J. C. TOUGERON

Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 1
« Séminaires d'analyse », , exp. n° 2, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___1_A2_0>

COURBES ANALYTIQUES SUR UN GERME D'ESPACE ANALYTIQUE ET APPLICATIONS

par

J.C. TOUGERON

Si X désigne le germe en 0 (supposé non vide ; réduit ou non) d'une sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^N$, on note $\mathcal{A}_X$ l'anneau des germes de fonctions algébriques sur X ; $\mathcal{O}_X$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X ; $\hat{\mathcal{O}}_X$ le complété de $\mathcal{A}_X$ pour la topologie $\underline{m}_X$-adique, $\underline{m}_X$ désignant l'idéal maximal de $\mathcal{A}_X$; $\tilde{\underline{m}}_X$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_X$; $\hat{\underline{m}}_X$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}_X$. Les anneaux $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{O}_X$, $\hat{\mathcal{O}}_X$ seront toujours munis de leurs topologies : $\underline{m}_X$- adique, $\tilde{\underline{m}}_X$- adique, $\hat{\underline{m}}_X$-adique, respectivement. Si Y est un second germe de variété algébrique et si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme algébrique, on note $f^* : \mathcal{A}_Y \longrightarrow \mathcal{A}_X$; $\tilde{f}^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$; $\hat{f}^* : \hat{\mathcal{O}}_Y \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_X$, les homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres déduits de f. Cela posé, considérons les deux conjectures suivantes :

(A) L'application induite par $f^* : \mathcal{A}_Y \longrightarrow f^*(\mathcal{A}_Y)$ est ouverte.

(B) $\tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$ est fermé dans $\mathcal{O}_X$.

La condition (A) signifie qu'il existe une application $\mathbb{N} \ni q \longrightarrow e(q) \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout q :

$$f^*(\underline{m}_Y^q) \supset \underline{m}_X^{e(q)} \cap f^*(\mathcal{A}_Y).$$

Visiblement, si (A) est satisfaite, les applications $\tilde{f}^*$ et $\hat{f}^*$ sont aussi ouvertes ; en outre : $\ker \tilde{f}^* = \ker f^*. \mathcal{O}_Y$; $\ker \hat{f}^* = \ker f^*. \hat{\mathcal{O}}_Y$. S'il en est ainsi, $\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y)$ est complet, donc fermé dans $\hat{\mathcal{O}}_X$; il en résulte que l'adhérence de $\tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$ dans $\mathcal{O}_X$ est égale à $\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y) \cap \mathcal{O}_X$. Si la condition (A) est vérifiée, la condition (B) est donc équivalente à la suivante :

(B') $\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y) \cap \mathcal{O}_X = \tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$.

Nous démontrons (A) lorsque le germe X est réduit ; nous démontrons (B) sous des hypothèses encore plus restrictives (par exemple, si Y', germe de variété algébrique associé à l'idéal ker f^* de $\mathcal{A}_Y$, est régulier). En fait, si la conjecture (1.9) est vraie (cela paraît raisonnable ; voir fin du paragraphe 1), (B) et donc (B') sont vrais, lorsque X est réduit.

Signalons enfin que les résultats précédents sont faux en géométrie analytique. On sait en effet (voir [3]) qu'il existe des germes d'applications analytiques $f : (\mathbb{C}^n,o) \longrightarrow (\mathbb{C}^p,o)$ telles que $\ker f^* = o$ et $\ker \hat{f}^* \neq o$.

La démonstration utilise quelques résultats simples concernant les courbes analytiques sur un germe d'espace analytique.

1. COURBES ANALYTIQUES SUR UN GERME D'ESPACE ANALYTIQUE.

Soit $\mathcal{P}_{n,q}$ de sous-espace de $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ formé des polynômes de degré $\leq q$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme $\|x\| = \sup\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, on pose, si $P \in \mathcal{P}_{n,q}$ et A est un sous-ensemble de la boule $B(o,\frac{1}{2})$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\|P\| = \sup_{\|x\|\leq\frac{1}{2}} |P(x)|$$

$$\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|$$

Lemme 1.1.

