PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN PELLAUMAIL

Formule de Ito dans le cas non continu

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 3
« Séminaires de probabilité », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___3_1_0>

FORMULE DE ITO
DANS LE CAS NON CONTINU

Par J. PELLAUMAIL

I.N.S.A. et Laboratoire de Probabilités - ERA 250 C.N.R.S. RENNES

RESUME :

On prouve la formule de Ito pour un processus réel non continu par une méthode plus directe que celle utilisée en [1] : cette méthode met mieux en évidence le rôle de la variation quadratique.

INTRODUCTION

La formule de Ito est bien connue. Dans [1], une "formule de Ito" est prouvée pour un processus non nécessairement à trajectoires continues. Nous donnons ici une démonstration de cette formule dans ce cas en utilisant une méthode totalement différente de celle de [1]. Cette méthode n'utilise pas la décomposition de Doob-Meyer ; par contre, elle utilise la construction vectorielle de l'intégrale stochastique (cf. [2] ou [3]) et met mieux en évidence le rôle de la variation quadratique. Elle généralise la méthode utilisée en [3] - 1-E-5. La principale simplification provient de ce que l'on dispose d'un théorème de convergence dominée. Pour alléger la présentation, on s'est limité à un processus réel mais l'extension à un processus à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est immédiate.

Données générales

Pour toute cette étude, on se donne :

- *un ensemble des temps* $T = [0,1]$
- *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- *une famille croissante* $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ *de sous-tribus de* $\mathfrak{F}$ *contenant toutes tous les ensembles de mesure nulle de* $\mathfrak{F}$.

Par convention et abus de langage :

- si V est la partie vide de T, on pose inf. $\{t : t \in N\} = 1$
- quand on parlera de processus adapté, temps d'arrêt, etc... ce sera toujours par rapport à la base de processus $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t \in T})$.

PROCESSUS LOCALEMENT DE REPARTITION

Rappelons qu'on dit qu'un processus cadlag $(X_t)_{t \in T}$ est localement de répartition en moyenne d'ordre deux (cf. [1] ou [3]) s'il existe une suite $(\sigma(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt qui croit P-p.s. vers 1 et telle que, pour tout n, le processus $(X_{t \wedge \sigma(n)})_{t \in T}$ induit une mesure stochastique définie sur la tribu des prévisibles et σ-additive pour la topologie de $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Il revient au même de dire que le processus cadlag $(X_t)_{t \in T}$ est une quasi-martingale locale ou encore de dire que le processus cadlag $(X_t)_{t \in T}$ est la somme d'un processus P-p.s. à variation bornée par trajectoires et d'une martingale locale. Nous n'utiliserons pas ces équivalences dans la suite. Par contre, nous utiliserons, au lemme 1, le fait, prouvé directement en 1-E-4 de [3], qu'un processus de répartition en moyenne d'ordre deux est la somme d'un processus croissant et d'une martingale.

LEMME 1

Soit $(X_t)_{t \in T}$ *un processus cadlag localement de répartion en moyenne d'ordre deux ; pour presque toute trajectoire* ω , *la famille* $\{(X_t - X_{t-})^2(\omega)\}_{t \in T}$ *est sommable donc on peut définir, par trajectoires, un processus* $U(t)$ *croissant continu à droite en posant* $U(t) = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s-})^2$. *De plus , si* f *est une fonction deux fois continûment dérivable, pour presque toute trajectoire* ω , *la famille*

$\{[f(X_t) - f(X_{t-}) - (X_t - X_{t-}) \cdot f'(X_{t-})]\}_{t \in T}$ *est sommable*

donc on peut définir, par trajectoires, un processus $Q(t)$ à variation bornée continu à droite en posant

$$Q(t) = \sum_{s \leq t} [f(X_t) - f(X_{t-}) - (X_t - X_{t-}) \cdot f'(X_{t-})]$$

Preuve :

Par localisation, il suffit de prouver le lemme pour un processus de répartition en moyenne d'ordre deux, c'est à dire (cf. 1-B-4 de [3]) pour la somme d'un processus croissant A_t et d'une martingale M_t. En localisant à nouveau, on peut supposer que cette martingale est de carré intégrable, et que (A_t) et (M_t) sont uniformément bornés par a .

