CLAUDE ZUILY

# Hypoellipticité des opérateurs différentiels du 2e ordre à coefficients réels

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 7, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A7_0>

# HYPOELLIPTICITE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS DU 2e ORDRE A COEFFICIENTS REELS

par

Claude ZUILY

On se propose de donner, dans cet exposé, deux conditions nécessaires et une condition suffisante d'hypoellipticité pour des opérateurs différentiels d'ordre deux à coefficients réels. Les démonstrations détaillées des résultats annoncés feront l'objet d'une publication ultérieure.

Fixons tout d'abord quelques notations.

Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $P = P(x; \partial/\partial x)$ l'opérateur différentiel

$$(1) \qquad P = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \qquad x \in \Omega$$

On notera $P^o$ la partie principale de $P$, $Q$ la partie homogène d'ordre 1, de sorte que $P = P^o + Q + C$.

On dira que $P$ est non totalement dégénéré, en abrégé NTO si

$$\forall\, x_o \in \Omega \qquad \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x_o)| + \sum_{i=1}^{n} |b_i(x_o)| \neq 0$$

Pour $j = 1,\dots,n$, on notera $P^{o(j)}$ l'opérateur différentiel de symbole

$$p_j^o(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \; p^o(x,\xi)$$

où $p^o(x,\xi)$ désigne le symbole de $P^o$.

Enfin, Lie $(P^{o(j)}, Q)$ désignera l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $P^{o(1)},\dots, P^{o(n)}, Q$, c'est-à-dire le plus petit $C^\infty$-module contenant ces champs et stable par l'opération crochet :

$$[A,B] = AB - BA.$$

## I. CONDITIONS NECESSAIRES

Théorème I.1 : Soit $P = P^o + Q + C$ un opérateur différentiel d'ordre deux dans $\Omega$ ouvert de $R^n$. Supposons que les coefficients de $P^o$ soient analytiques dans $\Omega$ à valeurs réelles et que ceux de $Q$ ainsi que $C$ soient dans $C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$. Alors si $P$ est hypoelliptique dans $\Omega$ pour tout point $x_o \in \Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_o}$ de $x_o$, une fonction $\phi$ analytique dans $\mathcal{V}_{x_o}$ à valeurs réelles tels que :

$$(I.1) \qquad P(x,D) = \phi(x)\ \mathcal{A}(x,D) + Q(x,D) + C(x) \qquad x \in \mathcal{V}_{x_o}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel de symbole

$$a(x,\xi) = \sum \alpha_{ij}(x)\ \xi_i\ \xi_j \geqq 0 \qquad \forall\ x \in \mathcal{V}_{x_o} \qquad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

$\alpha_{ij}$ analytiques et réels dans $\mathcal{V}_{x_o}$.

La démonstration de ce théorème utilise de façon essentielle le théorème 2.1 de [2] et le lemme 2.1 de [5].

Remarque I.2 : Lorsque $p^o(x,\xi) \geqq 0 \quad \forall\ x \in \Omega \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, on prend $\phi \equiv 1$. L'hypoellipticité de ces opérateurs a été étudiée dans [2], [1] et [6]. Mais comme le montre l'exemple de [3] et comme nous le verrons au paragraphe II, il existe des opérateurs $P$ hypoelliptiques dont le symbole principal $p^o(x,\xi)$ change de signe d'un point $x$ à un autre (tout en étant indépendant de $\xi$).

Théorème II.3 : Soit $P = P^o + Q + C$ donné en (1). Supposons que les coefficients soient analytiques dans $\Omega$ à valeurs réelles et que $P$ soit NTD dans $\Omega$. Alors si $P$ est hypoelliptique dans $\Omega$, Lie $(P^{o(j)},Q)$ est de rang $n$ en tout point de $\Omega$.

Remarque II.4 : Ce théorème a été démontré par M. Derridj dans le cas des opérateurs $P = \sum X_j^2 + X_o + C$ de L. Hormander [2]. Ensuite O.A. Oleinik et E.V. Radkevitch ont généralisé le résultat de Derridj aux opérateurs à forme caractéristique non négative [6] par une méthode analogue. Cette méthode utilise une version due à E.C. Zachmanojlou [8] d'un lemme de Frobenius analytique de T. Nagano.

Une partie de notre démonstration utilise aussi ce lemme ainsi que des idées de [1]. Une autre partie en est différente et utilise un théorème du type Cauchy-Kovalewska, pour des opérateurs dits du type de Fuchs, récemment démontré par M.S. Baouendi et C. Goulaouic dans [0]. L'étude complète de la classe d'opérateurs introduite dans [0], du point de vue de l'hypoellipticité, sera l'objet d'un prochain travail en collaboration avec B. Helffer.

## II. Condition suffisante

Nous donnons dans ce paragraphe, une classe d'opérateurs hypoelliptiques, dont le symbole principal a un signe qui dépend du point x. Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T > 0$. On note $Q = \Omega \times ]-T, T[$ et $(x,t)$ le point générique de $Q$.

Soient $X_1(x; \partial/\partial x), \ldots, X_r(x; \partial/\partial x)$ des champs de vecteurs dans $\Omega$ à coefficients $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose

(H) $\quad$ Lie $(X_1, \ldots, X_r)$ est de rang n dans $\Omega$

On pose

$$A_j(x,t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \alpha_j(x,t) \quad t^{p_j} \quad \{a_j(x) \frac{\partial}{\partial t} + X_j \ (x; \frac{\partial}{\partial x})\}$$

où $\alpha_j \neq 0$ dans $Q$, $\alpha_j \in C^\infty(Q, \mathbb{R})$ ; $a_j \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ ; $p_j \in \mathbb{N}/\{0\}$.

Théorème II.1 : Soit

$$\mathcal{A}(x,t;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) = \sum_{j=1}^{r} A_j^2 + \sum_{j=1}^{r} \beta_j A_j + \gamma, \qquad \beta_j,\ \gamma \in C^\infty(Q,\mathbb{C}).$$

Supposons la condition (H) satisfaite, alors l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + t\,\mathcal{A}(x,t;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) \qquad (x,t) \in Q$$

est hypoelliptique dans Q.

Remarque II.2 : Des résultats analogues à celui du théorème II.1, essentiellement lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x,t\ ;\frac{\partial}{\partial x})$ est uniformément elliptique, se trouvent dans [3], [4], [7].

Donnons pour terminer un exemple d'application du théorème II.1.

Exemple : Soit $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ; l'opérateur

$$L(x,t\ ;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} + (t-a(x))^k \left\{a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}$$

(où $a > 0$, $b \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$) est hypoelliptique si et seulement si $k \neq 1$.

## BIBLIOGRAPHIE

[0] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : Colloque C.N.R.S. sur les E.D.P. : Orsay (1972)

[1] M. DERRIDJ : Ann. Inst. Fourier tome 21, Fas. 4 (1971)

[2] L. HORMANDER : Acta Math 119 (1967)

[3] Y. KANNAI : Israël Journ. of. Math, Vol. 9 n° 3 (1971)

[4] Y. KATO : Proc. Jap. Acad. 47 (1971)

[5] K. NIRENBERG - F. TREVES : Comm. pure and appl. Math Vol. 23 n° 3 (1970)

[6] O.A. OLEINIK - E. V. RADKEVITCH : Russian Math. Surveys Vol. 26 n° 2 (1971)

[7] F. TREVES : C.P.A.M. A paraître

[8] E.C. ZACHMANOGLOU : Arch. Rat. Mech. Anal. 38 (1970)

[9] E.C. ZACHMANOGLOU : A paraître.