Il existe une constante $C_n > o$, *indépendante de* q, *telle que pour tout* $P \in \mathcal{P}_{n,q}$ *et tout sous-ensemble* A *de* $B(o,\frac{1}{2})$, ***la mesure de Lebesgue de*** $\bar{A}$ ***étant supposée non nulle :***

$$\|P\| \leq \frac{C_n{}^q}{(\text{mes } \bar{A})^{nq}} \cdot \|P\|_A$$

Preuve : On peut supposer A fermé. Procédons par récurrence sur n. Si n=1, il existe des points $x_o < x_1 < \ldots < x_q$ appartenant à $A \subset [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, tels que, $\forall$ i,

$|x_i - x_{i+1}| \geq \dfrac{\text{mes } A}{q}$. On a l'identité :

$$P(x) = \sum_{i=o}^{q} P(x_i) \prod_{j\neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \text{, d'où :}$$

$$\|P\| \leq \|P\|_A \; \frac{(q)^q}{(\text{mes } A)^q} \sum_{i=o}^{q} \frac{1}{i!\; q-i!} = \frac{\|P\|_A}{(\text{mes } A)^q} \; \frac{(2q)^q}{q\;!} \leq \frac{(2e)^q}{(\text{mes } A)^q} \|P\|_A \;.$$

Supposons le résultat démontré jusqu'à l'ordre n-1 et démontrons le pour n. Pour tout $x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, soit A_{x_1} l'ensemble des points de A dont la première coordonnée est x_1. A_{x_1} étant muni de sa mesure (n-1)-dimensionnelle, l'ensemble $B = \{x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \; ; \text{ mes } A_{x_1} \geq \frac{\text{mes } A}{2}\}$ a une mesure $\geq \frac{\text{mes } A}{2}$ (car sinon, on aurait d'après Fubini : $\text{mes } A = \int_B \text{mes } A_{x_1}\, dx_1 + \int_{\complement B} \text{mes } A_{x_1}\, dx_1 < \frac{\text{mes } A}{2} + \frac{\text{mes } A}{2}$). Posons $P_{x_1} = P(x_1,.) \in \mathcal{P}_{n-1,q}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, si $x_1 \in B$:

$$\|P_{x_1}\| \leq \frac{(2^{n-1}\, C_{n-1})^{\,q}}{(\text{mes } A)^{(n-1)q}} \cdot \|P\|_A$$

Puisque $\text{mes } B \geq \frac{\text{mes } A}{2}$, en appliquant le cas n=1 :

$$\|P\| \leq \frac{(4e)^{\,q}}{(\text{mes } A)^q} \cdot \frac{(2^{n-1}\, C_{n-1})^q}{(\text{mes } A)^{(n-1)q}} \|P\|_A \quad \text{, c.q.f.d.} /$$

Soient $\mathbb{R}\,[[x_1,\dots,x_n]] = \mathcal{F}_n^{\mathbb{R}}$ l'anneau des séries formelles ; $\mathbb{R}\,\{x_1,\dots,x_n\} = \mathcal{O}_n^{\mathbb{R}}$ l'anneau des séries convergentes. Identifions l'espace projectif $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ à l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^n$ issues de l'origine.

<u>Proposition 1.2.</u>

Soit $\varphi \in \mathcal{F}_n^{\mathbb{R}}$ *et soit* A *un sous-ensemble mesurable et de mesure non nulle de* $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

(1) Si φ *est analytique sur toute droite appartenant à* A, *i.e.* $\varphi(a_1t,\dots,a_nt) \in \mathbb{R}\{t\}$ *pour tout* $\bar{a} = (\overline{a_1,\dots,a_n}) \in A$, *alors* $\varphi \in \mathcal{O}_n^{\mathbb{R}}$.

(2) Si φ *est* μ*-plate sur toute droite appartenant à* A, *alors* φ *est* μ*-plate.*

<u>Preuve</u> : (1) Posons $\varphi = \sum_{q=o}^{\infty} \varphi_q$, où φ_q désigne la forme homogène de degré q de φ. Par hypothèse, la fonction $f(\bar{a}) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sqrt[q]{\left|\varphi_q\left(\frac{a}{\|a\|}\right)\right|}$ prend des valeurs finies sur A.

Il en résulte qu'il existe un sous-ensemble A' de A mesurable et de mesure non nulle et un $\rho > o$, tels que l'on ait uniformément sur A', $f(\overline{a}) \leq 2\rho$. Soit A" l'ensemble de mesure n-dimensionnelle non nulle, intersection du cône de A' avec la boule $B(o,\frac{1}{2})$; on a : $\|\varphi_q\|_{A''} \leq \rho^q$. D'après 1.1 :

$$\|\varphi_q\| \leq \left(\frac{C_n \cdot \rho}{(\text{mes } \overline{A}'')^n}\right)^q .$$

D'après une inégalité classique (cf. [2], page 12, l'inégalité (10) est encore valable pour plusieurs variables), si $\varphi_q(x) = \sum_{|\omega|=q} a_\omega x^\omega$:

$$|a_\omega| \leq \frac{(2q)^q}{q\,!} \|\varphi_q\| \leq (2e)^q \|\varphi_q\|$$

La série φ est donc convergente.

