D. PREVOSTO
J. ROLLAND

Problèmes aux limites pour des opérateurs elliptiques et dégénérés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 8, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A8_0>

PROBLEMES AUX LIMITES POUR DES OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES

(d'après M.I. Višik et V.V. Grušin ; 1969)

par

D. PREVOSTO et J. ROLLAND

---

§ 1. Un exemple.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord compacte de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 0\} ; \\ \Gamma = \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\} ; \\ \text{Pour tout } x \in \Gamma, \text{ grad } \varphi(x) \neq 0. \end{cases}$$

On considère l'opérateur L, défini sur $\overline{\Omega}$ par :

$$L = [\varphi(x)]^\sigma \ \Delta^{k_1} + (-1)^{k_1-k_2} a(x) \ \Delta^{k_2} ,$$

où $\sigma \in \mathbb{R}_+$, k_1 et k_2 sont deux entiers positifs tels que $k_1 > k_2$ et $a(x)$ est continue jusqu'au bord.

1.1. $\sigma > 2(k_1 - k_2)$.

On suppose que $a(x) > 0$, pour tout $x \in \Gamma$. L'opérateur L vérifie les conditions suivantes :

$\boxed{C_1}$ Ellipticité à l'intérieur de Ω :

$$(\forall x \in \Omega) \ (\forall \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}) \ ([\varphi(x)]^\sigma \ (\sum_{i=1}^n \ \xi_i^2)^{k_1} \neq 0).$$

$\boxed{C_2}$

$$(\forall x_0' \in \Gamma)(\forall x \in \overline{\Omega})(\forall \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}) \ ([\varphi(x)]^\sigma (\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{k_1} + a(x_0')(\sum_{i=1}^n \ \xi_i^2)^{k_2} \neq 0).$$

Soit $B = (B_j \ ; \ j = 1,\dots, k_2)$ un système d'opérateurs frontière qui recouvre Δ^{k_2} (par exemple le système de Dirichlet d'ordre k_2). Alors, si m_j est l'ordre de B_j, pour $j=1,\dots,k_2$, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1.

Soit $H_\pi(\Omega) = \{u \mid u \in H^{2k_2}(\Omega)$ et $\varphi^\sigma D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq 2k_1\}$.

L'opérateur $(L \ ; \ B)$ est un opérateur à indice de $H_\pi(\Omega)$ dans

$$L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k_2} H^{2k_2-m_j-1/2}(\Gamma).$$

(ce théorème résultera de l'étude générale faite plus loin).

Remarque : Si $a(x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma$, on est dans le cas des opérateurs étudiés par P. Bolley et J. Camus [1].

1.2. $0 < \sigma \leq 2(k_1 - k_2)$.

L'opérateur s'écrit :

$$L = [\varphi(x)]^{2(k_1-k_2)}\Delta^{k_1} + (-1)^{k_1-k_2} a(x)\, \Delta^{k_2}.$$

Il appartient à la classe des opérateurs étudiés par P. Bolley et J. Camus [1]; M.I. Višik et V.V. Grušin [4] (§ 5) et N. Shimakura [2].

Dans ce cas, l'équation indicielle associée s'écrit :

$$(2k_1+\rho) \dots (2k_2 + \rho + 1) + a(x) = 0.$$

L'opérateur L est linéaire continu de $W^{2k_1}_{2(k_1-k_2)}(\Omega) = \{u \in H^{2k_2}(\Omega) \ ; \ \varphi^{2(k_1-k_2)} u \in H^{2k_1}(\Omega)\}$ dans $L^2(\Omega)$.

a) $\sigma = 2(k_1-k_2)$.

* Si, pour tout $x \in \Gamma$, $a(x) = 0$, on a $\mathrm{Re}\,\rho < -2k_2 - \frac{1}{2}$, pour toute racine ρ de l'équation indicielle.

Et, pour obtenir un problème à indice, il faudra se donner k_1 conditions aux limites liées à tout l'opérateur.

(ce résultat reste vrai si $a(x)$ est assez petit pour tout $x \in \Gamma$).