Pour tout n, soit $H_n = \sum_{k=o}^{2^n-1} (X_{(k+1).2^{-n}} - X_{k.2^{-n}})^2$

$$= \sum (M_{(k+1).2^{-n}} - M_{k.2^{-n}})^2 + \sum (A_{(k+1).2^{-n}} - A_{k.2^{-n}}) (2.M_{(k+1).2^{-n}} - 2.M_{k.2^{-n}} + A_{k+1).2^{-n}} - A_{k.2^{-n}})$$

on a donc : $E(H_n) \leq \sum_{k=o}^{2^n-1} E[(M_{(k+1).2^{-n}} - M_{k.2^{-n}})^2] + 5\text{ a} \cdot E(A_1 - A_0)$

$$\leq E(M_1^2 - M_0^2) + 5\text{ a} \cdot E(A_1 - A_0)$$

Or, $\sum_{t \in T} (X_t - X_{t-})^2 \leq \liminf_{n \to \infty} H_n = H$

où H est une variable aléatoire intégrable ce qui prouve le début du lemme.

D'après la formule de Taylor, pour tout t et tout ω , il existe

$R_t(\omega) \in [X_{t-}(\omega) , X_t(\omega)]$ tel que

$$f(X_t) - f(X_{t-}) - (X_t - X_{t-}) \cdot f'(X_{t-}) = \frac{1}{2} \cdot (X_t - X_{t-})^2 \cdot f''(R_t(\omega))$$

mais $|f''(R_t(\omega))| \leqslant \operatorname{Sup.}_{|u|\leqslant a} |f''(u)| \leqslant b$ ce qui prouve la deuxième partie du lemme

LEMME 2

Soit D un ensemble dénombrable dense dans T .

Soient f et g deux fonction réelles définies sur T . On suppose que g est cadlag, que les points de discontinuités de g appartiennent à D et que f est croissante continue à droite. Soit $(f_n)_{n>o}$ une suite de fonctions croissantes continues à droites qui converge vers f sur D.

Alors, $\int_o^1 g \,.\, df_n$ *converge vers* $\int_o^1 g \,.\, df$.

Preuve :

Ce lemme se prouve comme le lemme analogue sur la convergence faible ; il suffit de noter qu'une fonction g cadlag est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'intervalles d'extrémités appartenant à D.

LEMME 3

Soient (X_t) et (Y_t) deux processus cadlag réels, le processus (X_t) étant continu à gauche et intégrable par rapport au processus (Y_t). Soit (Z_t) le processus cadlag défini par $Z_t = \int_{]o,t]} X_u \,.\, d\, Y_u$ *. Pour tout temps d'arrêt σ , on a* $Z_\sigma - Z_{\sigma-} = X_\sigma \,.(Y_\sigma - Y_{\sigma-})$.

Preuve :

Pour tout n>o , on définit la suite de temps d'arrêt $(\sigma(n,k))_{k\geq o}$ par récurrence par $\sigma(n,o) = 0$ et

$$\sigma(n,\ k+1) = \inf.\{\ t\ :\ |X_t - X_{\sigma(n,k)}| > \frac{1}{n}\ \}$$

Soit X_t^n le processus prévisible défini sur $]\sigma(n,k), \sigma(n, k+1)]$ par $X_t^n = X_{\sigma(n,k)}$. Soit Z_t^n le processus cadlag défini par $Z_t^n = \int_{]0,t]} X_u^n \cdot dY_u$

La suite de processus (X_t^n) converge uniformément vers le processus X_t donc, (théorème 4 de [2]), on peut trouver une application f croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite de processus $Z_t^{f(n)}$ converge P-p.s. uniformément par trajectoires vers le processus Z_t ; or, il résulte immédiatement de la définition de l'intégrale stochastique que $Z_\sigma^{f(n)} - Z_{\sigma-}^{f(n)} = X_\sigma^{f(n)} . (Y_\sigma - Y_{\sigma-})$.

