M. S. BAOUENDI

Analycité des solutions du problème de Dirichlet homogène

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 5, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A5_0>

ANALYCITE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE DIRICHLET HOMOGENE

par

M.S. BAOUENDI

(rédigé par B. Hanouzet et J.L. Durrmeyer)

Soit Ω un ouvert borné très régulier de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ analytique. $P(x,D)$ désigne un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients analytiques dans $\overline{\Omega}$.

Soit $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que :

$$\begin{cases} P(x,D)\, u = f \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

On se propose de démontrer que si f est analytique dans $\overline{\Omega}$, alors u est analytique dans $\overline{\Omega}$.

La démonstration est faite en deux étapes. Au I, on étudie l'analycité dans Ω, la démonstration est extraite de Hörmander ([1]) ; au II, on étudie l'analycité au bord. Le résultat est aussi vrai pour un opérateur elliptique d'ordre 2m. Pour des résultats analogues pour des systèmes, on pourra consulter Morrey et Nirenberg ([2]), pour un opérateur elliptique dégénéré, Baouendi et Goulaouic ([3]).

I. ANALYCITE DANS Ω.

1°) Préliminaires et notations.

Notons $\omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$, pour qu'une fonction g soit analytique dans $\overline{\omega}$ il faut et il suffit qu'une des propriétés suivantes soit réalisée :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Il existe } B > 0 \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ on ait :} & \\ \qquad \sup_{x \in \omega} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha| ! & (1) \\ (\text{ou :} \quad \sup_{x \in \omega} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha|^{|\alpha|} \;) & (1') \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Il existe } B > 0 \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ on ait :} & \\ \qquad |D^\alpha g|_{L^2(\omega)} \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha| ! & (2) \\ (\text{ou :} \quad |D^\alpha g|_{L^2(\omega)} \leq B^{|\alpha|+1} |\alpha|^{|\alpha|} \;) & (2'). \end{array}\right.$$

On démontre que (1) (resp. (2)) équivaut à (1') (resp. (2')) par la formule de Stirling, que (1) équivaut à (2) par le théorème de Sobolev.

Dans la suite, on suppose que $R < 1$ et on note, pour $0 < \varepsilon < R$:

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R - \varepsilon.\}$$

$$N_\varepsilon(g) = |g|_{L^2(\omega_\varepsilon)} .$$

On obtient une condition nécessaire d'analycité.

<u>Proposition I.1</u>.

Si g *est analytique dans* $\overline{\omega}$, *il existe une constante* $B > o$ *telle que :*

$\forall\ j \in \mathbb{N}, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ , \forall\ \varepsilon > o$:

$$\varepsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \omega_{j\varepsilon}} |D^\alpha g(x)| \leq B^{|\alpha|+1}\, j^{-|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} . \qquad (3)$$

En particulier, en prenant $j = |\alpha|$ on a :

$$\varepsilon^{|\alpha|} \sup_{x \in \omega_{|\alpha|\varepsilon}} |D^\alpha g(x) \leq B^{|\alpha|+1} . \qquad (3')$$

et de façon équivalente, en utilisant la norme L^2 :

$$(j\varepsilon)^{|\alpha|} \quad N_{j\varepsilon}\ (D^{\alpha}g) \leq B^{|\alpha|+1}\ |\alpha|^{|\alpha|} \qquad (4)$$

$$\varepsilon^{|\alpha|} \quad N_{|\alpha|\varepsilon}\ (D^{\alpha}g) \leq B^{|\alpha|+1} \qquad (4').$$

Démonstration :

Si $j\ \varepsilon \geq R$ alors $\omega_{j\varepsilon} = \emptyset$ et (3) est évident.

Si $j\ \varepsilon < R$, d'après (1'), on a :

$$\sup_{x \in \omega_{j\varepsilon}} |D^{\alpha}g(x)| \leq \sup_{x \in \omega} |D^{\alpha}g(x)| \leq B^{|\alpha|+1}|\alpha|^{|\alpha|} .$$

et par suite, comme $j\ \varepsilon < R < 1$:

$$(j\varepsilon)^{|\alpha|} \sup_{x \in \omega_{j\varepsilon}} |D^{\alpha}g(x)| \leq B^{|\alpha|+1}\ |\alpha|^{|\alpha|} .$$

2°) Passons maintenant à l'étude de l'analycité dans Ω. Ennonçons le résultat :

Théorème 1.

