PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

B. HELFFER

Sur les équations paraboliques dégénérées

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 2, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES EQUATIONS PARABOLIQUES DEGENEREES

par

B. HELFFER

INTRODUCTION.

On se propose de démontrer par une méthode de construction de Parametrix des résultats d'hypoellipticité pour des opérateurs du type parabolique. On utilise certaines techniques utilisées par F. Trèves [7], T. Matsuzawa [5], Y. Kannai [2], et Y. Kato [4] et on généralise des résultats de [5] et de [4].

I. ENONCE DU THEOREME ET APPLICATIONS.

Soit Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$ (on peut toujours se ramener à ce cas quand on étudie l'hypoellipticité au voisinage d'un point), I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (qu'on supposera dans la suite, égal à $]-1,+1[$), on considère l'opérateur défini dans $\Omega \times I$, par :

(1) $$L = \frac{\partial}{\partial t} - a_{2m}\left(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sum_{j=o}^{2m-1} a_j\left(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

où $a_j(x,t,\xi)$ ($j=o,\ldots,2m$) est un polynôme homogène en $\xi \in \mathbb{R}^n$, d'ordre j à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega \times I})$.

On fait les hypothèses suivantes :

$\boxed{\text{H 1}}$ (cf. [8]). Il existe T_o dans $\overline{I}$, k dans $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$= entiers positifs ou nuls) et une constante C telles que : Pour tout t dans I et tout t' dans I appartenant à l'intervalle, joignant t à T_o, pour tout x dans Ω et tout ξ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

(2) $$\operatorname{Re}\int_{t'}^{t} a_{2m}(x,s,\xi)\, ds \geq C\, |t-t'|^{k+1}\, |\xi|^{2m}$$

$\boxed{\text{H 2}}$ Il existe des constantes θ et τ réelles positives et des constantes $C_{\alpha,\beta,j}$ telles que :

Pour tout t dans I, tout x dans Ω, tout ξ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $|\xi|=1$, on a :

$$(3)\qquad \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\beta \partial \xi^\alpha} a_{2m-j} \right| \leq C_{\alpha,\beta,j} \, |\mathrm{Re}\, a_{2m}|^{1-(|\alpha|+j)\theta - (|\beta|+j)\tau}$$

pour (α,β) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ vérifiant

$$|\alpha| + |\beta| + j > 0$$

$$(|\alpha|+j)\theta + (|\beta|+j)\tau \leq 1$$

$\boxed{\text{H 3}}$ θ et τ doivent vérifier

$$(4)\qquad \frac{2mk}{k+1}(\tau + \theta) < 1$$

Théorème 1. Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), l'opérateur L défini par (1) est hypoelliptique dans $\Omega \times I$.

Donnons trois applications de ce théorème :

Exemple 1. On considère dans $\Omega \times I$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}$) l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t)$$

et on fait les hypothèses suivantes :

(5) $\mathrm{Re}\, a(x,t) \geq 0$ dans $\Omega \times I$

(6) Pour tout x dans Ω, la fonction $t \longrightarrow \mathrm{Re}\, a(x,t)$ a seulement des zéros d'ordre pair inférieur ou égal à 2ℓ dans l'intervalle I.

(7) Pour tout (x,t) dans $\Omega \times I$ $\quad |\mathrm{Im}\, a(x,t)| \leq C\, \mathrm{Re}\, a(x,t)$

(8) Il existe $\varepsilon > 0$, tel que $|\beta| + |\mathrm{Im}\,(\frac{\partial a}{\partial x})| \leq C\, (\mathrm{Re}\, a)^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\frac{1}{4\ell}}$

Alors, L est hypoelliptique dans $\Omega \times I$.

Démonstration : Des hypothèses (5) et (6), on déduit que H1 est vérifiée avec $T_0 = -1$ et $k=2\ell$. On déduit en outre que :

(9) $\quad \left|\mathrm{Re}\ (\frac{\partial a}{\partial x})\right| \leq C\ (\mathrm{Re}\ a)^{1/2}$

(7), (8), et (9) impliquent que (H2) est vérifiée avec

$$\theta = 0,\ \tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\ell} - \varepsilon$$

(H3) est alors vérifiée.

Ce théorème est une très légère amélioration de celui de [5].