(2) La preuve de (2) est immédiate et laissée au lecteur. /

Bien entendu, le résultat précédent est vrai a fortiori dans le cas complexe. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.3.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}_n = \mathbb{C}\,[[z_1,\ldots,z_n]]$ *et soit* A *un sous-ensemble mesurable, et de mesure non nulle de* $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$.

1) Si φ *est analytique sur toute droite appartenant à* A, *i.e.* $\varphi(a_1t,\ldots, a_nt) \in \mathbb{C}\{t\}$ *pour tout* $\overline{a} = (\overline{a_1,\ldots,a_n}) \in A$, *alors* :
$\varphi \in \mathcal{O}_n = \mathbb{C}\,\{z_1,\ldots,z_n\}$.

2) Si φ *est* μ*-plate sur toute droite appartenant à* A, *alors* φ *est* μ*-plate.*

Soit $\xi(t) = (\xi_1(t),\ldots, \xi_n(t)) \in \mathbb{C}\,\{t\}^n$, $\xi(o) = o$, un germe de courbe analytique à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Désignons par $\mathcal{C}_\nu(\xi)$ l'ensemble des courbes $\xi'(t)$ telles que $\xi(t) - \xi'(t)$ soit ν-plate à l'origine. On a le résultat suivant :

Lemme 1.4.

Avec les notations précédentes :

1) Si $\varphi \in \mathcal{F}_n$ *est analytique sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu(\xi)$, *alors* φ *est analytique.*

2) Il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ *telle que si* $\varphi \in \mathcal{F}'_n$ $e(\mu)$*-plate sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu(\xi)$, φ *est* μ*-plate.*

Preuve : On peut supposer que ξ est égale à son jet d'ordre ν à l'origine. Si $\xi = o$, la proposition résulte immédiatement de 1.3. Si $\xi \neq o$, on peut, par un changement linéaire de coordonnées, supposer que $\xi_i \neq o$, pour $i=1,\ldots,n$. Considérons alors le germe d'application analytique f :

$$(z_1,\ldots,z_n) \longmapsto (\xi_1\ (z_1^{\nu+1} + z_n),\ldots,\ \xi_{n-1}(z_{n-1}^{\nu+1} + z_n),\ \xi_n(z_n))$$

Visiblement, si η est le germe de droite $t \longmapsto (a_1 t,\ldots,a_{n-1}t,\ t)$, $f \circ \eta$ appartient à $\mathcal{C}_\nu(\xi)$.

(1) Si φ est analytique sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu(\xi)$, $\varphi \circ f$ est analytique sur chaque droite η et, d'après 1.3. 1), $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_n$. Le morphisme f étant visiblement plat et fini, $\varphi \in \mathcal{O}_n$ (on rappelle que $\mathcal{F}'_n$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_n$, donc que $\mathcal{F}'_n / \mathcal{O}_n$ est plat sur $\mathcal{O}_n$).

(2) Le morphisme f étant plat et fini, il existe, d'après le théorème d'Artin-Rees, une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que l'hypothèse $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$ - plate entraîne que φ est μ-plate. Si φ est $e(\mu)$-plate sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu(\xi)$, $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$-plate sur chaque droite η ; d'après 1.3. 2), $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$-plate, d'où le résultat. /

1.5.

On se propose d'étendre le résultat précédent, le germe régulier $(\mathbb{C}^n, o)$ étant remplacé par un germe irréductible d'espace analytique X. Soient $\mathcal{O}_X$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X ; $\hat{\mathcal{O}}_X$ son complété pour la topologie $\underline{m}_X$-adique ($\underline{m}_X$: idéal maximal de $\mathcal{O}_X$). Soit n la dimension de $\mathcal{O}_X$.

On peut réaliser X comme germe d'espace analytique à l'origine de $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{N-n}$, les conditions suivantes étant satisfaites (cf. [4], page 49) :

(1.5.1) Si Π désigne la projection $X \longrightarrow (\mathbb{C}^n, o)$, l'homomorphisme Π^* : $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \longrightarrow \mathcal{O}_X = \frac{\mathcal{O}_N}{\mathfrak{P}}$ est injectif et fini.

(1.5.2) Si p est la dimension du corps des fractions de $\mathcal{O}_X$ sur le corps des fonctions de $\mathcal{O}_n$, le polynôme minimal de $\bar{z}_{n+1}$ est un polynôme distingué : $P(Z) = Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i Z^{p-i}$, à coefficients $a_i \in \mathcal{O}_n$ (donc $z_{n+1}^p + \sum_{i=1}^{p} a_i z_{n+1}^{p-i} \in \mathfrak{P}$)

(1.5.3) Si Δ est le discriminant de ce polynôme, $\Delta \neq o$, et :

$$\Delta \cdot \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_n + \mathcal{O}_n \cdot \bar{z}_{n+1} + \ldots + \mathcal{O}_n \cdot \bar{z}_{n+1}^{\,p-1}$$

En particulier, $\Delta . \bar{z}_{n+j} = \sum_{i=o}^{p-1} a_{ij} \bar{z}_{n+1}^{i}$, pour $j=2,\ldots,N-n$, les $a_{ij} \in \mathcal{O}_n$.

