

PIERRE CREPEL

Convergence de μ sur un groupe abélien et sur un groupe nilpotent discret

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 3

« Séminaires de probabilité », , p. 12-22

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__3_12_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONVERGENCE DE μ^n SUR UN GROUPE ABELIEN
ET SUR UN GROUPE NILPOTENT DISCRET

Par P. CREPEL (*)

Laboratoire de Probabilités - ERA 250 C.N.R.S. - RENNES

- G est, dans la première partie, un groupe abélien localement compact, et, dans la seconde, un groupe nilpotent discret.
- μ désigne une probabilité sur G. On dira que μ est apériodique si son support S_μ n'est porté par aucun sous-groupe fermé propre de G. On dira que μ est strictement apériodique si S_μ n'est porté par aucune classe d'un sous-groupe fermé distingué propre de G.
- On confondra les mesures finies absolument continues par rapport à la mesure de Haar avec leur densité. Par exemple $v \in L^1_0(G)$ signifie que v est finie, $v \ll m$ et $v(G) = 0$.
- L'objet de cet exposé est de démontrer la convergence en norme L^1 de $\|\mu^n * v\|_1$ vers 0 lorsque μ est strictement apériodique et lorsque $v \in L^1_0(G)$. L'exposé est, dans sa première partie, la reproduction fidèle de la démonstration de Foguel [1] ; et, dans sa deuxième partie, une adaptation de cet article de Foguel inspirée des méthodes introduites par Y. GUIVARC'H dans sa thèse (cf. [3]). On retrouve ainsi, de manière simple, un cas particulier d'un résultat démontré dans [3].

(*) Exposé fait au séminaire KGB - Rennes des 18 et 25/10/73

ITEREES D'UNE MESURE SUR UN GROUPE ABELIEN

d'après

S.R. FOGUEL [1]

I. Rappels sur les caractères et l'analyse harmonique

G groupe localement compact abélien

Γ groupe des caractères (i.e. homomorphismes continus de G dans \mathbb{T}).

- L'algèbre $L^1(G)$ et les caractères (i.e. transformation de Fourier)

Soit $\nu \ll m$ finie :

$$\nu \longmapsto \hat{\nu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) \nu(dx) ,$$

$$L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un homomorphisme d'algèbre continu pour la norme de L^1

(γ étant un caractère fixé).

On les obtient tous comme ça.

- Idéaux et caractères

$\gamma \in \Gamma$ fixé; $\{\nu \ll m / \hat{\nu}(\gamma) = 0\}$ est un idéal (facile) maximal (difficile).

Chaque caractère correspond à un idéal maximal de $L^1(G)$.

Théorème : Loomis p. 151, version simplifiée : [5]

Si \mathcal{A} est un idéal fermé de $L^1(G)$, s'il est contenu dans un seul idéal maximal \mathcal{A}_1 , alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$

Dans la suite, G est un groupe abélien localement compact, et μ est une mesure de probabilité sur G .

II - Théorème :

Si μ est strictement apériodique, si $v \ll m$ ($\frac{dv}{dm} \in L^1$), alors

$$\|\mu^n * v\| \rightarrow 0 \iff v(G) = 0$$

CN $|v(G)| = |(\mu^n * v)(G)| \leq \|\mu^n * v\| \rightarrow 0$

(Rem : ceci est d'ailleurs vrai pour tout opérateur markovien :

$$\text{si } f \in L^1 : |\langle f, 1 \rangle| = |\langle f P^n, 1 \rangle| \leq \|f P^n\|_1$$

CS Soit $\mathcal{A} = \{v \ll m / \|\mu^n * v\| \rightarrow 0\}$

$$\mathcal{A}_1 = \{v \ll m / v(G) = 0\}$$

On sait déjà que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$, et on veut démontrer que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$.