On en déduit le lemme par passage à la limite quand n tend vers l'infini.

<u>FORMULE DE ITO</u> (Théorème)

Soit $T = [0,1]$. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, P, (\mathfrak{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T})$ *un processus réel cadlag localement de répartition en moyenne d'ordre deux. Soient* $U(t)$, $Q(t)$, $V(t)$ *et* $S(t)$ *les processus cadlag définis par :*

$$U(t) = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s-})^2$$

$$Q(t) = \sum_{s \leq t} \left[f(X_t) - f(X_{t-}) - (X_t - X_{t-}) . f'(X_{t-}) \right]$$

$$V(t) = X_t^2 - X_o^2 - 2 . \int_{]o,t]} X_{u+} . dX_u$$

$$S(t) = V(t) - U(t)$$

Alors les processus $U(t)$, $V(t)$ *et* $S(t)$ *sont des processus croissants,* $S(t)$ *est à trajectoires continues et* $Q(t)$ *est à variation bornée. De plus, pour toute fonction f deux fois continûment dérivable, on a :*

$$f(X_t) - f(X_o) \underset{P-p.s.}{=} Q(t) + \int_{]o,t]} f'(X_{u-}) . dX_u + \frac{1}{2} \int_{]o,t]} f''(X_{u-}) . dS_u$$

la première intégrale étant une intégrale stochastique locale et la seconde pouvant être calculée par trajectoires.

Preuve :

a) Les processus U, Q et S sont bien définis d'après le lemme 1.

b) De plus, par localisation, on peut se ramener au cas où (X_t) est uniformément borné ce que nous supposerons désormais. Nous décomposerons la démonstration en plusieurs étapes.

c) Pour tout n>o, soit $(\sigma(n,k))_{k\geq o}$ la suite de temps d'arrêt définie par récurrence par $\sigma(n,o) = 0$ et

$$\sigma(n, k+1) = \inf. \{t : |X_t - X_{\sigma(n,k)}| > \frac{1}{2n^2} \}$$

Pour tout n>o , $\sigma(n,k) \underset{k\to\infty}{\nearrow} 1$ puisque (X_t) n'admet pas de discontinuité oscillatoire.

Pour tout n>o , soit $V^n(t)$ le processus défini, pour t élément de $[\sigma(n,k), \sigma(n, k+1)[$, par :

$$V^n(t) = \sum_{j=o}^{k} [X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)}]^2$$

d) *Nous allons d'abord montrer que la suite de variables aléatoires $(V_n(1))_{n>o}$ converge dans L_1 vers V_1 .*

Notons que ceci est prouvé en 1-E-4 de [ ] mais nous reproduisons cette étape de la démonstration pour la commodité du lecteur.

On a :

$$V^n(1) = \sum_{k=o}^{\infty} [X^2_{\sigma(n,k+1)} - X^2_{\sigma(n,k)}] - 2 \sum_{k=o}^{\infty} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}).X_{\sigma(n,k)}$$

Soit $Z^n(t)$ le processus prévisible défini sur $]\sigma(n,k), \sigma(n,k+1)]$ par $Z^n(t) = X_{\sigma(n,k)}$

On a : $$V^n(1) = X_1^2 - X_o^2 - 2 \cdot \int_{]o,1]} Z^n(u) \cdot d\, X_u$$

Or la suite de processus $Z^n(t)$ converge (uniformément), quand n tend vers l'infini, vers le processus X_{u-} donc (convergence dominée) $\int_{]o,1]} Z^n(u) \cdot d\, X_u$ converge dans L_2 vers $\int_{]o,1]} X_{u-} \cdot d\, X_u$

donc $V^n(1)$ converge de même vers $V(1)$.