$\ast$ Si, pour tout $x \in \Gamma$, $a(x) > 0$ est assez grand, on a : $\mathrm{Re}\,\rho \neq -2k_2 - \frac{1}{2}$, pour toute racine ρ de l'équation indicielle ; de plus, il y a (k_1-k_2) racines ρ de l'équation indicielle telles que $\mathrm{Re}\,\rho > -2k_2 - \frac{1}{2}$.

Et, pour obtenir un problème à indice, il faudra se donner $\underline{k_2}$ <u>conditions aux limites recouvrant Δ^{k_2}</u>.

$\ast$ Pour les autres valeurs de $a(x) > 0$, <u>le nombre de conditions aux limites</u> à donner pour obtenir un problème à indice <u>varie entre k_1 et k_2</u>, et <u>ces conditions sont liées à tout l'opérateur</u>.

b) <u>$0 < \sigma < 2\ (k_1-k_2)$</u>

Dans ce cas, pour obtenir un problème à indice, on prend $\underline{k_1}$ <u>conditions aux limites qui recouvrent l'opérateur Δ^{k_1}</u>.

On peut remarquer que, dans ce cas, le signe de $a(x)$ n'intervient pas. De plus, l'ordre des opérateurs frontière est lié à σ.

§ 2. <u>Etude d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés</u>.

Soit Ω un ouvert très régulier de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ. On étudie les opérateurs qui, dans un système de coordonnées locales, s'écrivent :

$$L(x;x_n;D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\ x_n^{\ell_\alpha}\ D^\alpha,$$

avec :

$$\ell_\alpha = \max\ (0,\ q\alpha_n + q'|\alpha'| - qr),$$

où q et q' sont deux réels tels que $q > 1$, $q' > 0$,

et où r et r' sont deux entiers tels que : $0 < r \leq m$, $0 \leq r' \leq m$, avec

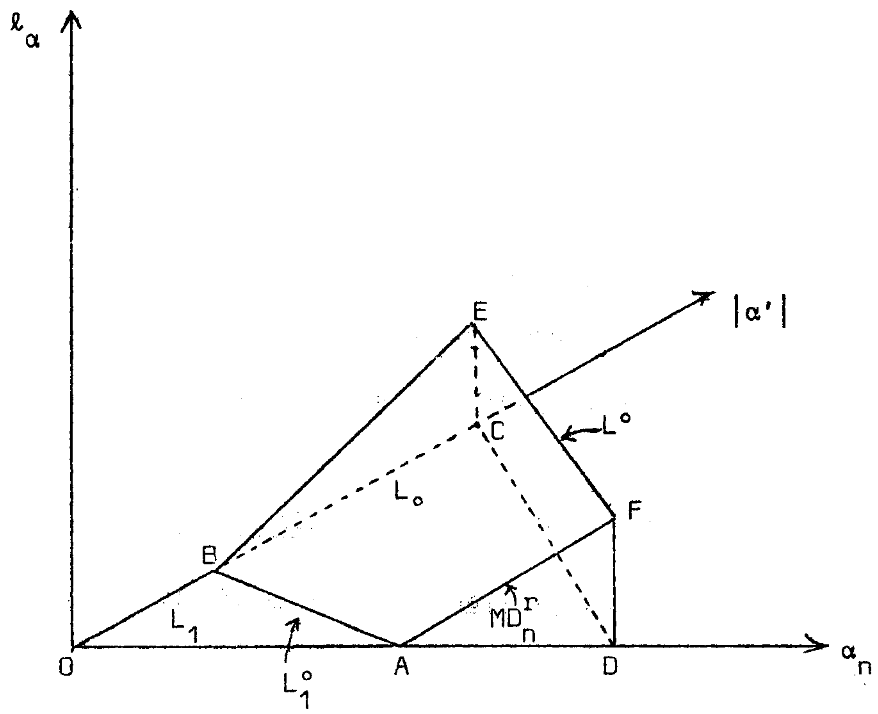
$$q'r' = qr.$$

On suppose que les coefficients a_α sont continus jusqu'au bord.