Soit $P(x,D)$ *un opérateur elliptique d'ordre 2, à coefficients analytiques dans* Ω. *Si* u *est une distribution telle que* $P(x,D)u$ *est analytique dans* Ω, *alors* u *est analytique dans* Ω.

Notons d'abord que, puisque $P(x,D)$ est elliptique (donc hypoelliptique), les hypothèses impliquent que $u \in C^{\infty}(\Omega)$. D'autre part, l'analycité étant une propriété locale, il suffit de montrer le théorème au voisinage de chaque point de Ω, à une translation près, on peut se ramener à l'origine. Nous supposons donc que :

$u \in C^{\infty}(\omega)$

$P(x,D)u = f$ est analytique dans $\overline{\omega}$

$P(x,D) = \sum_{|\beta| \leq 2} a_{\beta}\ D^{\beta}$ avec a_{β} analytique dans $\overline{\omega}$

D'après (1) et (2), on sait qu'il existe une constante $A > o$ telle que

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ ,\ |D^\alpha f|_{L^2(\omega)} \leq A^{|\alpha|+1}\ |\alpha|^{|\alpha|} \tag{5}$$

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \sum_{|\beta|\leq 2}\ \sup_{x\in\omega}\ |D^\alpha a_\beta(x)| \leq A^{|\alpha|+1}|\alpha|^{|\alpha|} \tag{6}$$

Lemme I.1.

Soit $v \in C^\infty(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}$ *avec* $|\alpha| = 2$, *il existe une constante* $C_1 < o$ *telle que, pour tout* ε, $\varepsilon_1 > o$, $\varepsilon + \varepsilon_1 < R$, *on ait :*

$$\varepsilon^2\ N_{\varepsilon+\varepsilon_1}\ (D^\alpha v) \leq C_1 \left\{ \varepsilon^2\ N_{\varepsilon_1}\ (P(x,D)v) + \varepsilon \sum_{|\beta|\leq} N_{\varepsilon_1}\ (D^\beta v) + N_{\varepsilon_1}\ (v) \right\} \tag{7}$$

$P(x\ ;\ D)$ étant un opérateur elliptique sur Ω, il existe une constante $C > o$ telle que

$\forall\ u \in \mathcal{D}(\omega)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq 2$, on ait :

$$|D^\alpha u|_{L^2(\omega)} \leq C\ |\ P(x,D)u|_{L^2(\omega)} \tag{8}$$

On prend alors $u = \varphi v$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon_1})$,

$o \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ sur $\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}$ et

$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi(x)| \leq C(\alpha)\varepsilon^{-|\alpha|}$

($C(\alpha)$ est une constante $> o$ indépendante de ε).

Pour construire φ il suffit de prendre $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = 1$ pour $t \leq o$, $\psi(t) = o$ pour $t \leq 1$ et $0 \leq \psi(t) \leq 1$, puis de poser :

$$\varphi(x) = \psi(\varepsilon^{-1}(|x| - R + \varepsilon + \varepsilon_1)).$$

Pour (8), on a :

$$|D^\alpha(\varphi v)|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\ |P(x,D)\ \varphi v|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ ,$$

et par ailleurs :

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha v) = N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha(\varphi v)) \leq |D^\alpha(\varphi v)|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

On a :

$$P(x,D)(\varphi v) = \varphi P(x,D)v + [P(x,D),\varphi]v .$$

$$|\varphi P(x,D)v|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq N_{\varepsilon_1}(P(x,D)v).$$

