

PIERRE BOLLEY

JACQUES CAMUS

Formule de Green et théorème de trace associés à l'opérateur

: $\sum_{i,j=0}^n D_j(a_{ij}(x)\varphi(x)D_i)$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 5, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972__1_A5_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULE DE GREEN ET THEOREME DE TRACE ASSOCIES

$$A \text{ L'OPERATEUR } \sum_{i,j=0}^n D_j (a_{ij}(x) \Psi(x) D_i).$$

par

Pierre BOLLEY et Jacques CAMUS

I. NOTATIONS ET HYPOTHESES :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ . On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞ . On se donne une fonction Ψ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et vérifiant :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \Psi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, \Psi(x) = 0\}, \\ \text{Grad } \Psi(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \Gamma. \end{cases}$$

On considère l'opérateur (cf. [2]) :

$$(1.2) \quad A = A(x; D) = \sum_{i,j=0}^n D_j (a_{ij}(x) \Psi(x) D_i),$$

où les a_{ij} sont des fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega})^{(*)}$ et où $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $D_0 = \text{identité}$.

On suppose que la forme intégralo-différentielle

$$(1.3) \quad a(u, v) = \sum_{i,j=0}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \Psi(x) D_i u(x) \overline{D_j v(x)} dx$$

est coercive sur l'espace.

$$(1.4) \quad V(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi^{1/2} u \in L^2(\Omega), \varphi^{1/2} D_i u \in L^2(\Omega) \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$$

muni de la norme

$$(1.5) \quad \|u\|_{V(\Omega)} = \left(\|\varphi^{1/2} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\varphi^{1/2} D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ vérifiant :

$$(1.6) \quad \text{Re } a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{V(\Omega)}^2, \text{ pour tout } u \in V(\Omega). (**)$$

(*) $C^\infty(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$.

(**) Cette condition est équivalente à deux conditions algébriques portant sur l'opérateur A cf : [3].

Moyennant cette hypothèse (1.6), M.M. BAOUENDI-GOULAOUIC ont établi que

(1.7) l'opérateur A réalise un isomorphisme topologique de $W_1^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, où $W_1^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert des distributions u vérifiant

$$(1.8) \quad u \in H^1(\Omega), \quad \varphi u \in H^2(\Omega). \quad (*) \quad (**)$$

L'objet de notre étude est d'établir un théorème de trace et une formule de Green pour "l'opérateur maximal" associé à l'opérateur A .

II - FORMULE DE GREEN ET THEOREME DE TRACE

On désigne par $D(A; \Omega)$ le domaine maximal dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur A , c'est-à-dire :

$$(2.1) \quad D(A; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega), A u \in L^2(\Omega)\}.$$

On notera $\frac{\partial u}{\partial v}_A$ l'opérateur défini par :

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial v}_A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\vec{n}, x_j)$$

où $x \in \Gamma$, et où $\vec{n}$ désigne la normale extérieure en x à Γ .

Il est bien connu que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ n'est pas dense dans $D(A; \Omega)$, néanmoins, on va montrer que si u appartient à $D(A; \Omega)$, alors $\frac{\partial u}{\partial v}_A$ a un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et que de plus, on a la formule de Green suivante :

$$(2.3) \quad (Au, v)_{L^2(\Omega)} - (u, A^* v)_{L^2(\Omega)} = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial v}_A, \gamma_0 \bar{v} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)},$$

pour tout v appartenant à $W_1^2(\Omega)$. ($\gamma_0 v$ désigne la restriction de v à Γ).

Démonstration : Elle sera faite en 3 étapes.

(*) $H^s(\Omega)$, où s est un nombre réel, est l'espace de Sobolev habituel défini sur Ω (voir [5] par exemple).