Pour avoir une idée de la structure de l'opérateur L, on utilise le graphe de ℓ_α en fonction de $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Dans notre étude, on supposons que ℓ_α ne dépend que de $|\alpha'|$ et de α_n, ($\alpha' = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$), c'est-à-dire que les directions tangentielles sont équivalentes.

Tous les points du graphe de ℓ_α sont situés sur la surface du dièdre Π constitué par le triangle OAB de sommets $O = (0,0,0)$, $A = (0,r,0)$, $B = (r',0,0)$ et par le quadrilatère ABEF, avec $E = (m,0,q'm-qr)$, $F = (0,m,q(m-r))$. On note $C = (m,0,0)$ et $D = (0,m,0)$.



On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

$\boxed{C_1}$: Pour tout $x' \in \Gamma$, l'opérateur :

$$L(x'_o;x_n;D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x'_o)\, x_n^{\ell_\alpha}\, D^\alpha$$

est elliptique pour $x_n > 0$; c'est-à-dire que, pour tout $x_n > 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, on a :

$$L^\circ(x'_o;x_n;\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x'_o)\, x_n^{\ell_\alpha}\, \xi^\alpha \neq 0.$$

$\boxed{C_2}$: Pour tout $x'_0 \in \Gamma$, on a :

$$L_o(x'_o;x_m;\xi) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \frac{r}{r'}|\alpha'|+\alpha_n \geq r}} a_\alpha(x'_o)\, x_n^{\ell_\alpha}\, \xi^\alpha \neq 0,$$

pour tout $x_n \geq 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La condition C_2 implique, en particulier, que l'opérateur

$$L_1(x;D) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \ell_\alpha = 0}} a_\alpha(x)\, D^\alpha,$$

représenté par OAB, est quasi-elliptique sur Γ ; c'est-à-dire que, pour tout $x'_o \in \Gamma$, on a , pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$L_1^o(x'_o;\xi) = \sum_{\frac{r}{r'}|\alpha'|+\alpha_n = r} a_\alpha(x'_o)\ \xi^\alpha \neq 0.$$

On introduit maintenant des opérateurs frontière.

Soit μ le nombre de racines ζ de l'équation :

$$L_1^o(x'_o;\xi',\zeta) = 0, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\},$$

telles que $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

On considère alors μ opérateurs frontière qui s'écrivent, dans un système de coordonnées locales :

$$B_j(x';D) = \sum_{\frac{r}{r'}|\alpha'|+\alpha_n \leq m_j} b_{j\alpha}(x')\, D^\alpha,$$

où les $b_{j\alpha}$ sont suffisamment régulières et $m_j \leq r-1$.

Posons :

$$B_j(x';D) = \sum_{\frac{r}{r'}|\alpha'|+\alpha_n = m_j} b_{j\alpha}(x')\, D^\alpha \ ; \quad j = 1,\dots,\mu.$$

On suppose que le système des opérateurs frontière est compatible avec $L_1(x;D)$, c'est-à-dire que la condition suivante est vérifiée :

$\boxed{C_3}$: Pour tout $x'_o \in \Gamma$, le problème aux limites sur R_+ :

$$\left\{\begin{array}{ll} L_1^o(x_o';\xi',D_n)\ v(x_n) & = 0 \\ B_j^o(x_o';\xi',D_n)\ v(0) & = 0 \\ j = 1,\ldots,\mu \end{array}\right.$$

n'a pas de solution bornée non nulle sur R_+, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$.

Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 2.1.

Si l'opérateur $L(x;D)$ est elliptique à l'intérieur de Ω et si les conditions C_1, C_2 et C_3 sont vérifiées, alors l'opérateur

$$(L;\gamma B_j,\ j = 1,\ldots,\mu)$$

est un opérateur à indice de $H_\Pi(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(\Gamma)$, avec :

$$s_j = \frac{r'}{r}\,(r - m_j - \frac{1}{2}).$$

(L'espace $H_\Pi(\Omega)$ sera décrit au paragraphe 2.2).