Développons le commutateur par la formule de Leibnitz :

$$[P(x,D),\varphi]\, v = \sum_{|\beta|\leq 2} a_\beta D^\beta(\varphi v) - \varphi \sum_{|\beta|\leq 2} a_\beta D^\beta v$$

$$= \sum_{\substack{|\beta|\leq 2\\ \beta\neq 0}} a_\beta (D^\beta\varphi)v + \sum_{\substack{|\beta|\leq 2\\ |\beta_1|=1\\ |\beta_2|=1}} a_\beta (D^{\beta_1}\varphi)(D^{\beta_2} v)$$

et majorons chacun des termes :

$$|(D^\beta\varphi)\, v|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta\varphi(x)|\, N_{\varepsilon_1}(v)$$

$$\leq \varepsilon^{-2} C(\beta)\, N_{\varepsilon_1}(v)$$

$$|(D^{\beta_1}\varphi)(D^{\beta_2}v)|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^{\beta_1}\varphi(x)|\, N_{\varepsilon_1}(D^{\beta_2} v)$$

$$\leq C(\beta_1)\, \varepsilon^{-1} N_{\varepsilon_1}(D^{\beta_2} v)$$

Il existe donc une constante $C' > 0$ telle que :

$$|[P(x,D),\varphi]\, v|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C'(\varepsilon^{-1} \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta v) + \varepsilon^{-2} N_{\varepsilon_1}(v))$$

ce qui termine la démonstration de 7.

Remarquons que le lemme I.1. donne une majoration des dérivées d'ordre 2 par $P(x,D)v$ et les dérivées d'ordre 1 et 0 sur un ouvert plus grand. Nous employons une méthode "d'ouverts emboités" pour démontrer le résultat :

Lemme I.2.

Soit $v \in C^\infty(\omega)$ *telle que* $P(x,D)v = f$ *soit analytique dans* $\overline{\omega}$. *Il existe une constante* $B > o$ *telle que :*

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ ,\quad \forall\ \varepsilon > o\ :\ \varepsilon^{|\alpha|}\ N_{|\alpha|\varepsilon}\ (D^\alpha v) \leq B^{|\alpha|+1} \qquad (9).$$

La démonstration se fait par récurrence. Nous supposons que la relation (9) est vérifiée à l'ordre j (c'est-à-dire pour tout $\alpha \in N^n$, $|\alpha| \leq j$) et nous montrons qu'on peut choisir une constante $B > o$ telle qu'elle soit encore vérifiée à l'ordre j+1, ce choix étant fait indépendamment de j.

Soit donc $\alpha \in N^n$ avec $|\alpha| = j+1$. On pose :

$\alpha = \alpha' + \alpha''$ avec $|\alpha'| = j-1$ et $|\alpha''| = 2$.

On applique la relation (7) en remplaçant v par $D^{\alpha'}v$ et α par α'' :

$$\varepsilon^2\ N_{\varepsilon+\varepsilon_1}\ (D^\alpha v) \leq C_1 \left\{ \varepsilon^2\ N_{\varepsilon_1}\ (P(x,D)\ D^{\alpha'}\ v) \right.$$
$$\left. +\ \varepsilon \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}\ (D^{\beta+\alpha'}\ v) + N_{\varepsilon_1}\ (D^{\alpha'}\ v) \right\} .$$

puis on choisit $\varepsilon_1 = j\varepsilon = (|\alpha|-1)\varepsilon$ ce qui donne

$$\varepsilon^{|\alpha|}\ N_{|\alpha|\varepsilon}\ (D^\alpha v) \leq C_1 \left\{ \varepsilon^{|\alpha|}\ N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}\ (P(x,D)\ D^{\alpha'} v) \right.$$
$$\left. +\ \varepsilon^{|\alpha|-1} \sum_{|\beta|=1} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}\ (D^{\alpha'+\beta} v) + \varepsilon^{|\alpha|2}\ N_{(|\alpha|-1)}\ (D^{\alpha'}\ v) \right\}$$

Nous majorons séparément chacun des termes intervenant à droite dans cette dernière inégalité.