Enfin, le complété $\hat{\mathcal{O}}_X$ de $\mathcal{O}_X$ est intègre ; les résultats précédents subsistent en remplaçant $\mathcal{O}_X$ par $\hat{\mathcal{O}}_X$, $\mathcal{O}_n$ par $\mathcal{F}_n$; en particulier $\hat{\mathcal{O}}_X$ est de type fini sur $\mathcal{F}_n$ et :

$$\Delta . \hat{\mathcal{O}}_X \subset \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_n \cdot \bar{z}_{n+1} + \ldots + \mathcal{F}_n \cdot \bar{z}_{n+1}^{\,p-1}.$$

Soit $\eta(t)$ un germe de courbe analytique à l'origine de $\mathbb{C}^n$, tel que $\Delta(\eta(t)) \neq o$. D'après ce qui précède et le théorème de Puiseux (voir [4], lemme 8.1, chap. III), la courbe $\eta(t)$ se relève en des courbes dans X, analytiques en $t^{1/p!}$: $\xi^1(t), \ldots, \xi^p(t)$ (donc $\Pi \circ \xi^i(t) = \eta(t)$). Si l'on pose $\xi^i(t) = (\xi_1^i(t), \ldots, \xi_N^i(t))$, les $\xi_{n+1}^1(t), \ldots, \xi_{n+1}^p(t)$ sont les zéros du polynôme $Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i(\eta(t)) Z^{p-i}$, et donc vérifient l'identité :

$$\prod_{i<j} (\xi_{n+1}^i(t) - \xi_{n+1}^j(t))^2 = \Delta(\eta(t)).$$

Considérons une courbe analytique $\xi(t)$ dans X. Si λ et ν sont des entiers ≥ 1, désignons par $\mathcal{C}_\nu^\lambda(\xi)$ l'ensemble des courbes $\xi'(t)$ dans X analytiques en $t^{1/\lambda}$ telles que $\xi'(t) - \xi(t)$ soit ν-plate à l'origine (cela signifie que $\xi'(t^\lambda) - \xi(t^\lambda)$ est $\lambda\nu$-plate à l'origine, i.e. les tronqués à l'ordre $\lambda\nu$ des germes d'applications analytiques $\xi'(t^\lambda)$ et $\xi(t^\lambda)$: $(\mathbb{C}, o) \longrightarrow X$ sont égaux).

La démonstration du résultat principal nécessite deux lemmes préliminaires.

Lemme 1.6.

Soit $\xi(t)$ *une courbe analytique dans* X *; posons* $\eta = \Pi \circ \xi$. *Si* $\Delta(\eta(t)) \neq 0$, *à tout entier* $\nu \geq 1$, *on peut associer un entier* $\nu_0 \geq 1$, *tel que :*

$$\Pi \ \mathcal{C}_{\nu}^{p!}(\xi) \supset \mathcal{C}_{\nu_0}(\eta)$$

i.e. chaque courbe de $\mathcal{C}_{\nu_0}(\eta)$ *se relève en une courbe de* $\mathcal{C}_{\nu}^{p!}(\xi)$.

Preuve : Posons $\Delta(\eta(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \alpha_2 t^{\nu_1+1} + \dots$, avec $\alpha_1 \neq 0$. On sait que $\xi_{n+1}(t)$ est l'une des racines du polynôme distingué : $Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i(\eta(t)) Z^{p-i}$. Il existe donc un entier $\nu_0 \geq \nu + \nu_1$ vérifiant la condition suivante : si $\eta'(t) \in \mathcal{C}_{\nu_0}(\eta)$, il existe $\xi'_{n+1}(t)$ racine du polynôme $Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i(\eta'(t)) Z^{p-i}$ telle que $\xi_{n+1}(t) - \xi'_{n+1}(t)$ soit $\nu+\nu_1$ -plate à l'origine. Soit $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_N)$ la courbe de X relevant $\eta'(t)$ et correspondant à cette racine. D'après 1.5. 3), pour $j=2,\dots,N-n$, on a :

$$\Delta(\eta(t)) \cdot \xi_{n+j}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta(t)) \ \xi_{n+1}(t)^i$$

$$\Delta(\eta'(t)) \cdot \xi'_{n+j}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta'(t)) \ \xi'_{n+1}(t)^i$$

Or, $\Delta(\eta(t)) - \Delta(\eta'(t))$, de même que la différence des seconds membres des égalités précédentes, sont $\nu + \nu_1$ -plates à l'origine. Puisque $\Delta(\eta(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \dots$, $\Delta(\eta'(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \dots$, la différence $\xi_{n+j}(t) - \xi'_{n+j}(t)$ est ν-plate à l'origine. Ainsi, la courbe $\xi'(t)$ appartient à $\mathcal{C}_{\nu}^{p!}(\xi)$, c.q.f.d. /

Lemme 1.7.