L'étude sera faite en plusieurs étapes.

2.1 Etude de $L(x_o';x_n;D_{x'},D_n)$ dans une bande $\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)$:

On commence par faire une étude à une variable.

Pour tout $\tau > 0$, on définit l'espace :

$$H_\Pi(0,\tau) = \{u \in H^r(0,\tau) \mid D^r u \in V_q^{m-r}(0,\tau)\}\ ,$$

où :

$$V_q^{m-r}(0,\tau) = \{v \in L^2(0,\tau) \mid x_n^{qj}\ D_n^j v \in L^2(0,\tau)\ ;\ j = 0,\ldots,m-r\}.$$

Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et tout $\tau > 0$, $L(x_o';x_n;\xi',D_n)$ est un opérateur linéaire continu de $H_\Pi(0,\tau)$ dans $L^2(0,\tau)$.

Dans cette section, on étudie le problème aux limites :

$$\left\{\begin{array}{l} L(x_o';x_n;\xi',D_n)\ u(x_n) = f(x_n) \\ B_j^o(x_o';\xi',D_n)\ u(0) = \Psi_j \\ j = 1,\ldots,\mu. \end{array}\right.$$

sur un intervalle $0 \leqslant x_n \leqslant \delta$ de longueur assez petite. On construit d'abord des régularisateurs à gauche et à droite pour $|\xi'| \geqslant A$, avec A assez grand, puis pour $|\xi'| < A$.

2.1.1 <u>Construction de "presque inverses" pour $|\xi'| \geqslant A$.</u>

D'une manière générale, si X_1 et X_2 sont deux espaces de Banach, si Φ est un sous-espace de X_1 et si A et R sont des opérateurs linéaires continus de X_1 dans X_2 et de X_2 dans X_1 respectivement, on dira que R est un "presque inverse" relativement à (Φ, X_1, X_2) si : $AR = id_{X_2}$ et $RA = id_\Phi$.

1°) <u>Etude sur $(0,\tau_1)$ $(\tau_1 < \delta)$</u>

On étudie d'abord l'opérateur L_1^o (représenté par le segment AB).

<u>Proposition 2.1</u>

Sous les conditions C_2 et C_3, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, l'opérateur $\mathcal{U}_1(\xi') = (L_1^o(x_o';\xi',D_n)\ ;\ \gamma B_j^o(x_o';\xi',D_n),\ j = 1,\dots,\mu)$ est un isomorphisme de $H^r(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\mu$.

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que, si u est solution du problème :

$$\begin{cases} L_1^o(x_o';\xi',D_n)\ u(x_n) = f(x_n) \\ B_j^o(x_o';\xi',D_n)\ u(0) = \Psi_j, \quad j = 1,\dots \mu \end{cases}$$

on ait la majoration :

$$\sum_{j=0}^{r} \int_0^{+\infty} |\xi'|^{2(r-j)\frac{r'}{r}} |D_n^j\, u(x_n)|^2\, dx_n \leqslant C \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x_n)|^2\, dx_n + \sum_{j=1}^{\mu} |\xi'|^{2s_j} |\Psi_j|^2 \right\},$$

avec : $s_j = \frac{r'}{r}\,(r - m_j - \frac{1}{2})$, $j = 1,\dots,\mu$.

(La démonstration est tout à fait identique au cas elliptique. Pour la majoration, on la fait d'abord pour $|\xi'| = 1$, puis on termine par homogénéité).

On étudie maintenant l'opérateur

$$M(x_n;D_n) = \sum_{j=o}^{m-r} a_j\, x_n^{qj}\, D_n^j ,$$

avec, pour $j = 0,\dots,m-r$, $a_j = a_{(0,\dots,0,r+j)}(x_o')$.

Cet opérateur est représenté par AF.

On note $\Phi_q^{m-r}(0,\tau_1)$ l'espace des fonctions de $V_q^{m-r}(0,\tau_1)$ qui s'annulent au voisinage de $x_n = \tau_1$.