Pour cela, en utilisant le rappel $(n^\circ \text{I})$, il suffit de voir que \mathcal{A}_1 est le seul idéal maximal qui contient \mathcal{A} . En d'autres termes, il suffit de voir que $\gamma_0(\cdot) \equiv 1$ est le seul caractère qui s'annule sur \mathcal{A}

(puisque l'idéal maximal associé à $\gamma_0(\cdot) \equiv 1$ est précisément \mathcal{A}_1 :

$$\hat{\lambda}(\gamma_0) = \int_G \lambda(dx) = \lambda(G).$$

Lemme :

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs qui commutent (sur un espace de Banach

E) alors $\forall \alpha, \beta \geq 0 \quad \alpha + \beta = 1$, on a $\|(\alpha P_1 + \beta P_2)^n (P_1 - P_2)\| \rightarrow 0$

Démonstration : [2]

On peut d'abord supposer $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (sinon prendre :

$P_1' : 2\alpha P_1 + (1-2\alpha) P_2$, en supposant $\alpha < \frac{1}{2}$, et se ramener au cas $\frac{1}{2}$).

Maintenant

$$\left\| \left(\frac{P_1 + P_2}{2} \right)^n (P_1 - P_2) \right\| = \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{k=0}^n C_n^k P_1^k P_2^{n-k} (P_1 - P_2) \right\| \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n |C_n^k - C_n^{k-1}|.$$

Or cette dernière quantité A vaut (si n est pair) deux fois $C_n^{n/2}$, d'où :

$$\| \| \sim \frac{K}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \square$$

Suite de la démonstration de la CS :

- On déduit du lemme que

$$\forall A \quad 0 < \mu(A) < 1, \quad \|\mu^n * (\mu_1 - \mu_2)\| \rightarrow 0 \quad \text{où} \quad \mu_1 = \frac{\mu|_A}{\mu(A)} \quad \mu_2 = \frac{\mu|_{A^c}}{\mu(A^c)}$$

$$\text{d'où en faisant la différence} \quad \mu_1 - \mu_2 = \frac{\mu|_A - \mu\mu(A)}{\mu(A)(1-\mu(A))} :$$

$$\mu|_A - \mu\mu(A) \in \mathcal{Q}$$

Il en est de même de $[\mu|_A - \mu\mu(A)] * \tau \quad \forall \tau \ll m$ (\mathcal{Q} est un idéal).

- Soit maintenant γ un caractère qui s'annule sur \mathcal{Q} , alors

$$[\hat{\mu}|_A(\gamma) - \mu(A)\hat{\mu}(\gamma)] * \hat{\tau}(\gamma) = 0 \quad \forall \tau \ll m$$

donc (puisque pour au moins un τ , $\hat{\tau}(\gamma)$ doit être différent de 0) :

$$\hat{\mu}|_A(\gamma) = \mu(A) \hat{\mu}(\gamma)$$

ou

$$\int_A \gamma(-x) \mu(dx) = \mu(A) \int_G \gamma(-x) \mu(dx)$$

ce qui implique que $\gamma(-x) = \mu(\gamma)$ pour $x \in \text{Supp } \mu$

Or $\{\gamma(\cdot) = \hat{\mu}(\gamma)\}$ est une classe du sous-groupe fermé $\{\gamma(\cdot) = 1\}$

L'hypothèse de stricte apériodicité entraîne donc que $\gamma(\cdot) = C^{te}$, et

cette constante est 1, ce qu'on voulait démontrer. \square

Définition : f μ -harmonique $\iff \int_G f(x-y)\mu(dy) = f(x)$ (m.p.s.).

Corollaire (Lemme de Choquet-Deny)

Si μ est apériodique, toutes les fonctions μ -harmoniques bornées sont constantes p.s.(m).

Démonstration :

- Supposons d'abord μ strictement apériodique :

Soit $f \in L^\infty(G)$, il suffit de démontrer que $\forall v \ll m$, on a $v * f = 0$, ce

qui résulte de :

$$|v * f| = |v * \mu^n * f| \leq \|f\|_\infty \|v * \mu^n\| \rightarrow 0.$$

- Si μ est apériodique, maintenant, on se ramène au cas précédent en remarquant que $p = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu^n}{2^n}$ est strictement apériodique :
alors f μ -harmonique \implies f p -harmonique \implies $f = C^{te}$ m.p.s.