Il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e'(\mu) \in \mathbb{N}$ *vérifiant la propriété suivante : si deux éléments* $f \in \mathcal{O}_X$, $g \in \mathcal{O}_X$ *sont tels que* $f.g$ *soit* $e'(\mu)$*-plate à l'origine, alors* f *(ou* g*) est* μ*-plate à l'origine.*

Preuve : Posons $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_N / \mathfrak{P}$, et soit $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{P}$. Considérons l'équation implicite :

$$y_1 \cdot y_2 = \sum_{j=1}^{q} y_{j+2} \cdot \varphi_j(z)$$

On sait (voir [1]) qu'il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e'(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que toute solution formelle $\bar{y}(z)$ de cette équation, modulo $\underline{m}^{e'(\mu)+1}$ ($\underline{m}$: idéal maximal de $\mathcal{O}_N$) puisse être approchée à l'ordre μ par une solution analytique. En conséquence, si f.g est $e'(\mu)$-plate à l'origine, il existe $f' \in \mathcal{O}_X$, $g' \in \mathcal{O}_X$, tels que $f'.g' = o$, et $f-f'$, $g-g'$ sont μ-plates à l'origine. Si par exemple, $f'=o$, on en déduit que f est μ-plate à l'origine, c.q.f.d. /

Proposition 1.8.

Soit $\xi(t)$ *une courbe analytique dans* X *; posons* $\eta = \Pi \circ \xi$ *et supposons que* $\Delta(\eta(t)) \neq o$. *Il existe une application* $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ *telle que, si* $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ *est* $e(\mu)$*-plate sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu^{p!}(\xi)$, *alors* φ *est* μ*-plate.*

Preuve : D'après 1.6, $\Pi\,\mathcal{C}_\nu^{p!}(\xi) \supset \mathcal{C}_{\nu_o}(\eta)$. D'après 1.4.2, il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e''(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que, si $\psi \in \mathcal{F}_n$ est $e''(\mu)$-plate sur chaque courbe $\eta'(t) \in \mathcal{C}_{\nu_o}(\eta)$, ψ est μ-plate.

Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$, et supposons qu'il existe $\psi_1, \dots, \psi_s \in \mathcal{F}_n$ telles que $\varphi^s + \sum_{i=1}^{s} \psi_i\, \varphi^{s-i}$ soit $e''(e'e'')^{s-1}(\mu)$-plate à l'origine de X et φ $e''(e'e'')^{s-1}(\mu)$-plate sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu^{p!}(\xi)$. Montrons alors par récurrence sur s, que φ est μ-plate à l'origine de X (La fonction e' est celle fournie par le lemme 1.7 ; d'autre part, on suppose que les fonctions e' et e" sont croissantes, ce qui n'est pas restrictif).

C'est vrai pour s=1. Si s > 1, on voit que ψ_s est $(e'\,e'')^{s-1}(\mu)$-plate à l'origine de $\mathbb{C}^n$. D'après 1.7, ou φ est $e''(e'e'')^{s-2}(\mu)$-plate à l'origine de X, ou $\varphi^{s-1} + \sum_{i=1}^{s-1} \psi_i\, \varphi^{s-i-1}$ est $e''(e'e'')^{s-2}(\mu)$-plate. Dans le 1er cas, le résultat est démontré ; dans le second, on applique l'hypothèse de récurrence.

Ceci démontre la proposition, car tout $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ vérifie une équation de dépendance intégrale :

$$\varphi^s + \sum_{i=1}^{s} \psi_i\, \varphi^{s-i} = o, \text{ avec } s \leq p \text{ et } \psi_i \in \mathcal{F}_n . \quad /$$

L'analogue de la proposition précédente, la platitude étant remplacée par l'analyticité, serait le résultat suivant :

Conjecture 1.9.

Soit $\xi(t)$ *une courbe analytique dans* X *; posons* $\eta = \Pi \circ \xi$ *et supposons que* $\Delta(\eta(t)) \neq o$. *Alors, si* $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ *est analytique sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathcal{E}_\nu^{p!}(\xi)$, φ *est analytique, i.e.* $\varphi \in \mathcal{O}_X$.