Proposition 2.2

Sous les conditions C_1 et C_2, pour τ_1 assez petit, il existe un "presque inverse" R_M de $M(x_n;D_n)$ relativement à

$$(\Phi_q^{m-r}(0,\tau_1),\ V_q^{m-r}(0,\tau_1),\ L^2(0,\tau_1)).$$

Démonstration.

On fait le changement de variable : $dx_n = x_n^q\, dt$.

L'opérateur $M(x_n;D_n)$ est transformé en :

$$P(t;D_t) = P_o(D_t) + P_1(t;D_t),$$

avec

$$P_o(D_t) = \sum_{j=o}^{p} a_j\, D_t^j.$$

De plus, si τ_1 est assez petit, les coefficients de $P_1(t;D_t)$ sont petits dans $]-\infty,t(\tau_1)[$. On applique alors un théorème d'inversion des opérateurs à coefficients peu variables [4]. D'où l'existence d'un régularisateur pour P. Et, en revenant à la variable x_n, on obtient le "presque inverse" R_M cherché. ▨

Pour chaque $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, on munit $H_\Pi(0,\tau_1)$ de la norme définie par :

$$\|u\|^2_{H_\Pi(0,\tau_1)} = \sum_{j=o}^{m-r}\int_o^{\tau_1} |x_n^{qj}\, D_n^{j+r}\, u(x_n)|^2\, dx_n + \sum_{j=o}^{r}\int_o^{\tau_1} |\xi'|^{2(r-j)\frac{r'}{r}}\, |D_n^j u(x_n)|^2\, dx_n.$$

On notera $\Phi_1(0,\tau_1)$ l'espace des fonctions de $H_\Pi(0,\tau_1)$ qui s'annulent au voisinage de $x_n = \tau_1$.

Pour $(v,\Psi) \in L^2(0,\tau_1) \times \mathbb{C}^\mu$, on pose $\tilde{v}$ le prolongement de v par 0 pour $x_n > \tau_1$. Soit alors u la solution du problème :

$$\mathcal{U}_1(\xi)\, u = (\tilde{v};\Psi).$$

Si l'on considère u comme fonction définie sur $(0,\tau_1)$, on notera :

$$u = R_{\mathcal{U}_1}(v;\Psi).$$

Pour $(f\ ;\Psi) \in L^2(0,\tau_1) \times \mathbb{C}^\mu$, on note :

$$R_M(f;\Psi) = (R_M f;\Psi)\ ;$$

et pour $(v;\Psi) \in V_q^{m-r}(0,\tau_1) \times \mathbb{C}^\mu$, on note :

$$M(v;\Psi) = (Mv;\Psi).$$

Alors, on obtient la :

<u>Proposition 2.3</u>

L'opérateur $R_1' = R_{\mathcal{U}_1} R_M$ est un "presque inverse" de $M\,\mathcal{U}_1(\xi')$ relativement à

$$(\Phi_1(0,\tau_1),\ H\ (0,\tau_1),\ L^2(0,\tau_1) \times \mathbb{C}^\mu).$$

De plus, si $u = R_1'(f;\Psi)$, on a :

$$\|u\|_{H_\Pi(0,\tau_1)} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(0,\tau_1)} + \|\Psi\| \right\},$$

où : $\|\Psi\| = \sum\limits_{j=1}^{\mu} |\xi'|^{2s_j} \,|\Psi_j|^2$ et où C ne dépend pas de τ_1 ni de ξ'.

On considère maintenant l'opérateur :

$$\mathcal{U}(\xi') = (L(x_0';x_n;\xi',D_n)\ ;\ \gamma B_j^0(x_0';\xi',D_n),\ j = 1,\dots,\mu).$$

On a le :

<u>Théorème 2.2</u>

Il existe $\delta_1 > 0$ et $A > 0$ telles que, pour tout $|\xi'| \geq A$, il existe sur l'intervalle $(0,\tau_1)$, avec $\tau_1 = \delta_1\, |\xi'|^{-\frac{1}{q'}}$, un "presque inverse" R_1 de $\mathcal{U}(\xi')$ relativement à :

$$(\Phi_1(0,\tau_1),\ H_{\Pi}(0,\tau_1),\ L^2(0,\tau_1)\times \mathbb{C}^{\mu}).$$

De plus, on a la majoration à priori :

$$\|u\|_{H_{\Pi}(0,\tau_1)} \leq C\ \left\{ \|f\|_{L^2(0,\tau_1)} + \|\Psi\| \right\}$$

si $u = R_1(f;\Psi)$, et où C ne dépend pas de ξ'.