ITERÉES D'UNE MESURE SUR UN GROUPE NILPOTENT DISCRET

Définition : Soit G un groupe, on notera G^1 le groupe engendré par les

$$\{xy x^{-1} y^{-1} / x \in G, y \in G\} : G^1 = [G, G]$$

puis $G^2 = [G, G^1] \dots G^n = [G, G^{n-1}]$.

On dira que G est nilpotent de classe r si pour un r , $G^r = \{e\}$.

Alors G^{r-1} est contenu dans le centre, les G^{n-1}/G^n sont des groupes abéliens... En particulier, si $r=2$, G^1 est dans le centre de G

(exemple : le groupe des matrices triangulaires sur \mathbb{R}^3).

Théorème :

Soit μ une probabilité strictement apériodique sur un groupe nilpotent discret G , alors pour tout $v \in L^1_0(G)$, on a

$$\|\mu^n * v\|_1 \longrightarrow 0$$

Remarque : Nous démontrerons ce théorème dans le cas où G est de classe 2.

La démonstration s'étend par récurrence facilement au cas général.

Démonstration : Elle se fait en plusieurs étapes dont la principale est le lemme suivant (qui est évidemment un cas particulier du théorème, puisque $\epsilon_a - \epsilon_c \in L^1_0(G)$ (G étant discret)).

Lemme 1 : $\forall c \in G^1 \quad \|\mu^n * (\epsilon_a - \epsilon_c)\|_1 \longrightarrow 0$.

Avant de démontrer ce lemme, déduisons-en la démonstration du théorème, en quelques étapes :

* $\|\mu^n * v\| \longrightarrow 0 \quad \forall v \in L^1_0(G^1)$.

En effet, il est facile de voir que si $v \in L^1_0(G^1)$, on peut écrire

$$v = \sum_{c \in G^1} a_c (\epsilon_a - \epsilon_c) \text{ avec } a_c \in \mathbb{R}.$$

Il suffit ensuite d'écrire que

$$\|\mu^n * v\|_1 \leq \sum_{c \in G^1} |a_c| \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_c)\|_1$$

ϵ étant donné, v étant une mesure finie, et $\tau \longrightarrow \mu^n * \tau$ étant une contraction de L^1 , on a :

$$\|\mu^n * v\|_1 \leq \sum_{c \in I} |a_c| \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_c)\|_1 + \sum_{c \in I^c} |a_c|$$

où l'on peut choisir la partie finie I de G^1 de manière que $\sum_{c \in I^c} |a_c| < \frac{\epsilon}{2}$, puis (I étant fixé) N assez grand pour que $\forall n > N$, le premier terme soit $\frac{\epsilon}{2}$.

$$\ast \quad \underline{\|\mu^n * v\| \longrightarrow 0 \quad \forall v \in L^1_0(G, G^1)}$$

$[L^1_0(G, G^1)$ désigne l'ensemble des mesures finies d'intégrale nulle sur chaque classe de G^1].

En effet, il suffit de remarquer que si $v \in L^1_0(G, G^1)$, on peut écrire $v = \sum_{x \in G} (v_x * \epsilon_x)$ où $v_x \in L^1_0(G^1)$ ($\forall x$), et de raisonner comme ci-dessus.

$$\ast \quad \underline{\|\mu^n * v\| \longrightarrow 0 \quad \forall v \in L^1_0(G)}$$

