p^n + r_n \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_n < p^n$$

L'addition dans K_φ est alors définie par

$$((\alpha_1 \dots \alpha_n \dots), \lambda) + ((\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n \dots), \mu) = ((r_1, r_2 \dots, r_n, \dots),$$
$$\lambda + \mu + \varphi(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \dots))$$

où $\bar{q}_n$ désigne la classe de q_n modulo pZ.
On constate facilement que K_φ est un p-groupe réduit dont les invariants de Ulm sont 1 pour les rangs entiers et pour le rang ω et 0 pour les autres rangs : en effet

$((\alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots), \lambda)$ appartient à $G[p]$ ssi $\alpha_n = \mu_n p^{n-1}$ $(\mu_n < p)$ et $\varphi(\mu_1, \ldots \mu_n, \ldots) = 0$. Cet élément appartient à $p^k G$ ssi $\alpha_n = 0$ pour $n \leq k$ et $\alpha_n = \lambda_n p^k$ $(\lambda_n < p^{n-k})$ pour $n > k$.

Désignons par x'_n l'élément de $^t(\Pi \frac{Z}{p^n Z})$ dont la seule composante non nulle est la $n+1^{\text{ième}}$ et est égale à 1. et par x''_n l'élément de $K_\varphi : (x'_n, o)$. Il résulte de ce qui précède que $\{x''_n\}$ est une ω-base et que $p^\omega G \cap G[p]$ est engendré par l'élément $(0,1) = e_\infty$

On désignera dans la suite par y'_m l'élément de $^t(\Pi \frac{Z}{p^n Z})$ dont les composantes sont nulles jusqu'à l'ordre m-1 et égales à p^{m-1} dans les autres cas et par y''_m l'élément de $K\varphi\ (y'_m, 0)$.

<u>Théorème</u>. Soit G un groupe dont les invariants de Ulm sont 1 pour les rangs entiers et le rang ω et 0 pour les autres rangs. Soient x_n une ω-base et y_m une suite d'éléments de G telle que

$$y_m - p\, y_{m+1} = x_{m-1}$$

et

$$py_1 \in G[p] \cap p^\omega G.$$

Alors il existe φ et il existe un homomorphisme injectif Ψ de G dans K_φ tel que

$$\Psi(x_n) = x''_n \qquad \Psi(y_m) = y''_m$$

$$\Psi(py_1) = e_\infty.$$

$\{p^n x_n\}_{n \in N}$ et $py_1 = e_\omega$ constituent un système libre du socle qui peut être complété en une base par $\{f_j\}_{j \in I}$. On peut alors construire des f_j^r tels que si γ_j^n désignant les composantes de f_j sur l'ω base x^n, on ait :

$$f_j - \sum_{n \leq r-1} \gamma_j^n x^n = p^r f_j^r$$

$$(\exists\, \delta_j^{r-1})\ (pf_j^r + \delta_j^{r-1} x^{r-1} = f_j^{r-1})$$

et f_j^r a ses r-1 premières composantes nulles.

En effet, supposons cette suite construite jusqu'au rang r-1, on a $f_j^{r-1} \in G[p^r]$. Soit δ_j^{r-1} sa $r^{\text{ème}}$ composante, alors

$$(f_j^{r-1} - \delta_j^{r-1} x^{r-1}) \in pG.$$

Donc il existe y_j^r tel que $py_j^r = f_j^{r-1} - \delta_j^{r-1} x^{r-1}$.

Désignons par ε^n les composantes de y_j^r et posons

$$f_j^r = y_j^r - \sum_{n\leq r-1} \varepsilon^n x^n$$

On a : $pf_j^r = f_j^{r-1} - \delta_j^{r-1} x^{r-1} - \sum_{n\leq r-1} p\, \varepsilon^n x^n$.