Démonstration.

On écrit :

$$L(x_o';x_n;\xi',D_n) = M(x_n;D_n)\ L_1^o(x_o';\xi',D_n) + Q(x_o';x_n;\xi',D_n)\ ;$$

et l'on montre que, pour $\varepsilon > 0$, il existe deux constantes $A > 0$ et $\delta_1 > 0$ telles que, pour tout $|\xi'| \geqslant A$ et tout $u \in H_{\Pi}(0,\tau_1)$, on ait :

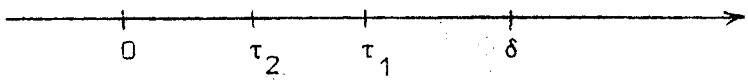
$$\|Q(x_o';x_n;\xi',D_n)u\|_{L^2(0,\tau_1)} \leq \varepsilon\ \|u\|_{H_{\Pi}(0,\tau_1)}$$

Comme $M\,\mathcal{U}_1(\xi')$ a un "presque inverse", on en déduit que $\mathcal{U}(\xi')$ a un "presque inverse" (lemme abstrait sur les "presque inverses"). ▨

2°) Etude sur (τ_2,δ)

On se donne δ_2 tel que $0 < \delta_2 < \delta_1$ et, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, on pose :

$$\tau_2 = \delta_2\ |\xi'|^{-\frac{1}{q'}}$$



On note $\Phi_2\ (\tau_2,\delta)$ le sous-espace des fonctions de $H^m(\tau_2,\delta)$ qui s'annulent au voisinage de $x_n = \tau_2$ et $x_n = \delta$.

Pour chaque $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, on munit $H^m(\tau_2,\delta)$ de la norme définie par :

$$\|u\|^2_{H^m(\tau_2,\delta)} = \sum_{j=o}^{m} \int_{\tau_2}^{\delta} \left| x_n^{qj\frac{m-r}{m}} \left(|\xi'|^r + x_n^{q'm-qr}|\xi'|^m\right)^{\frac{m-j}{m}} D_n^j\ u(x_n)\right|^2 dx_n .$$

Théorème 2.3

Il existe deux constantes $A > 0$ et $\delta > 0$ telles que l'opérateur $L(x_o';x_n;\xi',D_n)$ admette, pour tout $|\xi'| \geqslant A$, un "presque inverse" R_2 relativement à :

$$(\Phi_2(\tau_2,\delta),\ H^m(\tau_2,\delta),\ L^2(\tau_2,\delta)).$$

De plus, on a la majoration à priori :

$$\|R_2 f\|_{H^m(\tau_2,\delta)} \leq C \ \|f\|_{L^2(\tau_2,\delta)},$$

où C ne dépend pas de ξ'.

Démonstration

On pose : $h(\xi',x_n) = \left[\dfrac{|\xi'|^r + x_n^{q'm-qr}\ |\xi'|^m}{x_n^{q(m-r)}}\right]^{\frac{1}{m}}$

et l'on fait le changement de variables :

$$dy = h(\xi',x_n)\ dx_n.$$

Ce changement transforme l'opérateur $L_o(x_o';x_n;\xi',D_n)$ (représenté par ABEF) en un opérateur :

$$P = P_o + P_1$$

Les coefficients de P_1 sont aussi petits que l'on veut sur $(y(\tau_2),y(\delta))$ à condition de prendre δ assez petit et A assez grand.

De plus, les coefficients de P_o sont bornés dans $(y(\tau_2),y(\delta))$ et leurs dérivées (jusqu'à l'ordre m) sont aussi petites que l'on veut à condition de prendre δ assez petit et A assez grand.