(**) Remarquer que l'opérateur A^* satisfait aux mêmes propriétés que l'opérateur

1^{ère} étape : Choix d'un espace $W(\Omega)$ pour lequel (2.3) a lieu, (ce qui suppose que $\frac{\partial}{\partial \nu_A}$ est défini sur cet espace). On choisit l'espace suivant :

$$(2.4) \quad W(\Omega) = W_1^1(\Omega) \cap D(A; \Omega),$$

où $W_1^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \forall u \in H^1(\Omega)\}$.

Il est alors facile de vérifier que si u appartient à $W(\Omega)$, $\gamma_0(\Psi \frac{\partial u}{\partial x_i})$ a un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ pour $i = 1, \dots, n$ et donc $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}$ a un sens et appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Pour établir la formule (2.3), on se ramène par cartes locales au demi-espace $\mathbb{R}_+^n$. (Remarquer que si u appartient à $W(\Omega)$, alors Ψu appartient aussi à $W(\Omega)$ quelle que soit la fonction Ψ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$).

2^{ème} étape : L'espace $W(\Omega)$ est dense dans $D(A; \Omega)$.

Soit donc $u \mapsto M(u)$ une forme linéaire continue sur $D(A; \Omega)$, nulle sur $W(\Omega)$, i.e :

$$(2.5) \quad \forall u \in W(\Omega), \quad M(u) = 0.$$

Par ailleurs, il existe f et g dans $L^2(\Omega)$ telles que :

$$(2.6) \quad \forall u \in D(A; \Omega), \quad M(u) = (f, u)_{L^2(\Omega)} + (g, Au)_{L^2(\Omega)}.$$

1°) On utilise (2.5) pour u appartenant à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$: on obtient facilement que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(2.7) \quad A^* \tilde{g} = - \tilde{f},$$

où $\tilde{g}$ (resp. $\tilde{f}$) est le prolongement par 0 de g (resp. de f) dans $\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$.

(On suppose évidemment que les coefficients a_{ij} sont prolongés à $\mathbb{R}^n$ de sorte que l'opérateur $\sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x) D_i)$ soit elliptique dans $(\mathbb{R}^n)$).

Mais, l'opérateur A^* peut toujours s'écrire sous la forme :

$$(2.8) \quad A^* u = P^2(x, D) \{ \nabla u \} + P^1(x, D) \{ u \},$$

où $P^2(x;D)$ est un opérateur d'ordre 2, elliptique dans $\mathbb{R}^n$ et $P^1(x;D)$ un opérateur d'ordre 1. Par suite, de (2.7) et (2.8) on déduit que $P^2(x;D) \{ \varphi_g^\sim \}$ appartient à $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. La régularité locale des opérateurs elliptiques implique que $\varphi_g^\sim$ appartient à $H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Par restriction à Ω , il vient :

$$(2.9) \quad g \text{ appartient à } W_1^1(\Omega).$$

Ainsi g appartient à $W_1^1(\Omega)$ et de plus, on a $A^*g = -f$; donc, g appartient à $W^*(\Omega)^{(*)}$ et $\frac{\partial g}{\partial \nu_A^*}$ a un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

On écrit alors la formule de Green (2.3) pour g et pour l'opérateur A^* :

$$(2.10) \quad (\widetilde{A^*g}, \phi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} - (\widetilde{g}, A\phi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = - \langle \frac{\partial g}{\partial \nu_A^*}, \overline{\gamma_0 \phi} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)},$$

pour tout ϕ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Mais $\widetilde{A^*g} = \widetilde{-f}$, on en déduit que $\frac{\partial g}{\partial \nu_A^*} = 0$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Finalement, g vérifie :

$$(2.11) \quad \begin{cases} g \in W_1^1(\Omega), \\ A^*g = -f \in L^2(\Omega) \\ \frac{\partial g}{\partial \nu_A^*} = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

2°) On prouve que g appartient à $W_1^2(\Omega)$: Pour cela, il suffit de prouver (d'après (1.7) qui est aussi valable pour A^*) que le problème :

$$(2.12) \quad \begin{cases} u \in W_1^1(\Omega) \\ A^*u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A^*} = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

n'admet que la solution $u=0$. Or si u satisfait à (2.12), u appartient à $W^*(\Omega)$ et appliquant la formule de Green (2.3) pour u et pour l'opérateur A^* , il vient :

(*) $W^*(\Omega)$ désigne l'espace $W_1^1(\Omega) \cap D(A^*; \Omega)$.

$$(2.13) \quad (u, Av)_{L^2(\Omega)} = 0$$

pour tout v appartenant à $W_1^2(\Omega)$. D'après (1.7), cela implique $u \equiv 0$.