Exemple 2 : On considère l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + t\ a(x,t)\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\ \frac{\partial}{\partial x} + c(x,t)$$

et on fait les hypothèses suivantes :

(5)' = (5) $\qquad$ (6)' = (6) $\qquad$ (7)' = (7)

(8)' $\quad |b| + \left|\mathrm{Im}\ (t\ \frac{\partial a}{\partial x})\right| \leq C\ |t\ \mathrm{Re}\ a|^{1/2}$

Alors, L est hypoelliptique dans $\Omega \times I$.

Démonstration : Utilisant les remarques faites dans la démonstration du corollaire 1, on vérifie que les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites avec :

$$\theta = 0 \quad \tau = \frac{1}{2}\ ,\ \underline{T}_0 = 0\ ,\quad k = 2\ell + 1$$

Exemple 3 : Donnons deux exemples pour des opérateurs d'ordre plus élevé :

$$\frac{\partial}{\partial t} + (t^2 + x^4)\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \text{ est hypoelliptique dans } \Omega \times I$$

tandis que $\frac{\partial}{\partial t} + (t+x)^2\ \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ ne l'est pas.

Avant de démontrer le théorème, nous ferons trois remarques :

Remarque 1. Soit ${}^tL$ l'opérateur transposé de L. Alors :

$$P(t,x,D_x,D_t) \equiv -{}^tL = \frac{\partial}{\partial t} + a_{2m}\ (x,t,\ \frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}) + \sum_{j=1}^{2m} b_{2m-j}\ (x,t,\ \frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}\ )$$

et les b_j ($j=0,\dots,2m$) vérifient (H2) (on a posé $b_{2m} = a_{2m}$)

Remarque 2. Soit $\hat{L}$ le transformé de L par le difféomorphisme $(x,t) \longrightarrow (x,-t)$. Alors $-\hat{L}$ vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H3).

Remarque 3. De la remarque 2, on déduit que l'on peut, quitte à restreindre Ω et I, se ramener au cas $T_0=-1$ ou $T_0=0$, si l'on veut montrer l'hypoellipticité de L au voisinage du point (x,o) $(x \in \Omega)$. Nous traiterons dans la suite le cas $T_0 = 0$.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME DANS LE CAS $T_0 = 0$.

Elle se fera en plusieurs étapes.

1ère étape.

Proposition 1. (cf. [2], [4]). Soit $M = \frac{\partial}{\partial t} + \rho(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$, où $\rho(x,t,\xi)$ est un polynôme en ξ à coefficients dans $C^\infty(\Omega \times]-1,+1[)$, un opérateur possédant la propriété suivante :

Si $U \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1,1[)$, $MU \in C^\infty(\Omega \times]-1,1[) \Longrightarrow U \in C^\infty(\Omega \times [0,1[) \cap C^\infty(\Omega \times]-1,0])$

Alors, $MU \in C^\infty(\Omega \times]-1,1[) \Longrightarrow U \in C^\infty(\Omega \times]-1,1[)$

Idée de la démonstration.

On va montrer que $U(+0,x) = U(-0,x)$

Soit $\tilde{U}$ la distribution définie par

$$< \tilde{U},\varphi > = (\int_0^1 \int_r + \int_{-1}^0 \int_r) \, U(t,x) \; \varphi(t,x) \, dt \, dx$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times]-1,1[)$

Posons $v = \tilde{u} - u$

Pour tout compact K dans Ω, il existe N(K), tel que

(10) $$v(x,t) = \sum_{j=o}^{N} v_j(x) \otimes \delta_t^{(j)} \quad \text{pour } x \text{ dans } K$$

Par ailleurs :

(11) $\quad M\,\tilde{U} = M\,U + \delta_t \otimes (U(+0,x) - U(-0,x))$

On déduit de (10) et (11) que $v_j(x) \equiv 0$ pour $j=0,\dots,N$ et donc que $U(+0,x) = U(-0,x)$.

On démontre de proche en proche que les dérivées par rapport à t et x se recollent pour $t = 0$.

En vertu de la remarque 2 et de la proposition 1, il suffira de montrer dans notre cas que la propriété suivante est vérifiée :

P 1	$U \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1,1[),\ LU \in C^\infty(\Omega \times]-1,1[) \Longrightarrow U \in C^\infty(\Omega \times [0,1[)$

La 1ère étape nous a permis de montrer que sous les hypothèses du théorème, la propriété P 1 entraîne que L est hypoelliptique.