D'après 1.4. 1), ceci est vrai lorsque X est régulier. On a aussi le résultat suivant, facile à vérifier : soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme analytique entre germes irréductibles ; si $f^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est injectif et fini et si X vérifie 1.9, Y le vérifie également. Signalons enfin qu'il suffirait de démontrer 1.9, lorsque X est un germe irréductible d'hypersurface à l'origine de C^{n+1}. On peut démontrer le résultat suivant, plus faible et malheureusement d'aucune utilité pour la suite :

Proposition 1.10.

Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ *; si* φ *est analytique sur chaque courbe analytique dans* X, φ *est analytique, i.e.* $\varphi \in \mathcal{O}_X$.

Preuve : Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$; d'après 1.5, il existe $a_1,\dots,a_p \in \mathcal{F}_n$ telles que :

$$\Delta.\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \, \bar{z}_{n+1}^{\,p-i} .$$

Soit $\eta(t)$ une courbe analytique dans $(\mathbb{C}^n,o)$ telle que $\Delta(\eta(t)) \neq o$. Soient $\xi^1(t),\dots, \xi^p(t)$ les courbes dans X qui relèvent $\eta(t)$. Par hypothèse, pour $j=1,\dots,p$: $\sum_{i=1}^{p} a_i\,(\eta(t))\,\xi_{n+1}^j(t)^{p-i} = \sigma_j(t)$ est analytique.

Résolvant ce système et remarquant que le carré de son déterminant est $\Delta(\eta(t)) \neq o$, on vérifie que $a_1(\eta(t)),\dots, a_p(\eta(t))$ sont analytiques. D'après 1.3.1) $a_1,\dots,a_p$ sont analytiques. Ainsi, $\Delta.\varphi \in \mathcal{O}_X$; l'anneau $\mathcal{F}_X$ étant fidèlement plat sur $\mathcal{O}_X$, $\varphi \in \mathcal{O}_X$, c.q.f.d. /

2. PREUVES DE (A) et (B) (X REDUIT).

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme algébrique entre germes de variétés algébriques. Si X est réduit, nous démontrons (A) et, parallèlement, modulo 1.9, la conjecture (B). Visiblement, on peut supposer que l'homomorphisme $f^* : \mathcal{A}_Y \longrightarrow \mathcal{A}_X$ est injectif.

2.1. Passage du cas réduit au cas irréductible.

Supposons (A) et (B) démontrées lorsque X est irréductible. Si X est simplement réduit, soient $X_1,\dots, X_p$ ses composantes irréductibles ; $\mathfrak{P}_1,\dots, \mathfrak{P}_p$ les idéaux premiers de $\mathcal{A}_X$ associés à $X_1,\dots, X_p$ respectivement ; $Y_1,\dots, Y_p$ les germes de variétés irréductibles associés à $f^{*-1}(\mathfrak{P}_1),\dots, f^{*-1}(\mathfrak{P}_p)$ respectivement. On a un diagramme commutatif d'applications injectives :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_Y \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "i_Y"] & \mathcal{A}_X \arrow[d, "i_X"] \\ \prod_{i=1}^{p} \mathcal{A}_{Y_i} \arrow[r, "\Pi f_i^*"] & \prod_{i=1}^{p} \mathcal{A}_{X_i} \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, $\Pi\, f_i^*$ est un isomorphisme topologique de $\prod_{i=1}^{p} \mathcal{A}_{Y_i}$ sur son image ; il en sera de même de f^*, et donc (A) est démontrée.

On a de même un diagramme commutatif d'applications injectives :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y \arrow[r, "\tilde{f}^*"] \arrow[d, "\tilde{\imath}_Y"] & \mathcal{O}_X \arrow[d, "\tilde{\imath}_X"] \\ \prod_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{Y_i} \arrow[r, "\Pi \tilde{f}_i^*"] & \prod_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{X_i} \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, l'image de $\Pi\tilde{f}_i^*$ est fermée dans $\prod_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{X_i}$; l'image de $\tilde{f}^*$ sera donc aussi fermée dans $\mathcal{O}_X$, car $\mathcal{O}_Y$ est fermé dans $\prod_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{Y_i}$; ceci démontre (B).

Nous supposerons désormais que X est irréductible et que $f^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est injective. Soient $[\mathcal{O}_X]$, $[\mathcal{O}_Y]$ les corps des fractions de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ respectivement.

Lemme 2.2.

