

M. FLEXOR

**Équidimensionnalité des fibres formelles d'un anneau local Noetherien**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1972, fascicule 4

« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 11, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1972\\_\\_4\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__4_A11_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# EQUIDIMENSIONNALITE DES FIBRES FORMELLES

## D'UN ANNEAU LOCAL NOETHERIEN

Mme M. FLEXOR

### I - Rappels

Soit  $A$  un anneau local noetherien. On dit que  $A$  est équidimensionnel, si pour tout idéal premier minimal  $P$  de  $A$ , on a :  $\dim A/P = \dim A$ . Il est dit strictement équidimensionnel si pour tout  $P \in \text{Ass } A$ , on a :  $\dim A/P = \dim A$ . (Par exemple  $A$  intègre). Ceci signifie encore que si on pose  $X = \text{Spec } A$ , toutes les composantes irréductibles (resp. tous les cycles associés dans le cas "strictement") sont de dimension  $\dim(X)$ .

On dit que  $A$  est caténaire si, étant donnés deux idéaux  $P \subset Q$ , les chaînes d'idéaux premiers joignant  $P$  à  $Q$  ont même longueur. Lorsque  $A$  est équidimensionnel, on a  $\dim A/P + \dim A_P = \dim A$  pour tout idéal premier  $P$ .

Il est universellement caténaire si toute  $A$ -algèbre de type fini est caténaire. On peut voir qu'il suffit que  $A[[T]]$  soit caténaire.

Par exemple, un anneau complet est caténaire.

Posons maintenant  $\underline{m} = \text{rad}(A)$ ,  $k = A/\underline{m}$ ,  $F = \text{Frac}(A)$ ,  $\hat{A}$  le complété  $\underline{m}$ -adique de  $A$ . Posons  $Y = \text{Spec } A$ ,  $\hat{Y} = \text{Spec } \hat{A}$ ,  $f : \hat{Y} \longrightarrow Y$ ,  $U = Y - \{m\}$ ,  $A$  intègre.

Nous avons alors la caractérisation suivante :

Proposition I.  $A$  est universellement caténaire, si et seulement si  $\hat{A}$  est équidimensionnel.

Il est très facile de voir que si  $A$  est équidimensionnel, alors  $A$  est caténaire. Pour la condition suffisante, cf. E.G.A. IV, 7.I.II.

Inversement, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe donc une composante irréductible  $Z$  de  $\hat{Y}$  telle que  $\dim \hat{Y} > \dim Z$ . Nous allons procéder à plusieurs réductions.

a) Réduction au cas où A est hensélien

Soit  $A'$  une  $A$ -algèbre finie unibranche,  $A' \subset \text{Frac } A$  comme  $A$  est universellement catenaire, pour tout idéal maximal  $\underline{n}$  de  $A'$ , on a  $\dim A'_{\underline{n}} = \dim A$ . De plus,  $(^n A')^{\wedge}_{\underline{n}} = (A')^{\wedge}_{\underline{n}}$  et on voit facilement que  $\text{Spec}(A')^{\wedge}_{\underline{n}}$  possède une composante irréductible  $Z'$  dominant  $Z$  telle que  $\dim Z' = \dim Z$ . Cette composante irréductible est une composante irréductible d'un  $\text{Spec}(A')^{\wedge}_{\underline{n}}$  pour un certain idéal maximal  $\underline{n}$  de  $A'$ . On peut alors supposer  $A = ^n A'_{\underline{n}}$  qui est intègre et hensélien.