Les r-1 premières composantes du 1er membre étant nulles, il en est de même pour le second, ce qui implique

$$p\, \varepsilon^n x^n = 0$$

et

$$pf_j^r + \delta_j^{r-1} x^{r-1} = f_j^{r-1}$$

Enfin

$$p^r f_j^r = p^{r-1} f_j^{r-1} - p^{r-1} \delta_j^{r-1} x^{r-1} = f_j - \sum_{n\leq r-2} \gamma_j^n x^n - p^{r-1} \delta_j^{r-1} x^{r-1}$$

En examinant la $r-1^{\text{ème}}$ composante des deux membres, il est évident que

$$p^{r-1} \delta_j^{r-1} = \gamma_j^{r-1}.$$

On va maintenant montrer qu'il existe φ et un homomorphisme Ψ de G dans K_φ satisfaisant les conditions de l'énoncé, et que cet homomorphisme est uniquement déterminé par sa restriction au groupe G_1 engendré par f_j^r et x_n.

Le groupe G_1 est en effet sans terme de hauteur infinie. Son socle est le sous groupe engendré par f_j et $p^n x_n$, la hauteur des éléments dans G_1 est la même que dans G et x_n constitue une ω-base de G_1.

D'après les résultats précédents, il existe un homomorphisme θ de G_1 dans ${}^t\left(\Pi \frac{Z}{p^n Z}\right)$.

$\Theta(G_1)$ ne contient pas l'élément $(1,p,\dots,p^n,\dots)$.

En effet, soit e l'élément correspondant de G_1. L'élément $y_1 - e$ a toutes ses composantes nulles, donc $y_1 - e \in p^{\omega}G$ et $p(y_1-e) = e_{\omega}$ donc $e_{\omega} \in p^{\omega+1}G$, ce qui est contraire à l'hypothèse

$$\begin{tikzcd}
 & \Theta(G_1) \arrow[d] \\
\Pi \frac{Z}{pZ} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & {}^t\Pi \frac{Z}{p^nZ} \\
\frac{Z}{pZ} &
\end{tikzcd}$$

Il existe donc une forme linéaire **non nulle** $\varphi : \Pi \frac{Z}{pZ} \longrightarrow \frac{Z}{pZ}$ telle que $h(\varphi^{-1}(0)) \supset \Theta(G_1)$ (h étant l'injection canonique de $\Pi \frac{Z}{pZ} \longrightarrow {}^t\Pi \frac{Z}{p^nZ}$).

Soit x un élément de $G[p^r]$. On va montrer par récurrence sur r qu'il existe des entiers inférieurs à p, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ uniques tels que :

$$y = x - \sum_{1}^{r-1} \lambda_i\, y_{r-i} - \lambda_r\, e_{\omega} \quad \text{appartienne à } G_1.$$

Pour r = 1, le résultat est évident.

Supposons le démontré pour r et soit $x \in G[p^{r+1}]$. px appartient à $G[p^r]$, donc il existe λ_i tel que

$$px - \sum_{1}^{r-1} \lambda_i\, y_{r-i} - \lambda_r\, e_{\omega} = \sum_{n} \mu_n\, x_n + \sum_{t,j} \nu_j^t\, f_j^t$$

(les sommes écrites sont toutes finies).

En utilisant les relations

$$py_1 = e_{\omega}$$

$$py_{i+1} + x_{i-1} = y_i$$

$$pf_j^{t+1} + \delta_j^t\, x_t = f_j^t$$

On obtient :

$$p(x-\sum_1^{r-1} \lambda_i y_{r-i+1} - \lambda_r y_1 - \sum_{j,t} \nu_j^t f_j^{t+1}) =$$

$$\sum_1^{r-1} \lambda_i x_{r-i-1} + \sum_{t,j} \delta_j^t \nu_j^t x_t + \sum_n \mu_n x_n$$

Le premier membre appartient à pG, les propriétés de l'ω base x_n permettent d'écrire le 2ème membre sous la forme $\sum_n p\, \xi_n x_n$. On obtient de cette façon un élément du socle et une relation de la forme

$$x - \sum_1^{r} \lambda_i y_{r-i+1} - \sum_{j,t} \nu_j^t f_j^{t+1} - \sum_n \xi_n x_n = \sum_n r_n x_n + \sum_j s_j f_j + \lambda_{r+1} e_\omega$$

ce qui montre que $\quad x - \sum_1^{r} \lambda_i y_{r-1+1} - \lambda_{r+1} e_\omega \in G_1$

Supposons que λ_i et λ'_i satisfassent les conditions de l'énoncé, alors $px - \sum_1^{r-1} \lambda'_i y_{r-i} - \lambda'_r e_\omega$ et $px - \sum_1^{r-1} \lambda_i y_{r-i} - \lambda_r e_\omega$

sont éléments de G_1, et l'hypothèse de récurrence montre que

$$\lambda_i = \lambda'_i \quad \text{pour} \quad i \leqslant r.$$

Donc $(\lambda_{r+1} - \lambda'_{r+1}) e_\omega \in G_1$ et comme G_1 on a aucun élément de hauteur infinie, $\lambda_{r+1} = \lambda'_{r+1}$.