Soit p *le degré de transcendance de* $[\mathcal{O}_X]$ *sur* $[\mathcal{O}_Y]$. *Alors,* $f = \Pi \circ g$, *où* $g : X \longrightarrow Y \times (\mathbb{C}^p, o) = V$ *est un germe d'application algébrique tel que* g^* *soit injective et* $[\mathcal{O}_X]$ *une extension algébrique finie de* $[\mathcal{O}_V]$; $\Pi : Y \times (\mathbb{C}^p, o) \longrightarrow Y$ *la projection évidente.*

Preuve : Soient $\xi_1, \dots, \xi_p \in \underline{m}_X$ tels que $\xi_1, \dots, \xi_p$ soient algébriquement indépendants sur $[\mathcal{O}_Y]$ et $[\mathcal{O}_X]$ soit une extension algébrique finie de $[\mathcal{O}_Y\ [\xi_1, \dots, \xi_p]]$. Il suffit de prendre pour $\mathcal{O}_V$ le localisé de $\mathcal{O}_Y\ [\xi_1, \dots, \xi_p]$ par rapport à l'idéal maximal engendré par $\underline{m}_Y$ et $\xi_1, \dots, \xi_p$. /

Soit q la dimension de $[\mathcal{O}_X]$ sur $[\mathcal{O}_V]$. Le corps $[\mathcal{O}_X]$ est engendré, en tant qu'algèbre sur $[\mathcal{O}_V]$, par un élément $\theta \in [\mathcal{O}_X]$. Visiblement, quitte à multiplier θ par un élément de $\mathcal{O}_V \setminus \{o\}$, on peut supposer que $\theta \in \mathcal{O}_X$, ou mieux que $\theta \in \underline{m}_X$, et que son polynôme minimal :

$$P(Z) = Z^q + \sum_{i=1}^{q} a_i \quad Z^{q-i}$$

a ses coefficients $a_i \in \mathcal{O}_V$. Soit $\theta_1, \dots, \theta_r$ une famille d'éléments de $\underline{m}_X$ telle que tout élément de $\mathcal{O}_X$ soit de la forme $\varphi(1 + \mathcal{P})^{-1}$ où φ et $\mathcal{P}$ sont des polynômes en $\theta_1, \dots, \theta_r$ à coefficients dans $\mathcal{O}_V$, $\mathcal{P} \in \underline{m}_X$. Il existe des polynômes $Q_j(Z) = \sum_{i=o}^{p-1} a_{ij}\ Z^i$, à coefficients $a_{ij} \in \mathcal{O}_V$ et $S \in \mathcal{O}_V$, $S \neq o$, tels que, pour $j=1, \dots, r$:

$$S.\ \theta_j = \sum_{i=o}^{p-1} a_{ij}\ \theta^i .$$

Lemme 2.3.

Soit $\xi(t)$ *un germe de courbe analytique dans* X *et posons :* $\eta(t) = g \circ \xi(t)$. *Supposons que* $S(\eta(t)) \neq o$. *Alors, il existe un entier* $\nu \geq 1$, *tel que pour tout entier*

$\lambda \geq 1$, *toute courbe dans* V : $\eta'(t) \in \mathcal{E}_{\nu}^{\lambda}(\eta)$ *se relève (par* g*) en une courbe analytique en* $t^{\frac{1}{\lambda . q!}}$ *dans* X.

Preuve : Par hypothèse :

$$\theta(\xi(t))^q + \sum_{i=1}^{q} a_i\ (\eta(t))\ \theta(\xi(t))^{q-i} = o \text{ et pour } j=1,\dots,r :$$

$$S(\eta(t)).\ \theta_j(\xi(t)) = \sum_{i=o}^{p-1} a_{ij}\ (\eta(t))\ \theta(\xi(t))^i .$$

Puisque $S(\eta(t)) \neq o$,

$$S(\eta(t)) = \alpha_1\ t^{\nu_1} + \alpha_2\ t^{\nu_1+1} + \dots ,\ \text{avec } \alpha_1 \neq o,\ \nu_1 \text{ entier} \geq o.$$

Choisissons $\nu \geq \nu_1$ assez grand de telle sorte que, si $\eta'(t) \in \mathcal{E}_{\nu}^{\lambda}(\eta)$, il existe $\overline{\theta}(t)$ analytique en $t^{\frac{1}{q!\lambda}}$ telle que :

$$\overline{\theta}(t)^q + \sum_{i=1}^{q} a_i\ (\eta'(t))\ \overline{\theta}(t)^{q-i} = 0$$

et $\qquad \theta(\xi(t)) - \overline{\theta}(t)$ soit ν_1 - plate.

Définissons $\overline{\theta}_1(t),\dots,\ \overline{\theta}_r(t)$ par les identités :

$$S(\eta'(t))\ .\ \overline{\theta}_j(t) = \sum_{i=o}^{p-1} a_{ij}\ (\eta'(t))\ \overline{\theta}(t)^i$$

Visiblement, $S(\eta'(t)) = \alpha_1\ t^{\nu_1} + \dots$; puisque $\sum_{i=o}^{p-1} a_{ij}\ (\eta(t))\ \ \theta(\xi(t))^i$ est ν_1 - plate à l'origine (car $\theta_j\ (\xi(t))$ est o-plate), il en est de même de $\sum_{i=o}^{p-1} a_{ij}\ (\eta'(t))\ \overline{\theta}(t)^i$; ainsi, pour $j=1,\dots,r$, $\overline{\theta}_j(t)$ est 0-plate.

L'homomorphisme η'^{*} : $\mathcal{O}_V \longrightarrow \mathbb{C}\ \{t^{1/\lambda}\}$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme ξ'^{*} : $\mathcal{O}_V\ [\theta]_S \longrightarrow [\mathbb{C}\ \{t^{1/\lambda q!}\}]$ tel que $\xi'^{*}(\theta) = \overline{\theta}(t)$ ($\mathcal{O}_V[\theta]_S$ désigne l'anneau des polynômes en θ à coefficients de la forme φ/S^s, $\varphi \in \mathcal{O}_V$, s entier). Cet homomorphisme ξ'^{*} induit un homomorphisme ξ'^{*} : $\mathcal{O}_V\ [\theta_1,\dots,\ \theta_r] \longrightarrow \mathbb{C}\ \{t^{1/\lambda q!}\}$ tel que, pour $j=1,\dots,r$: $\xi'^{*}(\theta_j) = \overline{\theta}_j(t)$; enfin, ce dernier se prolonge de manière unique en un homomorphisme, noté encore ξ'^{*} : $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{C}\ \{t^{1/\lambda q!}\}$. La courbe ξ' ainsi obtenue relève η', c.q.f.d.

2.4. Preuves de (A) et (B).

Rappelons tout d'abord qu'il existe $\Delta \in \mathcal{A}_Y \setminus \{o\}$ (a priori $\Delta \in \mathcal{O}_Y$, mais en utilisant le théorème de normalisation pour les variétés algébriques, on voit qu'on peut choisir Δ dans $\mathcal{A}_Y$) et un entier $\lambda \geq 1$ tels que, si $\gamma(t)$ est une courbe analytique dans Y, vérifiant $\Delta(\gamma(t)) \neq o$:

(1) Il existe une application $\mathbb{N} \ni \mu \longrightarrow e(\mu) \in \mathbb{N}$ telle que si $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_Y$ est $e(\mu)$ - plate sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_\nu^\lambda(\gamma)$, alors φ est μ-plate, (d'après 1.8).

Et en admettant 1.9 :

(2) Si $\varphi' \in \hat{\mathcal{O}}_Y$ est analytique sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_\nu^\lambda(\gamma)$, $\varphi \in \mathcal{O}_Y$.

Ceci rappelé, il existe une courbe analytique $\xi(t)$ dans X, telle que, si l'on pose $\eta(t) = g \circ \xi(t)$: $((\Delta \circ \Pi).S)\ (\eta(t)) \neq o$ (sinon, $g^*((\Delta \circ \Pi).S)$ serait nul sur toute courbe analytique dans X, donc nulle ; il en résulterait que $(\Delta \circ \Pi).S=o$, ce qui est absurde). Posons $\gamma(t) = \Pi \circ \eta(t) = f \circ \xi(t)$; on a $\Delta(\gamma(t)) \neq o$. D'après 2.3, il existe un entier ν tel que toute courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_\nu^\lambda(\gamma)$ (qui se relève de manière évidente en une courbe $\eta'(t) \in \mathcal{C}_\nu^\lambda(\eta)$) se relève par f en une courbe analytique dans X, en $t^{1/\lambda.q!}$.

Preuve de (A) : Si $\varphi \in \mathcal{A}_Y$ est telle que $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ est $\lambda.q!\ e(\mu)$-plate, $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$-plate sur chaque courbe en $t^{1/\lambda.q!}$; donc φ est $e(\mu)$-plate sur toute courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_\nu^\lambda(\gamma)$; d'après (1), φ est μ-plate.

Preuve de (B) : Si $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_Y$ est telle que $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ est analytique, alors est analytique sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathcal{C}_\nu^\lambda(\gamma)$; d'après (2), $\varphi \in \mathcal{O}_Y$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN M. :"On the solutions of analytic equations", Invent. Math. 5 - 277 - 291 (1968).

[2] CARTAN H. : "Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives". Actualités Scientifiques et Industrielles, 867 - Hermann (1940).

[3] GABRIELOV A.M. : "The formal relations between analytic functions". Functional Anal. Appl. 5 (1971), 318-319.

[4] TOUGERON J.Cl. : "Idéaux de fonctions différentiables". Ergebnisse Der Mathematik". Band 71, Springer Verlag (1972).