b) Réduction au cas où  $\dim Z = 1$ 

Si  $\dim Z > 1$ , soit  $F = \{z \in Z, z \notin f^{-1}(0), \dim 0_z = 1\}$ . Comme  $\dim Z > 1$ ,  $\hat{m}_A \notin F$  et  $F$  est infini. Soit  $Z_1, \dots, Z_i$  les autres composantes irréductibles de  $\hat{Y}$ . On a  $\dim F \cap Z_i \geq 1$ , donc  $F \cap Z_i = \emptyset$  ou est fini. Soit  $z$  un élément de  $F$  tel que  $z \notin U(F \cap Z_i)$ . Soit  $y = f(z)$ , on a  $\dim 0_y = 1$  et comme  $A$  est catenaire  $\dim \{\bar{y}\} = \dim Y - 1$ . Posons  $B = 0_{\{\bar{y}\}}$ , donc  $\dim B = \dim A - 1$ . De même si  $Z' = \{\bar{z}\}$ , on a  $\dim Z' = \dim Z - 1 < \dim \hat{B}$  et  $Z'$  est une composante irréductible de  $\text{Spec } \hat{B}$ . En réitérant l'opération, on aboutit à un anneau hensélien de dimension 2 tel que  $\text{Spec } \hat{B}$  a une composante irréductible de dimension 1. Ceci est impossible en vertu du lemme suivant :

Lemme. Soit  $(A, m)$  un anneau hensélien intègre de dimension  $\geq 2$ , alors  $U$  est connexe.

Soit  $A'$  le clôture intégrale de  $A$  qui est un anneau local,  $\dim A' \geq 2$ , posons  $V = \text{Spec } A' - \{\text{rad}(A')\}$ . Alors

$$0 \longrightarrow A(U) \longrightarrow A'(V) = A'.$$

Donc  $A(U)$  est entier sur  $A$  et donc local.

Nous allons maintenant donner une "caractérisation birationnelle" des anneaux universellement catenaires. Pour cela, nous allons faire quelques prélimi-

naires. Soit  $q$  un idéal de définition de  $A$ , on considère  $Z = \text{Proj}(\oplus q^n)$  l'éclaté de  $A$  le long de  $q$ . Soit  $g : Z \longrightarrow Y$  le morphisme projectif birationnel canonique,  $\hat{g} : \hat{Z} \longrightarrow \hat{X}$  déduit de  $g$  par le changement de base  $\hat{Y} \longrightarrow Y$ . On a  $\hat{Z} = \text{Proj}(\oplus q^n \hat{A})$  et l'isomorphisme canonique,  $\text{gr}_q A \simeq \text{gr}_{q\hat{A}}(\hat{A})$ , montre que si  $D = \text{Proj}(\text{gr}_q A)$ , alors  $f_D : \hat{Y} \times_Y D \longrightarrow D$  est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier  $D$  au diviseur exceptionnel de  $\hat{Z}$ .

Si de plus  $q$  est engendré par un système de paramètres,  $D$  est irréductible et si  $D_0$  est le schéma réduit associé, on a  $D_0 = f^{-I}(y) \simeq P_k^{n-I}$  où  $n = \dim A$ , c'est-à-dire si  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est le système de paramètres engendrant  $q$  et si  $B_i = A[x_i/x_1, \dots, x_n/x_1]$ , les images des  $x_j/x_1$  dans  $B_i/m_{B_i}$  sont algébriquement indépendants sur  $k$ .

Enfin, notons  $W$  le normalisé de  $Z$ ,  $W \xrightarrow{\psi} Z$  le morphisme associé,  $D' = h^{-I}(D)$ ,  $T = \{z \in D, \dim O_{Z,z} \geq 2\}$ ,  $T' = \{z' \in D', \dim O_{W,z'} \geq 2\}$ . On a le résultat suivant :

Proposition I : Les conditions suivantes sont équivalentes

- i)  $A$  est universellement catenaire ;
- ii) Soient  $(Z_j)$  les composantes irréductibles de  $\hat{Z}$ , alors  
 $\text{codim}(D \cap Z_j, \hat{Z}) = I$  ou encore  $D_0 \subset Z_j$  ;
- iii)  $g^{-I}(T) = T'$  ;
- iv) pour toute composante irréductible  $Z_j$  de  $\hat{Z}$ , on a :  
 $\text{codim}(Z_j \cap T, \hat{Z}) \geq 2$  ;
- iv) bis : pour tout ouvert  $V$  tel que  $T \supset Z-V$ , alors la  $O_Z$ -algèbre  
 $i_{*}(O_V)$  est entier sur  $O_Z$ , où  $i : V \longrightarrow Z$ .