La variable aléatoire $V(1)$ est donc positive (P-p.s.) comme limite de variables aléatoires positives.

e) On prouverait, de même, que pour tout couple (s,t) d'éléments de T avec $s < t$, $V_t - V_s \geqslant 0$, donc le processus continu à droite $(V_t)_{t \in T}$ est *croissant à l'indistinguabilité près.*

f) De plus, on prouverait comme au d), que, pour tout temps d'arrêt σ V_σ^n converge dans L_1 vers V_σ quand n tend vers l'infini. En utilisant le procédé diagonal, on peut donc trouver une application croissante g de N dans N telle que, pour tout rationnel t et tout temps d'arrêt $\sigma(n,k)$, $V^{g(n)}(t)(\omega)$ (resp. $V^{g(n)}_{\sigma(n,k)}(\omega)$) converge vers $V_t(\omega)$ (resp. $V_{\sigma(n,k)}(\omega)$), quand n tend vers l'infini sauf sur un ensemble H de mesure nulle (qui ne dépend pas de t). Notons que, à la fin de la démonstration de [ ] - 1-E-5, il fallait évidemment, comme ici, considérer une sous-suite et non la suite initiale.

g) Pour tout n et k, soit :

$$A(n,k) = \{ \omega : |X_{\sigma(n,k)} - X_{\sigma(n,k)-}| > \frac{1}{n} \}$$

$$B(n,k) = \Omega \setminus A(n,k)$$

$$Z_{n,k} = X_{\sigma(n,k)} \cdot 1_{B(n,k)} + X_{\sigma(n,k)-} \cdot 1_{A(n,k)}$$

De plus, pour tout $n > o$, soit $U^n(t)$ (resp. $W^n(t)$) le processus défini sur $[\sigma(n,k), \sigma(n,k+1)[$, par

$$U^n(t) = \sum_{j=1}^{k} (X_{\sigma(n,j)} - Z_{n,j})^2 = \sum_{j=1}^{k} (X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)-})^2 \cdot 1_{A(n,k)}$$

$$W^n(t) = \sum_{j=1}^{k} \left[X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j-1)}\right]^2 \cdot 1_{A(n,k)}$$

Si $\omega \in A(n,k)$ et si $t = \sigma(n,k)(\omega)$, il existe un entier k' tel que $\omega \in A(n+1,k')$ et $t = \sigma(n+1,k')(\omega)$ donc $U^n(t)$ converge en croissante vers $U(t)$.

De plus, sur $A(n,k)$,

$$\left| X_{\sigma(n,j-1)} - X_{\sigma(n,j)-} \right| < \frac{1}{n^2} \quad \text{et}$$

$$\left| X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)-} \right| > \frac{1}{n}$$

donc $\left| W^n(t) - U^n(t) \right| < \frac{2}{n} \cdot U^n(t)$

ce qui montre que la suite de processus $(W^n(t))_{n>o}$ converge vers le processus $U(t)$ quand n tend vers l'infini.

Soit $S^n(t)$ le processus défini sur $[\sigma(n,k), \sigma(n,k+1)[$ par

$$S^n(t) = \sum_{j=1}^{k+1} \left[X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j-1)}\right]^2 \cdot 1_{B(n,j)}$$

$$= V^n(t) - W^n(t) + \left[X_{\sigma(n,k)} - X_{\sigma(n,k-1)}\right]^2 \cdot 1_{B(n,k)}$$

Ce qui précéde et le f) montre que, sauf sur H, la suite $S^{g(n)}$ converge sur les rationnels et les temps d'arrêt $\sigma(n,k)$ vers $V(t) - U(t) = S(t)$

h) Pour tout n, on a :

$$f(X_1) - f(X_o) = \sum_{h>o} \left[f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)})\right](1_{A(n,k)} + 1_{B(n,k)})$$

D'après la formule de Taylor, pour tout n, k, et ω, il existe $R_{n,k}(\omega) \in [X_{\sigma(n,k)}, X_{\sigma(n,k+1)}]$ tel que

$$f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)}) = \left[X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}\right] f'(X_{\sigma(n,k)})$$

$$+ \frac{1}{2} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^2 . f''(R_{n,k})$$

(en fait, l'identité qui précède ne sera utilisée que sur B(n,k)).