Remarquons d'abord pour cela que $L^1_0(G/G^1) = L^1_0(G) / L^1_0(G, G^1)$ (G^1 est dans le centre et G/G^1 est abélien). Ce résultat est facile à vérifier. μ étant strictement apériodique sur G/G^1 , il en est de même de sa projection $\bar{\mu}$ sur G/G^1 , et on peut appliquer le théorème de Foguel (cas abélien) à $\bar{\mu}$ et G/G^1 , on a donc :

$$\begin{cases} \|\mu^n * v\| \longrightarrow 0 & \forall v \in L^1_0(G, G^1) \\ \|\mu^n * \tau\| \longrightarrow 0 & \forall \tau \in L^1_0(G/G^1) \end{cases}$$

Le théorème sera donc démontré si on applique le lemme élémentaire suivant sur les espaces de Banach à $E = L^1_0(G)$ et $F = L^1_0(G, G^1)$:

Lemme 2 :

Si T est une contraction de E qui laisse stable F , et si $(T|_F)^n$ et \bar{T}^n (sur E/F) convergent simplement vers 0, alors il en est de même pour T^n (sur E).

Démonstration : Cf [3]

Soient $x \in E$ et $\epsilon > 0$ fixés, on veut rendre $\|T^n x\| < \epsilon$, ce qui est facile : fixons d'abord p assez grand pour que $\|\bar{T}^p \bar{x}\| < \frac{\epsilon}{2}$, on peut alors trouver $y \in F$ (par définition de la norme dans l'espace quotient) tel que $\|T^p x - y\| < \frac{\epsilon}{2}$, alors :

$$\|T^{m+p} x\| \leq \|T^m(T^p x - y)\| + \|T^m y\|$$

est inférieur à ϵ pour m assez grand, puisque, pour le premier morceau, T^m est une contraction, et que pour l'autre $(T|_F)^m$ converge vers 0. ~~□~~

Moyennant le lemme 1, le théorème est donc démontré.

Démonstration du lemme 1 :

- Remarquons d'abord qu'il suffit de vérifier le lemme 1 pour tout c appartenant à un système de générateurs S de G^1

$$\text{En effet } \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_c)\| \rightarrow 0 \implies \|\mu^n * (\epsilon_{c^{-1}} - \epsilon_\theta)\| \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{l} \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_{c_1})\| \rightarrow 0 \\ \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_{c_2})\| \rightarrow 0 \end{array} \left| \implies \begin{array}{l} \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_{c_1 c_2})\| \leq \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_{c_1})\| \\ + \|\mu^n * (\epsilon_\theta - \epsilon_{c_2}) * \epsilon_{c_1}\| \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Quitte à montrer que sous l'hypothèse " μ strictement apériodique", $S = \{xy x^{-1} y^{-1} / x_1 y \in S_\mu\}$ engendre bien G^1 , il suffit de prouver le lemme pour $c \in S$.

- S engendre G^1

Soit G' le sous-groupe engendré par S , il est évident que $G' \subset G^1$ est contenu dans le centre, donc distingué.

μ est apériodique, donc S_μ engendre G ; il en est donc de même de $S_{\bar{\mu}}$ sur G/G' (où $\bar{\mu}$ est la projection de μ sur G/G').

Mais, par construction et par définition de G' , deux éléments de $S_{\bar{\mu}}$ commutent. Donc G/G' est abélien, ce qui implique que $G' = G^1$, puisque G^1 est le groupe de commutateurs.

- Pour tout $c \in S$, il existe deux mesures positives $\alpha_c \neq 0$ et β_c dont la somme des masses est 1, telles que :

$$\mu^2 = \alpha_c * \frac{\epsilon_e + \epsilon_c}{2} + \beta_c$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{cases} u = cv & \text{où } u=xy \\ v = ev & v = yx \end{cases} \quad x, y \in S_\mu$$

u et v sont donc dans S_{μ^2} ($\mu^2(\{u\}) > 0$ et $\mu^2(\{v\}) > 0$)

et par suite :

$$\begin{cases} \mu^2 = a \epsilon_c * \epsilon_v + \beta \\ \mu^2 = a' \epsilon_e + \epsilon_v + \beta' \end{cases} \quad \begin{cases} a, a' \in \mathbb{R}^{+*} \\ \beta, \beta' \text{ mesures } \geq 0 \end{cases}$$

d'où $\mu^2 = \epsilon_v * \frac{a\epsilon_c + a'\epsilon_e}{2} + \beta + \beta'$

d'où le résultat.