2ème étape :

On montre maintenant comment la propriété P 1 se déduit de la construction d'une suite de Parametrix pour le transposé de L.

Considérons : $P = -{}^tL = \dfrac{\partial}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=o}^{2m} b_{2m-j}\left(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$

Posons : $\quad \mathcal{U} = \{\Omega \times \mathbb{R}^n_y \times]-1,1[\times [0,1[$

$\quad W = \mathcal{U} - \{(x,y,t,t') \in \mathcal{U},\ (x,t) = (y,t)\}$

$\quad \Sigma = \{(t,t') \in I \times [0,1[\ ,\ t' < t\}$

On considère la propriété suivante pour l'opérateur P :

$\boxed{\text{P 2}}$ On peut construire deux suites de distributions sur $\mathcal{U}$, $K_j(x,y,t,t')$ et $F_j(x,y,t,t')$ telles que

$$(12) \qquad \begin{aligned} F_j(x,y,t,t') &= 0 \\ K_j(x,y,t,t') &= 0 \end{aligned} \qquad \forall\, j \geq 0 \quad (x,y,t,t') \in \mathcal{U}, \quad t < t'$$

(13) $\quad P_{x,t}\,(\sum_{j=o} K_j(x,y,t,t')) = \delta(x-y,\ t-t') + F_\mu(x,y,t,t')$ pour $\mu = 0,1\ldots$

(14) $\quad K_j \in C^\infty(W)$

(15) $\quad$ Pour $\varphi(y,t') \in C_o^\infty(\mathbb{R}_y^n \times]0,1[)$

$$< K_j\ ,\ \varphi >_{y,t'} \in C^\infty(]-1,1[\times \Omega)$$

(16) $\quad$ Pour $\psi(x,t) \in C_o^\infty(]-1,1[\times \Omega)$

$$< K_j(x,y,t,t'),\ \psi(x,t) >_{x,t} \in C^\infty([0,1[\times \Omega)$$

(17) $\quad \forall\ N > 0\ ,\ \exists\, M$ tel que

$$F_\mu\ (x,y,t,t') \in C^N(U) \quad \text{pour } \mu \geq M$$

On démontre assez facilement la proposition suivante, cf. [6], [4].

Proposition 2. Si l'opérateur $-{}^tL$ vérifie la propriété P2, alors L vérifie la propriété P1.

3ème étape : Construction formelle des suites K_j et F_j

Les K_j et F_j seront des noyaux-distributions associés à des opérateurs du type suivant :

$$[Kv]\ (x,t) = \int_o^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} K(x,\xi,t,t')\ \hat{v}(\xi,t')\ d\xi\ dt'$$

pour $v \in C_o^\infty(\Omega \times]0,1[)$ et $(x,t) \in \Omega \times]-1,1[$

Le noyau associé à K est alors défini par :

$$K(x,y,t,t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} K(x,\xi,t,t')\ d\xi$$

Rappelons qu'on cherche une parametrix à droite de l'opérateur $P = -{}^tL$. On cherche donc K tel que $P[Kv] = v$.

Par un calcul formel, nous avons :

$$P\,Kv = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} K(x,\xi,t,t)\,\hat{v}(\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=o}^{2m} b_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \xi)\right] (K(x,\xi,t,t')\,\hat{v}(\xi,t'))\,d\xi\,dt'$$

de sorte qu'on doit résoudre :

$$(18)\quad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=o}^{2m} b_j(x,t,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \xi))\,K(x,\xi,t,t') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Sigma \\ K(x,\xi,t,t')_{t=t'} = 1 \qquad t \geq 0 \\ K(x,\xi,t,t') = 0 \qquad \text{pour } t < t' \;;\; t' \geq 0 \quad (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \end{cases}$$

On va trouver K de manière approchée en procédant ainsi ; on résoud d'abord :

$$(19)\quad \begin{cases} L_1 K_o = (\frac{\partial}{\partial t} + b_{2m}(x,t,\xi))\,K_o(x,\xi,t,t') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Sigma \\ K_o(x,\xi,t,t')_{t=t'=1} \qquad t \geq 0 \\ K_o(x,\xi,t,t') = 0 \qquad \text{pour } t < t',\ (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \end{cases}$$