3°) On prouve que g appartient à $\dot{W}_1^2(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega), \varphi u \in H^2(\Omega)\}$

Il faut montrer que $\gamma_0 g = 0$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour cela, on remarque que si Ψ appartient à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, la fonction

$$(2.14) \quad u_\Psi(x) = \text{Log } \varphi(x) \cdot \Psi(x),$$

appartient à $W(\Omega)$ et de plus :

$$(2.15) \quad \frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A} = - \gamma_0 \left(\frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_i \varphi_j}{\|\text{grad } \varphi\|} \right) \cdot \gamma_0 \Psi,$$

où $\varphi_\ell = \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}$ pour $\ell = 1, \dots, n$.

On applique la formule de Green (2.3) à de telles fonctions u_Ψ et à g (qui appartient à $W_1^2(\Omega)$) :

$$(2.16) \quad (Au_\Psi, g)_{L^2(\Omega)} - (u_\Psi, A^*g)_{L^2(\Omega)} = - \left\langle \frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A}, \gamma_0 \bar{g} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Or $A^*g = -f$, par suite, d'après (2.5), il vient :

$$(2.17) \quad \left\langle \frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A}, \gamma_0 \bar{g} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0.$$

Mais d'après (2.15), lorsque Ψ parcourt $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial u_\Psi}{\partial \nu_A}$ parcourt $\mathcal{D}(\Gamma)$; il en résulte que $\gamma_0 g = 0$.

4°) La forme M est identiquement nulle : Comme g appartient à $\dot{W}_1^2(\Omega)$ et que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\dot{W}_1^2(\Omega)$, on en déduit que pour u appartenant à $D(A; \Omega)$, on a :

$$(2.18) \quad (Au, g)_{L^2(\Omega)} = (u, A^*g)_{L^2(\Omega)}.$$

Tenant compte du fait que $A^*g = -f$, on en déduit que pour u appartenant à $D(A; \Omega)$, $M(u) = 0$ i.e : $M \equiv 0$.

3^{ème} étape : L'application $u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial v_A} : W(\Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ se prolonge par continuité à $D(A; \Omega)$ et on a la formule de Green (2.3).

Soit $\Psi \longrightarrow R\Psi$ un relèvement linéaire continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $W_1^2(\Omega)$ (cf : [4]) et posons, selon la méthode de [5] :

$$(2.19) \quad Z_u(\Psi) = (Au, R\Psi)_{L^2(\Omega)} - (u, A^* R\Psi)_{L^2(\Omega)}$$

pour u appartenant à $D(A; \Omega)$.

Montrons que $Z_u(\Psi)$ ne dépend pas du relèvement $R\Psi$ choisi de Ψ dans $W_1^2(\Omega)$. Pour cela, il suffit de prouver que si v appartient à $W_1^2(\Omega)$ alors

$$(Au, v)_{L^2(\Omega)} - (u, A^* v)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

ce qui est immédiat.

Par suite, l'application : $\Psi \longmapsto Z_u(\Psi)$ est linéaire continue de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $\mathbb{C}$, il existe donc $\tau(u)$ appartenant à $H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que :

$$(2.20) \quad Z_u(\Psi) = \langle \tau(u), \Psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}.$$

De plus, $u \longmapsto \tau(u)$ est linéaire continue de $D(A; \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Il suffit maintenant d'interpréter $\tau(u)$ pour u appartenant à $W(\Omega)$; de

(2.3), il vient :

$$(2.21) \quad \tau(u) = - \frac{\partial u}{\partial v_A},$$

ce qui achève la démonstration.