- $\forall c \in S \quad \|\mu^n * (\epsilon_e - \epsilon_c)\|_1 \rightarrow 0$

Il suffit de voir que $\forall c \in S$:

$$\left\| \left(\alpha_c * \frac{\epsilon_e + \epsilon_c}{2} + \beta_c \right)^n * (\epsilon_e - \epsilon_c) \right\|_1 \rightarrow 0$$

S étant inclus dans le centre de G , le résultat est un cas particulier du lemme suivant :

Lemme 3 :

Soit E un espace normé. Si P_1, P_2, Q et R sont des contractions de E telles que P_1 et P_2 commutent entre elles et avec Q et R , alors

$$\forall a \in]0, 1[\quad \left\| \left[a Q \frac{P_1 + P_2}{2} + (1-a) R \right]^n (P_1 - P_2) \right\| \rightarrow 0.$$

Démonstration : Soit A_n l'opérateur entre $\| \cdot \|$, on a

$$\|A_n\| = \sum_{k=0}^n \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)^k (P_1-P_2) \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=k \\ j_1+\dots+j_p=n-k}} Q^{i_1} R^{j_1} \dots Q^{i_p} R^{j_p} \cdot a^k (1-a)^{n-k}$$

d'où $\|A_n\| \leq \sum_{k=0}^n C_n^k a^k (1-a)^{n-k} \epsilon_k$ où $\epsilon_k = \left\| \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)^k (P_1-P_2) \right\|$

(puisque $\|Q\| \leq 1$ et $\|R\| \leq 1$).

Comme ϵ_k tend vers 0 (d'après le lemme de Foguel), $\|A_n\|$ tend aussi vers 0, comme il est facile de le voir :

en effet, soit $\epsilon > 0$, pour $k > N : \epsilon_k < \epsilon$, d'où

$$\|A_n\| \leq \underbrace{\sum_{k=0}^N C_n^k a^k (1-a)^{n-k} \epsilon_k}_{< 1} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^n C_n^k a^k (1-a)^{n-k} \epsilon}_{\leq 1}$$

et N étant fixé, pour k donné, on a $C_n^k (1-a)^{n-k} \rightarrow 0$, il suffit alors de prendre n assez grand.

(N.B. Il y a dans [4] une démonstration probabiliste élégante de

$$\sum_{k=0}^n C_n^k a^k (1-a)^{n-k} \epsilon_k \rightarrow 0 \text{ quand } \epsilon_k \rightarrow 0). \quad \square$$

Remarques :

- Comme on l'a dit plus haut, ce résultat se démontre de proche en proche pour G nilpotent discret de classe quelconque.
- Si G n'est pas discret, le résultat général n'est pas connu pour une probabilité μ strictement apériodique quelconque.

Guivarc'h a néanmoins obtenu ce résultat dans [3] pour trois cas :

- * G de classe 2
- * G de classe quelconque et μ étalée (i.e., pour un n, μ^n non étranger à m)
- * G de classe quelconque et μ admettant un moment fini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.R. FOGUEL : On iterates of convolutions (à paraître)
- [2] S.R. FOGUEL, B. WEISS : On convex power series of a conservative Markov operator (Proc. Amer. Math. Soc. 38-2. Avril 1973, p. 325-30).
- [3] Y. GUIVARC'H : Extension d'un théorème de Choquet-Deny à une classe de groupes non abéliens (Astérisique n° 4, S.M.F. 1973).
- [4] G. LETAC, M. METIVIER : Les théorèmes de renouvellement de D. Ornstein (U.E.R. Math. Informatique Université de Rennes (France)).
- [5] L.H. LOOMIS : An introduction to abstract harmonic analysis Van Nostrand (1953).