On pose :

$$L_2 = \sum_{j=o}^{2m} \sum_{\substack{\alpha \\ o<|\alpha|+j\leq 2m}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha b_{2m-j}}{\partial \xi^\alpha} \cdot D^\alpha_x$$

et on résoud par récurrence

$$(20)\quad \begin{cases} L_1 K_{j+1} = -L_2 K_j \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Sigma \\ K_{j+1}(x,\xi,t,t')_{t=t'} = 0 \qquad t \geq 0 \\ K_{j+1}(x,\xi,t,t') = 0 \qquad \text{pour } t' > t,\ t' \geq 0 \end{cases}$$

On vérifie alors formellement que

$$P\left[(K_o + K_1 + \ldots + K_j)v\right](x,t) = v(x,t) + \int_0^{+t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} L_2 K_j\,\hat{v}(\xi,t')\,d\xi\,dt'$$

On pose $F_j(x,\xi,t,t') = L_2 K_j(x,\xi,t,t')$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times]-1,1[\times [0,1[$, $[F_j]$ l'opérateur associé et on note $F_j(x,y,t,t')$ le noyau-distribution associé à l'opérateur.

On a ainsi construit formellement les suites K_j et F_j ; il reste à montrer que la propriété P2 est vérifiée.

<u>4ème étape</u> : Estimations sur les symboles $K_j(x,\xi,t,t')$, $F_j(x,\xi,t,t')$

Les expressions
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} K_j(x,\xi,t,t')\, d\xi$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} F_j(x,\xi,t,t')\, d\xi$$

doivent être considérées comme des intégrales oscillantes [1], de sorte que les propriétés de régularité que nous devrons vérifier se déduiront de majorations sur les symboles $K_j(x,\xi,t,t')$ et $F_j(x,\xi,t,t')$ dépendant des paramètres t et t', et sur les dérivées en (x,ξ,t,t') de ces symboles.

Précisons d'abord quelques notations :

(a) $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi)$ désigne la classe des symboles d'Hörmander [1] d'ordre m.

(b) $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi) = \bigcap_m S^m_{\rho,\delta}$

(c) Si Λ est un domaine de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{t'}$, on désigne par $\varepsilon^0(\Lambda, S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi))$ l'ensemble de tous les $K(x,\xi,t,t')$ tels que $K(x,\xi,t,t') \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi)$ et est continu par rapport à (t,t').

(d) $\varepsilon^p(\Lambda, S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi))$ désigne l'ensemble des $K(x,\xi,t,t')$ qui sont dans $\varepsilon^0(\Lambda, S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi))$ ainsi que leurs dérivées par rapport à t,t' jusqu'à l'ordre p.

(e) $\varepsilon(\Lambda, S^m_{\rho,\delta}) = \bigcap_{p \geq 0} \varepsilon^p(\Lambda, S^m_{\rho,\delta})$

On peut alors énoncer la proposition suivante :

<u>Proposition 3</u>. Il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$K_j(x,\xi,t,t') \in \varepsilon(\Sigma, S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi)) \cap \bigcap_{p \geq 0} \varepsilon^p\,(\bar{\Sigma},\ S^{\varepsilon+2mp-\eta j}_{\rho,\delta})$$

pour $j=0,1,\ldots$

avec $\rho = 1 - \frac{2m\ k\ \theta}{k+1}$ $\quad\delta = \frac{2m\ k\ \tau}{k+1}$

(21) $$\left|D^p_{t,t'}\ D^\beta_x\ D^\alpha_\xi\ K_o\ (1+|\xi|)^{-\delta|\beta|-2mp+\rho|\alpha|-\varepsilon}\right| \underset{t \to t'}{\longrightarrow} 0 \text{ (uniformément lorsque } t \to t')$$

pour $2m\ p < |\alpha|$

(22) $$\left|D^p_{t,t'}\ D^\beta_x\ D^\alpha_\xi\ K_j\ (1+|\xi|)^{-\delta|\beta|-2mp+\rho|\alpha|+\eta\ j-\varepsilon}\right| \underset{t \to t'}{\longrightarrow} 0$$

pour $0 \leq p < j$

Des propriétés de $K_j(x,\xi,t,t')$, on déduit des propriétés analogues pour $F_j(x,\xi,t,t')$. On peut montrer que la proposition 3 implique que la propriété (P2) est vérifiée. Les propriétés (21) et (22) permettent de montrer que $K_j(x,y,t,t')$ qui est nul pour $t' > t$, et défini par (20) pour $t' < t$, est C^∞ pour $t=t'$ lorsque $x \neq y$.