Enfin, il existe une constante $b > 0$ telle que, si $\zeta_\nu(y)$, $1 \leq \nu \leq m$, sont les racines de $P_o(y,\zeta) = 0$, on ait :

$$|\mathrm{Im}\ \zeta_\nu\ (y)| \geq b, \quad \text{pour} \quad y(\tau_2) < y < y(\delta).$$

Par conséquent, en vertu d'un résultat classique sur les opérateurs à coefficients peu variables (cf : [4]), il existe un "presque inverse" de P. Et, en revenant à x_n, on obtient un "presque inverse" pour $L_o(x_o';x_n;\xi',D_n)$.

Comme la norme de l'opérateur représenté par OAB\AB est aussi petite que l'on veut, à condition de prendre δ assez petit et A assez grand, on montre que $L(x_o';x_n;\xi',D_n)$ admet un "presque inverse". ▨

3°) Conclusion : étude sur $(0,\delta)$

δ a été choisi dans le 2°).

Théorème 2.4

Pour tout $|\xi'| \geqslant A$, il existe des opérateurs linéaires continus R' et R'' de $L^2(0,\delta) \times \mathbb{C}^\mu$ dans $H_\Pi(0,\delta)$ tels que :

(i) $\mathcal{U}(\xi')\, R' = E_2$, où E_2 est l'identité sur $L^2(0,\delta) \times \mathbb{C}^\mu$

(ii) $R''\ \mathcal{U}(\xi') = E_1$ sur $\Phi(0,\delta) = \{u \in H_\Pi(0,\delta) \mid u = 0$ au voisinage de $x_n = \delta\}$, où E_1 est l'identité sur $H_\Pi(0,\delta)$.

Démonstration

Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, on fait une partition de l'unité (Ψ_1,Ψ_2) subordonnée au recouvrement : $(]-\infty,\ \delta_1[,]\ \delta_2,+\infty[)$ de $\mathbb{R}$.

On pose alors, pour tout $(f;\Psi) \in L^2(0,\delta) \times \mathbb{C}^\mu$:

$$R_o(f;\Psi) = \varphi_1\, R_1\, \varphi_1\ (f;\Psi) + \varphi_2\, R_2\, \varphi_2\, f\ ,$$

où :

$$\varphi_i(x_n) = \Psi_i\ (x_n\ |\xi'|^{\frac{1}{q'}}),\quad i = 1,2.$$

Alors, on montre que, pour $|\xi'|$ assez grand, l'opérateur $\mathcal{U}(\xi')\ R_o - E_2$ est de norme petite et que l'opérateur $R_o\ \mathcal{U}(\xi') - E_1$, de $\Phi(0,\delta)$ dans $\Phi(0,\delta)$, est de norme petite.

On en déduit alors l'existence de R' et R''.

Il suffit de prendre

et :

$$R' = R_o\ (\mathcal{U}(\xi')R_o)^{-1}$$

$$R'' = (R_o\ \mathcal{U}(\xi'))^{-1}\ R_o. \quad ▨$$

2.1.2 Construction d'un "presque inverse" pour $|\xi'| < A$

Théorème 2.5

Pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $|\xi'| < A$, l'opérateur $L(x_o';x_n;\xi',D_n)$ ait un "presque inverse" R relativement à :

$$(\Phi(0,\delta),\ H_\Pi(0,\delta),\ L^2(0,\delta)),$$

avec :

$$\|Rf\|_{H_\Pi(0,\delta)} \leq C \ \|f\|_{L^2(0,\delta)} ,$$

où C ne dépend pas de ξ'.

Démonstration

MD_n^r admet un "presque inverse" R_3 relativement à

$$(\Phi(0,\delta),\ H_\Pi(0,\delta),\ L^2(0,\delta)).$$

De plus :

$$L(x_o';x_n;\xi',D_n) = MD_n^r + Q'(x_o';x_n;\xi',D_n) \ ;$$

et, pour $|\xi'| < A$, QR_3 a une norme petite à condition de prendre $\delta > 0$ assez petit.