On a donc : $f(X_1) - f(X_o) = \sum_{k>o} \{ \sum_{i=1}^{4} a^i_{n,k} \}$ avec

$$a^1_{n,k} = (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) . f'(X_{\sigma(n,k)})$$

$$a^2_{n,k} = \frac{1}{2} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^2 . f''(X_{\sigma(n,k)}) . 1_{B(n,k)}$$

$$a^3_{n,k} = \frac{1}{2} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^2 . \left[f''(R_{n,k}) - f''(X_{\sigma(n,k)})\right] . 1_{B(n,k)}$$

$$a^4_{n,k} = \left[- (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) f'(X_{\sigma(n,k)}) + f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)})\right] . 1_{A(n,k)}$$

On se propose, maintenant, de montrer que $\sum_k a^i_{g(n),k}$ converge, pour $1 \leq i \leq 4$, quand n tend vers l'infini.

i) Soit $Z^n(t)$ le processus prévisible défini, sur $]\sigma(n,k), \sigma(n,k+1)]$, par $Z^n(t) = X_{\sigma(n,k)}$. On a $\sum_{k\geq o} a^1_{n,k} = \int Z^n(t).d X_t$

Or $Z^n(t)$ converge (uniformément) vers X_{u-} quand n tend vers l'infini, donc (convergence dominée) $\sum_{k\geq o} a^1_{n,k}$ converge dans $L_1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vers $\int X_{u-} \,.\, d\, X_u$

j) Puisque l'espace des valeurs de X est borné, f" est uniformément continue sur cet espace ; donc $\forall\, \varepsilon > o$, pour n assez grand, $| f''(R_{n,k}) - f''(X_{(n,k)}) | < \varepsilon$ si $\omega \in B(n,k)$; ceci et la fin du g) montre que $\sum_{k\geq o} a^3_{n,k}$ converge vers o dans $L_1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ quand n tend vers l'infini.

k) On a $\sum_{k\geq o} a^2_{n,k} = \int_o^1 f''(X_t) \,.\, dS^n(t)$ (cf. la fin du g)).

La fin du g) et le lemme 2 montrent alors que $\sum_{k\geq o} a^2_{g(n),k}$ converge, sauf sur H, vers $\frac{1}{2} \,.\, \int_o^1 f''(X_{u-}).dS_u$.

l) En considérant des sous-suites, on peut déduire de la convergence dans L_1 une convergence presque sure. On peut donc construire une application croissante h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour i=1, 2 ou 3, $\sum_{k>o} a^i_{h(n),k}$ converge P-p.s. quand n tend vers l'infini.

Enfin, $\sum_{k>o} a^4_{n,k}$ converge vers Q(1) d'après le lemme 1 et le fait que la suite $(K_n)_{n>o}$ de parties de $\Omega \times T$ est croissante et épuise les sauts de X_t, en posant $K_n = \bigcup_{k>o} \{ (t,\omega) : \omega \in A(n,k)$ et $t = \sigma(n,k)(\omega) \}$

m) Soit σ un temps d'arrêt ; le lemme 3 et la définition de S(t) montrent que $S_\sigma = S_{\sigma-}$. On en déduit que S(t) est à trajectoires continues ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque :

Dans ce qui précède, la "variation quadratique" est toujours calculée globalement. On peut se demander s'il est possible de la calculer par trajectoires.

B I B L I O G R A P H I E

[1] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER - *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales.*
Séminaire de Probabilités IV - Lecture Notes in Mathematics 124 - Springs Verlag

[2] M. METIVIER - *Stochastic integral and vector valued measures*

[3] J. PELLAUMAIL - *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer*
Astérisque - Novembre 73 - Société mathématique de France.