

J. F. NOURRIGAT

Problèmes d'évolution dégénérés d'ordre 2

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 9, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973__2_A9_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEMES D'EVOLUTION DEGENERES D'ORDRE 2

par

J.F. NOURRIGAT

On se donne deux espaces de Hilbert V et H tels que :

$$(1) \quad \begin{cases} V \hookrightarrow H, V \text{ dense dans } H, H \text{ assimilé à son antidual, donc} \\ V \hookrightarrow H \hookrightarrow V' \end{cases}$$

un nombre $T > 0$ et une fonction $A(t) \in C^1([0, T], \mathcal{L}(V, V'))$ telle que :

$$(2) \quad \begin{cases} \langle A(t) u, v \rangle_{V', X_V} = \langle u, A(t) v \rangle_{V \times V}, \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall u \text{ et } v \in V \\ \operatorname{Re} \langle A(t) v, v \rangle_{V', X_V} \geq \alpha \|v\|_V^2 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ indépendant de t et v .

On considère, d'autre part, un opérateur différentiel P sur $]0, T[$, d'ordre 2, à coefficients $C^\infty([0, T])$

$$P u(t) = t u''(t) + a(t) u'(t).$$

Nous nous proposons d'étudier le problème de Cauchy pour l'opérateur $Pu(t) + A(t) u(t)$. On peut aussi étudier un problème de Sturm-Lionville pour l'opérateur

$$-t(1-t) u''(t) - a(t) u'(t) + A(t) u(t)$$

avec données en $t=0$ et $t=1$.

Énonçons le théorème d'existence et d'unicité lorsque le second membre est dans $L^2(0, T; H)$.

Théorème 1.

Sous les hypothèses (1), (2) et

$$(3) \quad \operatorname{Re} a(0) > \frac{1}{2},$$

pour tous $f \in L^2(0, T; H)$ et $u_0 \in V$, il existe un u et un seul tel que

$$(4) \quad \begin{cases} u \in L^\infty(0, T; V) \\ Pu \in L^2(0, T; V') \\ Pu + Au = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Remarque 1 : On peut démontrer l'implication suivante :

$$\left. \begin{array}{l} u \in L^\infty(0, T; V) \\ Pu + Au \in L^2(0, T; H) \end{array} \right\} \implies u \in \mathcal{C}([0, T], V)$$

de sorte que le problème (4) a un sens.

Remarque 2 : La condition (3) est nécessaire pour l'unicité.

Le théorème 1 se démontre par la méthode de Galerkin ; la démonstration est voisine de celle utilisée dans LIONS-MAGENES [1] pour l'équation des ondes.

Introduisons maintenant les espaces intervenant pour la régularité d'ordre k :

$$X_k = \{u \in \mathcal{C}^k([0, T], V) \mid u(0) = 0, u^{(k+1)}, tu^{(k+2)} \in L^2(0, T; V')\} \quad k \text{ entier } \geq 0$$

$$Y_k = \{f \in H^k(0, T; H) \mid f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.

Si $a(0) + k > \frac{1}{2}$, pour tout $f \in Y_k$, il existe un $u \in X_k$ et un seul tel que $Pu + Au = f$, et l'on a :

$$\gamma_j u = 0 \quad \text{pour } j \leq k.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIONS-MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes.