

L. SZPIRO

Variétés de codimension 2 dans P^n

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 4

« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 15, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__4_A15_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIETES DE CODIMENSION 2 DANS P^n

L. SZPIRO

Soit $X \hookrightarrow P_k^n$ une immersion fermée où k est un corps. Une telle variété X est définie par un idéal gradué a de $k[X_0, \dots, X_n] = R$, cet idéal a est unique si on le prend de plus tel que $\text{prof}(R/a) > 0$.

Nous parlerons toujours de cet a (sauf mention du contraire).

Définition. Une variété projective X , plongée dans P_k^n est dite arithmétiquement de Cohen-Macaulay, si elle est définie par un idéal a de $k[X_0 \dots X_n] = R$, tel que R/a soit un anneau de Cohen-Macaulay.

Si maintenant nous considérons X , de codimension 2 dans P_k^n , arithmétiquement de Cohen-Macaulay, alors a est un idéal de dimension projective un sur R qui possède une résolution libre (car il est gradué), telle que la suite

$$(*) \quad 0 \longrightarrow R^{n-1} \xrightarrow{\varphi} R^n \longrightarrow R \longrightarrow R/a \longrightarrow 0$$

soit exacte, de plus n est égal au nombre minimal de générateurs de a .

Nous nous proposons de donner la démonstration du théorème suivant qui nous a été communiqué dans le cas où $k = \mathbb{C}$ et X non singulière, par R. Hartshorne. Les méthodes qu'il utilisait sont analytiques, contrairement à celles qu'on va voir.

Théorème. Soit $X \hookrightarrow P_k^n$ une variété algébrique de codimension 2, arithmétiquement de Cohen-Macaulay, alors si X est localement intersection complète et si $n \geq 6$, X est globalement intersection complète, i.e l'idéal gradué qui la définit dans $k[X_0, \dots, X_n]$ est engendré par 2 éléments.

Corollaire. Sous les hypothèses de théorème, si de plus X est non singulière
 $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$.

En effet, il suffit pour montrer cela, de montrer que l'anneau local du sommet du cône de X dans $\mathbb{P}_k^n$ est factoriel. Or d'après [3], une intersection complète locale qui est factorielle en codimension 4 est factorielle.

Notons que c'est en montrant ce corollaire que Hartshorne montrait le théorème (pour $k = 6$ et X non singulière).

Rappelons d'abord, pour prouver le théorème, la proposition suivante [I]

Proposition I. Soient R un anneau noethérien, a un idéal de R de dimension projective I et qui possède une résolution libre

$$0 \longrightarrow R^{m-I} \xrightarrow{\varphi} R^m \longrightarrow a \longrightarrow 0$$

alors si $\text{codim}_R R/a$ est égale à deux, a est engendré par les déterminants d'ordre $(n-I)$ de φ .

$$\text{Soit } S = k[X_{ij}]_{\substack{i=1 \dots m-I \\ j=1 \dots m}}$$

en envoyant X_{ij} sur le coefficient correspondant de la matrice φ , on a donc un morphisme d'anneau

$$S \xrightarrow{f} R = k[X_0 \dots X_n]$$

Nous supposons $m > 2$ pour montrer le théorème (i.e il nous faut montrer que $n \leq 5$).

Lemme I. Pour que X soit localement intersection complète dans $\mathbb{P}_k^n$, il faut et il suffit que l'idéal engendré par les déterminants d'ordre $(m-2)$ de soit primaire pour l'idéal $(X_0, \dots, X_n)$ de R .

En effet, a est engendré par 2 éléments sur

$$U = \text{Spec } R - \{(X_0 \dots X_n)\} \quad [I]$$

Donc si $p \in u$, la résolution $(*)_p$ $0 \longrightarrow R_p^{m-1} \longrightarrow R_p^m \longrightarrow a_p \longrightarrow 0$ de a_p n'est pas minimale, celle-ci étant $0 \longrightarrow R_p \longrightarrow R_p^2 \longrightarrow a_p \longrightarrow 0$, de par les propriétés des résolutions minimales $(*)_p$ peut s'écrire

$$0 \longrightarrow R_p^{m-2} + R_p \xrightarrow{\psi_p} R_p^{m-2} + R_p^2 \longrightarrow a_p \longrightarrow 0$$

de telle façon que ψ_p / R_p^{m-2} soit un isomorphisme. c.q.f.d.

Corollaire. Le morphisme $S/\text{Kerf} \longrightarrow R$ déduit de f est fini et donc

$$\dim R = n+1 = \dim S/\text{Kerf}.$$

En effet, l'idéal engendré par les $f(X_{ij})$ est primaire pour $(X_0 \dots X_n)$ d'après le lemme I.

Définition. Nous noterons $\mathfrak{I}_S$ l'idéal de S engendré par les mineurs d'ordre s de la matrice $\phi : S^{m-1} \longrightarrow S^m$, dont les coefficients sont les (X_{ij}) .

Lemme 2 [2] $\mathfrak{I}_S$ est un idéal premier de S , $\dim R/\mathfrak{I}_S = (m-s+1)(m-s)$, et le lieu singulier de $R/\mathfrak{I}_S$ est défini par l'idéal $\mathfrak{I}_{S-1}$ et $R/\mathfrak{I}_S$ est un anneau de Cohen-Macaulay.