Nous allons donner quelques indications pour la démonstration de cette proposition :

iii)  $\implies$  iv) Soit  $V$  un tel ouvert,  $V' = \psi^{-I}(V)$ , c'est un ouvert qui contient tous les points de codimension  $\leq I$  de  $W$ , donc  $0_V \hookrightarrow 0_{V'} = 0_W$  et  $0_V$  est bien entier sur  $0_Z$ .

i)  $\implies$  ii) Tout d'abord,  $g$  est fermé et est un isomorphisme en dehors de  $U$ , donc pour tout  $j$ ,  $Z_j \cap D \neq \emptyset$ . Soit  $\xi$  un point fermé de  $Z_j \cap D$ , c'est aussi un point fermé de  $D_0$ , donc  $k(\xi)$  est algébrique sur  $k$ . Comme  $\hat{Z} \longrightarrow \hat{Y}$  est un isomorphisme sur  $U' = f^{-I}(U)$ , si  $z$  est un point générique de  $Z_j$ ,  $z$  est encore un point générique d'une composante irréductible  $V_j$  de  $\hat{Y}$ . Par hypothèse  $\dim Y_j = \dim Y$ . La formule des dimensions donne :

$$\begin{aligned} \dim 0_{Z_j, \xi} &= \dim Y_j + \deg \operatorname{tr}_k k(\xi) \\ &= \dim Y. \end{aligned}$$

De plus  $0_{\hat{Z}, \xi} \longrightarrow 0_{Z_j, \xi} \longrightarrow 0$  et  $0_{D_0, \xi} \longrightarrow 0_{Z_j, \xi} / \underline{m} 0_{Z_j, \xi} \longrightarrow 0$ .

Comme  $D_0$  est intègre et  $\dim 0_{D_0, \xi} = n-I$ , on voit que la précédente surjection est un isomorphisme, en effet comme  $q$  est primaire pour  $\underline{m}$ ,  $\underline{m}^e \subset q$  pour un certain entier  $e$  et  $q 0_{Z_j, \xi}$  est principal. Donc  $D_0 \subset Z_j$ .

ii)  $\implies$  i) Comme  $Z_j \neq D_0$  et  $\dim D_0 = n-I$ , pour tout  $j$ , on a  $\dim Z_j = n$  et toute composante irréductible de  $\hat{Z}$  domine une composante irréductible de  $\hat{Y}$ .

iii)  $\implies$  ii) Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit  $\xi$  un point générique d'une composante irréductible de  $D \cap Z_j$ . Comme  $D$  est défini par une équation, on a  $\dim 0_{Z_j, \xi} = I$ , autrement dit si on pose  $R = 0_{Z, \xi}$   $R' = 0_{\hat{Z}, \xi}$ , on a  $\dim R \geq 2$  et  $\operatorname{Spec} R' - \{\xi\}$  n'est pas connexe. Comme  $g^{-I}(T) = T'$ , on peut voir que cette solution se transmet à toute  $R$ -algèbre locale essentiellement finie sur  $R$ . On peut donc supposer  $R$  unibranche où ceci devient alors impossible.

Proposition I-bis. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est strictement équidimensionnel
- 2)  $D_0$  est contenu dans tout cycle associé à  $\hat{Z}$ .
- 3) Pour tout ouvert  $V \supset Z - T$ ,  $O_X$  est fini sur  $O_Z$ .

(On note encore  $O_V$  la  $O_Z$ -algèbre  $i_* (O_V)$ , ou  $i : V \longrightarrow Z$ ).

Corollaire I : Soit  $A \longrightarrow R$  un homomorphisme plat d'anneaux locaux intègres tels que  $(\text{rad } A) R = \text{rad}(R)$  et tels que  $k(R)$  soit algébrique sur  $k(A)$ . Alors  $\hat{A}$  est équidimensionnel (resp. strict.), si et seulement si  $\hat{R}$  l'est.

En particulier

Corollaire 2 : Si A est géométriquement une branche, alors A est strictement équidimensionnel, si et seulement si  $(^n S_A)^\wedge$  l'est.

Référence : Article à paraître à la S.M.F. : sur certains éclatements.

Colloque d'ALGÈBRE de RENNES (FRANCE)  
du 19 au 22 Janvier 1972

Exposé n° II      M. FLEXOR  
I72, Avenue de Choisy  
75 - PARIS 13<sup>e</sup>

Reproduction interdite