On construit alors Ψ de la manière suivante : Pour $x \in G[p^r]$

$$\Psi(x) = \left(\Theta(x - \sum_1^{r-1} \lambda_i y_{r-i} - \lambda_r e_\omega) + \sum_1^{r-1} \lambda_i y'_{r-i}, \lambda_r\right)$$

où $x - \sum_1^{r-1} \lambda_i y_{r-i} - \lambda_r e_\omega \in G_1$.

Montrons que Ψ est un homomorphisme.

Soient x et y deux éléments de G et supposons que :

$$x - \sum_1^{r-1} \lambda_i y_{r-i} - \lambda_r e_\omega \in G_1$$

$$y - \sum_1^{r-1} \mu_i y_{r-i} - \mu_r e_\omega \in G_1$$

$$x-y - \sum_1^{r-1} \delta_i y_{r-i} - \delta_r e_\omega \in G_1$$

On a :

$$\Psi(x) = \left(\Theta(x - \sum_1^{r-1} \lambda_i\, y_{r-i} - \lambda_r\, e\,) + \sum_1^{r-1} \lambda_i\, y'_{r-i},\ \lambda_r\right)$$

$$\Psi(y) = \left(\Theta(y - \sum_1^{r-1} \mu_i\, y_{r-i} - \mu_r\, e_\omega) + \sum_1^{r-1} \mu_i\, y'_{r-i},\ \mu_r\right)$$

$$\Psi(x-y) = \left(\Theta(x-y - \sum_1^{r-1} \delta_i\, y_{r-i} - \delta_r\, e_\omega) + \sum_1^{r-1} \delta_i\, y'_{r-i},\ \delta_r\right)$$

La construction de φ montre alors

$$\Psi(x)-\Psi(y)-\Psi(x-y) = \left(\sum_1^{r-1} \lambda_i\, y'_{r-i},\lambda_r\right) - \left(\sum_1^{r-1} \mu_i\, y'_{r-i},\mu_r\right) - \left(\sum_1^{r-1} \delta_i\, y'_{r-i},\delta_r\right)$$

$$= (0,\ \lambda_r - \mu_r - \delta_r + \varphi(\bar{q},\bar{q},\bar{q},\ldots))$$

où q est le quotient de $\sum_1^{r-1} (\lambda_i - \mu_i - \delta_i)\, p^i$ par p^r.

Or, les relations entre x, y et x-y montrent que

$$\sum_1^{r} p^i\, (\lambda_i - \mu_i - \delta_i) = 0 \mod p^{r+1}$$

Donc $\sum_1^{r} p^i\, (\lambda_i - \mu_i - \delta_i) = p^r\, (pk - \lambda_r + \mu_r + \delta_r)$.

Donc $q = pk - \lambda_r + \mu_r + \delta_r$

et $\varphi(\bar{q},\bar{q},\bar{q},\ldots) + \lambda_r - \mu_r - \delta_r = \bar{q} + \lambda_r - \mu_r - \delta_r = 0$

Ψ est injectif car si $\Psi(x) = 0$, il est facile de voir que $\lambda_i = 0$, et par conséquent $x = 0$.

<u>Conclusion</u>. Les groupes dont les invariants de Ulm sont 1 pour les rangs entiers et ω et nuls pour les autres sont donc des sous groupes des groupes K_φ. Voici quelques questions à résoudre

1) Les groupes K_φ sont-ils isomorphes ? (je ne le pense pas).
2) Ces sous groupes de K_φ sont-ils purs ? (la réponse me semble positive).
3) Généraliser ce processus au cas d'invariants de Ulm quelconques ; le cas intéressant étant d'abord celui où l'invariant de Ulm d'ordre 2^ω n'est pas nul.