D'après le lemme I

$$\dim S/\text{Kerf} + \mathfrak{I}_{m-2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } \text{codim}_S S/\mathfrak{I}_{m-2} &= (m-m+2+1)(m-m+2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{codim}_S S/\text{Kerf} = m(m-1) - (n+1)$$

Appliquons la formule des codimensions d'intersections

$$\text{codim } R/\text{Kerf} + \mathfrak{I}_{m-2} \leq \text{codim } R/\text{Kerf} + \text{codim } R/\mathfrak{I}_{m-2}$$

donc

$$m(m-1) \leq 6 + m(m-1) - (n+1)$$

$$\text{i.e. } n \leq 5 \quad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque I. Il existe dans $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$ des variétés de codimension 2, localement intersection complètes, arithmétiquement de Cohen-Macaulay et non définies (idéalement) par 2 équations.

- Dans $\mathbb{P}^3$ La cubique gauche définie par les 3 équations (et pas moins)

$$\begin{aligned} & - X_0 X_2 - X_I^2 \\ & - X_0 X_3 - X_I X_2 \\ & - X_I X_3 - X_2^2 \end{aligned}$$

est localement intersection complète d'après le lemme I, car la matrice Ψ qui lui correspond est

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_I \\ X_I & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que cette cubique gauche (d'ailleurs définie par le plongement de Veronese de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^3$) n'est pas définie par 2 équations (idéalement), car aucun des X_i n'est inversible

- Dans $\mathbb{P}^5$ Le plongement de Segre de $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^5$ définit X comme arithmétiquement de Cohen-Macaulay, la matrice Ψ qui lui correspond est

$$\begin{pmatrix} X_{II} & X_{I2} \\ X_{2I} & X_{22} \\ X_{3I} & X_{32} \end{pmatrix}$$

dans l'anneau $h[X_{ij}]_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$

ses équations sont $X_{II} X_{22} - X_{2I} X_{I2}$

$$X_{II} X_{32} - X_{3I} X_{I2}$$

$$X_{2I} X_{32} - X_{3I} X_{22}$$

X est non singulière (donc localement intersection complète) et $\text{Dic}(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Remarque 2. Pour qu'une matrice $\varphi: R^{m-I} \longrightarrow R^m$ définisse un idéal de dimension projective I à la manière de la proposition I, il faut et il suffit que

$$\text{codim}_R R/\mathfrak{I}_{m-I}(\varphi) = 2.$$

- dans $\mathbb{P}^4$ (suite de la remarque I)

$$R = k[X_0 \dots X_4]$$

Considérons la matrice

$$\varphi = \begin{pmatrix} X_0 & X_2 \\ X_I & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{pmatrix}$$

Soit $S = k[X_{ij}]_{\substack{i=I,2 \\ j=I,2,3}}$

Considérons comme précédemment le morphisme $f: S \longrightarrow R$

$$\text{codim} \quad \dim S/\text{Ker}f = \dim R = \dim S - I$$

$\text{Ker}f$ est engendré par un élément gradué F de S ; or on a la relation

$$X_{3I} - X_{I2} \in \text{Ker}f,$$

donc $F = X_{3I} - X_{I2}$ par des arguments de degré.

La suite

$$(*) \quad 0 \longrightarrow S^2 \xrightarrow{(X_{ij})} S^3 \longrightarrow S \longrightarrow S/\mathfrak{I}_2 \longrightarrow$$

étant exacte d'après la remarque 2.

Pour montrer que la matrice φ définit, par ses déterminants d'ordre 2 une variété de codimension 2 X dans $\mathbb{P}^4$, il nous suffit de prouver que

(*) $\boxtimes S/\text{Ker}f$ est exacte, en effet $S/\text{Ker}f$ est régulier, $S/\text{Ker}f \hookrightarrow R$ est fini et donc plat.

Montrer que (*) $\boxtimes S/\text{Ker}f$ est exacte, est équivalent à montrer que

$F = (X_{3I} - X_{I2})$ est régulier dans $S/\mathfrak{I}_2$. Or $\mathfrak{I}_2$ est premier (lemme 2) et

$F \notin \mathfrak{I}_2$, on a donc montré que

- X est de codimension 2 dans $\mathbb{P}^4$
- son idéal est défini par 3 équations
- X est localement intersection complète (par le lemme I).

Remarque 3. On peut traduire le théorème dans le cas local, il est tout aussi vrai : R régulier local, $\dim R \geq 6$ a un idéal de R tel que R/a soit Cohen Macaulay, $\operatorname{codim}_R R/a = 2$ et R/a est localement intersection complète sur $\operatorname{Spec} R - (\text{point fermé})$, alors a est engendré par 2 éléments.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. PESKINE et L. SZPIRO "Dimension projective finie et cohomologie locale"
Publications Math. IHES n° 42.
- [2] LAKSOV "On the arithmetical Cohen-Macaulay of Schubert varieties"
à paraître.
- [3] GROTHENDIECK SGA 62 Bures/Yvette on North Holland-Masson.

Colloque d'ALGEBRE de RENNES (FRANCE)
du 19 au 22 Janvier 1972

Exposé n° I5 SZPIRO
I4, rue de la Butte aux Cailles
75 - PARIS 13^e