III. APPLICATION AUX PROBLEMES AUX LIMITES ASSOCIES A L'OPERATEUR

$$\bigoplus_{i,j=0}^p D_j(a_{ij}(x) - \varphi(x) D_i).$$

On va démontrer, à l'aide des méthodes de M.M. BAOUENDI-GEYMONAT

(cf : [1]) le résultat suivant :

Théorème 3.1 : L'application $\{A, \frac{\partial}{\partial v_A}\} : D(A; \Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ est un isomorphisme.

Démonstration :

1°) Introduction d'un "potentiel" : Soit $\varphi \mapsto R\varphi$ un relèvement linéaire continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $W_1^2(\Omega)$; posons :

$$(3.1) \quad K\varphi = A^* R\varphi.$$

L'application : $(u, \varphi) \mapsto A^* u + K\varphi : W_1^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est un isomorphisme. En effet :

- Injectivité : $A^*(u + R\varphi) = 0$ implique $u + R\varphi = 0$ d'après (1.7), d'où : $\gamma_0(u + R\varphi) = \varphi = 0$; il en résulte que $u = 0$.

- Surjectivité : D'après (1.7), étant donné f appartenant à $L^2(\Omega)$, il existe w dans $W_1^2(\Omega)$ tel que $A^* w = f$. Il suffit ensuite de prendre $\varphi = \gamma_0 w$ et $u = w - R \gamma_0 w$.

2°) Transposition : Transposant l'isomorphisme précédent, on obtient que l'application

$$(3.2) \quad u \mapsto (Au, K^* u) : L^2(\Omega) \longrightarrow [W_1^2(\Omega)]' \times H^{-1/2}(\Gamma),$$

est un isomorphisme.

3°) Interprétation de l'opérateur K^* : On revient à la formule de Green (2.3) appliquée à u appartenant à $D(A; \Omega)$ et à $v = R\varphi$. Il en résulte que pour u appartenant à $D(A; \Omega)$, on a :

$$(3.3) \quad K^* u = R^* Au + \frac{\partial u}{\partial \nu_A}.$$

4°) Démonstration du théorème :

- Injectivité : cela résulte de (3.2) et (3.3).

- Surjectivité : soient f et g dans $L^2(\Omega)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ respectivement.

D'après (3.2), il existe u_1 et u_2 dans $L^2(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} Au_1 = f \\ K^* u_1 = g \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Au_2 = 0 \\ K^* u_2 = R^* f \end{cases}$$

Utilisant la formule (3.3), on en déduit que la fonction $u = u_1 + u_2$ satisfait à

$$\begin{cases} Au = f \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = g. \end{cases}$$

Remarque 1 : Le théorème 3.1 permet de résoudre le "problème de Neumann"

non-homogène :

$$(3.4) \quad \begin{cases} Au = f \in L^2(\Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = g \in H^{-1/2}(\Gamma), \\ u \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Remarque 2 : Il résulte du théorème 3.1 que la solution du problème variationnel associé à l'opérateur A

$$\begin{cases} Au = f \in L^2(\Omega) \\ u \in V(\Omega) \end{cases}$$

est en fait la solution du problème aux limites (3.4) avec condition frontière homogène.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. BAOUENDI-G. GEYMONAT : Résultats de dualité dans les problèmes aux limites linéaires elliptiques. C.R.A.S. Paris Série A 270 (1970) p.p. 370-372.
- [2] M.S. BAOUENDI-C. GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Arch. Rat. Méc. Anal. 34 n° 5 (1969) p. 361-379.
- [3] P. BOERO-R. PAVEC : Coercivité des formes sesquilinéaires intégral-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids. C.R.A.S. Paris t 270 p. 1416-1419 (1970).
- [4] P. BOLLEY-J.CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés à plusieurs variables. Article à paraître.
- [5] J.L.LIONS-E.MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes. Dunod Paris 1968.