<u>Idée de la démonstration.</u>

K_o est donné par :

$$K_o(x,\xi,t,t') = \begin{cases} \exp\left(-\int_{t'}^{t} b_{2m}(x,s,\xi)ds\right) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \bar{\Sigma} \\ 0 & \text{pour } t' > t \end{cases}$$

De l'hypothèse (H1), on déduit que $|K_o| \leq C\ e^{-c|t-t'|^{k+1}|\xi|^{2m}}$ et il est alors facile de vérifier que $K_o(x,\xi,t,t') \in \varepsilon(\Sigma,\ S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi))$.

Lorsque $t \geq t'$, on a seulement $|K_o| \leq 1$. On va estimer $\frac{\partial K}{\partial x}$ pour montrer les techniques utilisées pour démontrer la proposition 3.

$$\left|\frac{\partial K_o}{\partial x}\right| \leq \left(\int_{t'}^{t} \left|\frac{\partial b_{2m}}{\partial x}\right| ds\right) e^{-\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\ b_{2m}\, ds}$$

$$\leq C \int_{t'}^{t} |\mathrm{Re}\ b_{2m}|^{1-\tau} ds.\ |\xi|^{2m\tau}\ e^{\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\ b_{2m}\, ds} \quad \text{grâce à (H2)}$$

$$\leq C(t-t')^\tau\ |\xi|^{2m\tau}\ \left(\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\ b_{2m}\, ds\right) e^{-\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\ b_{2m}\, ds} \quad \text{grâce à Hölder}$$

$$\leq C\,(\xi^{2m}(t-t')^{k+1})^{\frac{\tau}{k+1}} \cdot |\xi|^{2m\tau\frac{k}{k+1}} \left(\int_t^{t'} (\mathrm{Re}\, b_{2m})\, ds\right) e^{-\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\, b_{2m}\, ds}$$

$$\leq C\,|\xi|^{2m\tau\frac{k}{k+1}} \left(\int_t^{t'} \mathrm{Re}\, b_{2m}\, ds\right)^{1+\frac{\tau}{k+1}} e^{-\int_{t'}^{t} \mathrm{Re}\, b_{2m}\, ds} \qquad \text{grâce à H1}$$

$$\leq C|\xi|^{2m\tau\frac{k}{k+1}}$$

Des calculs analogues pour les dérivées en x et ξ permettent de montrer que $\delta = 2m\tau\frac{k}{k+1}$ et que $\rho = 1-2m\,\theta\frac{k}{k+1}$. On obtient les majorations pour K_j par récurrence sur j en utilisant l'expression K_{j+1} en fonction de K_j.

Notons que l'hypothèse (H3) n'est utilisée que pour démontrer que $F_j(x,y,t,t')$ vérifie (17), elle correspond à l'hypothèse courante sur les symboles $S^m_{\ell,\delta}$: $\delta < \rho$.

Pour les autres propriétés, on utilise seulement $1 > \delta \geq 0$ et $\rho > 0$.

Il semble que l'hypothèse (H3) est trop restrictive, car elle es exclut des opérateurs dont on sait qu'il sont hypoelliptiques, par exemple (cf. L. Hörmander [O]) :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (x+y+t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (y+t)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

BIBLIOGRAPHIE

[0] L. HÖRMANDER : Acta Math. 119 (1967)

[1] L. HÖRMANDER : Fourier Integral Operators I. Acta Mathematica 127 (1971), p. 79-183.

[2] Y. KANNAI : An Unsolvable hypoelliptic operator. Israël Journal of Math. 9, p. 306-315 (1971).

[3] Y. KATO : The hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators. Journal of Functional Analysis 7, p. 116-131 (1971)

[4] Y. KATO : Remarks on hypoellipticity of Degenerate Parabolic Differential Operators. Proc. of Japan Academy, Vol. 47, n° 85 (1971).

[5] T. MATSUZAWA : Degenerate Parabolic equations (à paraître dans Nagaya Math. Journal).

[6] L. SCHWARTZ : Théorie des distributions. Hermann 1966 - p. 138-139.

[7] F. TREVES : A new Method of Proof of the subelliptic estimates. Comm. on pure and Applied Mathematics, Vol. XXIV, p. 71-115 (1971).

[8] F. TREVES : Concatenations of second order evolution equations applied to local Solvability and hypoellipticity (à paraître)