On en déduit alors que pour $|\xi'| < A$, $L(x_o';x_n;\xi',D_n)$ admet un "presque inverse" R. ▨

2.1.3 Etude de $L(x_o';x_n;D)$ dans la bande $R^{n-1} \times (0,\delta)$.

On définit l'espace :

$$H_\Pi(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \mid x_n^{\ell_\alpha} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))\}.$$

$\Phi(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ est l'espace des fonctions de $H_\Pi(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ qui s'annulent au voisinage de la droite $x_n = \delta$.

L'opérateur $\mathcal{U}_o = (L(x_o';x_n,D)\ ;\ \gamma B_j(x_o';D),\ j = 1,\dots,\mu)$ est linéaire continu de $H_\Pi(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ dans

$L^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1})$, avec, pour $j = 1,\dots,\mu$: $s_j = \frac{r'}{r}(r-m_j-\frac{1}{2})$.

Théorème 2.6

Il existe des opérateurs linéaires continus $\mathcal{R}_o'$ et $\mathcal{R}_o''$ de $L^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $H_\Pi(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ tels que pour tout $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1})$ et tout $u \in \Phi(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$, on ait :

(i) $\mathcal{U}_0\, \mathcal{R}_0'(f,g) = (f, g+Q(f,g))$, où Q est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{s_j}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $H^{\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$.

(ii) $\mathcal{R}_0''\, \mathcal{U}_0\, u = u$.

Démonstration

Soit φ_A **la** fonction définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$ telle que

et :
$$\varphi_A(\xi') = 1\ , \quad \text{pour} \quad |\xi'| < A$$
$$\varphi_A(\xi') = 0\ , \quad \text{pour} \quad |\xi'| \geqslant A.$$

Si F^{-1} désigne la transformation de Fourier inverse sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\hat{}$ la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$, on pose :

$$\mathcal{R}'(f,g) = F^{-1}\ \{(1-\varphi_A)\ R'_{\xi'}\ (\hat{f}(\xi',x_n),\hat{g}(\xi')) + \varphi_A\ R_{\xi'}\ \hat{f}(\xi',x_n)\}$$

et :

$$\mathcal{R}''(f,g) = F^{-1}\ \{(1-\varphi_A)\ R''_{\xi'}\ (\hat{f}(\xi',x_n),\hat{g}(\xi')) + \varphi_A\ R_{\xi'}\ \hat{f}(\xi',x_n)\}$$

A l'aide des théorèmes 2.4 et 2.5, on montre facilement les propriétés (i) et (ii). ▨

2.2 Etude de $L(x;D)$ sur l'ouvert Ω

On suppose que le recouvrement $\{U_i\ ;\ 0 \leqslant i \leqslant N\}$ de $\overline{\Omega}$ est assez fin de façon que :

- $U_0 \subset \Omega$
- Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, U_i soit difféomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle on ait $x_n < \delta$.

On considère l'espace :

$$H_\Pi(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\ |\ \Phi_0\, u \in H^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \Phi_i\, u \in H_\Pi\ (\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))\}$$

où $\{\Phi_i\ ;\ 0 \leqslant i \leqslant N\}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\ ;\ 0 \leqslant i \leqslant N\}$.

Grâce à cette partition de l'unité, on se ramène, par cartes locales, à utiliser le théorème 2.6. Et l'on obtient le résultat annoncé au théorème 2.1 (on utilise la méthode employée dans [3], § 5 et 6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BOLLEY et J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés à plusieurs variables
A paraître aux Mémoires de la S.M.F.

[2] N. SHIMAKURA : Problèmes aux limites généraux du type elliptic dégénéré.
J. Math. Kyoto Univ., Vol. 9, n° 2, 275-335 (1969).

[3] M.I. VIŠIK et V.V. GRUŠIN : On a class of higher order degenerate elliptic equations. Math. USSR
Sbornik, Vol. 8, n° 1 (1969).

[4] M.I. VIŠIK et V.V. GRUŠIN : Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain
Math. USSR
Sbornik, Vol. 9, n° 4 (1969).