(i) Comme $|\alpha|-1$ et $|\alpha'| = j-1$, on a :

$$\varepsilon^{|\alpha|-2}\ N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}\ (D^{\alpha'}\ v) \leq \varepsilon^{|\alpha|-2}\ N_{|\alpha'|\varepsilon}\ (D^{\alpha'}\ v)$$

et par l'hypothèse de récurrence

$$\varepsilon^{|\alpha|-2} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\alpha'}v) \le B^{|\alpha|'+1} = B^{|\alpha|-1} . \qquad \text{(i)}.$$

ii) Comme $|\beta+\alpha'| = |\beta| + |\alpha'| = |\alpha| - 1$, on a :

$$\varepsilon^{|\alpha|-1} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'} v) \le B^{|\alpha|}$$

et par suite :

$$\varepsilon^{|\alpha|-1} \sum_{|\beta|=1} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'}v) \le n\, B^{|\alpha|} . \qquad \text{(ii)}.$$

iii) Il reste à majorer le terme :

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(P(x,D)\, D^{\alpha'}v).$$

On a :

$$P(x,D)\, D^{\alpha'}v = D^{\alpha'}(P(x,D)v) + [P(x,D), D^{\alpha'}]\, v$$

$$= D^{\alpha'}f + \sum_{\substack{\gamma \le \alpha' \\ |\gamma| \ge 1}} \sum_{|\delta| \le 2} \binom{\alpha'}{\gamma} (D^{\gamma}a_{\delta})(D^{\delta+\alpha'-\gamma}v).$$

et ainsi :

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(P(x,D)\, D^{\alpha'}v) \le \varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\alpha'}f)$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma \le \alpha' \\ |\gamma| \ge 1}} \sum_{|\delta| \le 2} \varepsilon^{|\alpha|} \binom{\alpha'}{\gamma} \sup_{x \in \omega_{(|\alpha|-1)\varepsilon}} |D^{\gamma}a_{\delta}(x)|\, N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\delta+\alpha'-\gamma}v)$$

Par (5) et (4'), on a :

$$\varepsilon^{|\alpha'|} N_{|\alpha'|\varepsilon}(D^{\alpha'}f) \le A^{|\alpha'|+1}$$

et comme $|\alpha| = |\alpha'| + 2$

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon}(D^{\alpha'}f) \le \varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha'|\varepsilon}(D^{\alpha'}f)$$

$$\le \varepsilon^{2} A^{|\alpha'|+1} \le A^{|\alpha'|+1} .$$

$\ast$ Comme $|\delta + \alpha' - \gamma| \leq j$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\varepsilon^{|\delta|+|\alpha'| - |\gamma|} N_{(|\delta|+|\alpha'|-|\gamma|)\varepsilon} (D^{\delta+\alpha' - \gamma}v) \leq B^{|\delta|+|\alpha'| - |\gamma| +1} .$$

et par suite :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (D^{\delta+\alpha' - \gamma}v) &\leq \varepsilon^{2-|\delta|+|\gamma|} B^{|\delta|+|\alpha'|- |\gamma|+1}\\ &\leq \varepsilon^{|\gamma|} B^{|\delta|+|\alpha'|- |\gamma| + 1}\\ &\leq \varepsilon^{|\gamma|} B^{|\alpha|-|\gamma| + 1}\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue en supposant $B \geq 1$ et en remarquant que $|\alpha'| + |\delta| \leq |\alpha|$.

$\ast$ En utilisant (6) et (3), il vient :

$$\varepsilon^{|\gamma|} \sum_{|\delta|\leq 2} \sup_{x \in \omega_{(|\alpha|-1)\varepsilon}} |D^{\gamma} a_{\delta}(x)| \leq A^{|\gamma|+1} \gamma ! \, (|\alpha|-1)^{-|\gamma|}$$

$\ast$ On remplace enfin la sommation sur les multi-indices γ par une sommation simple ce qui est possible en remarquant que le nombre de multi-indices γ vérifiant

$|\gamma| \leq |\alpha'|$ est majoré par $n^{|\alpha'|}$

et que $\binom{\alpha'}{\gamma} \leq \binom{|\alpha'|}{|\gamma|} = \binom{|\alpha|-2}{|\gamma|}$.

Ainsi :

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (P(x,D)\, D^{\alpha'} v) \leq A^{|\alpha'|+1} + \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} n^k \binom{|\alpha|-2}{k} A^{k+1} k \, ! \, (|\alpha|-1)^{-k} B^{|\alpha|-k+1}$$

Or $\binom{|\alpha|-2}{k} \dfrac{k\, !}{(|\alpha|-1)^k} \leq 1$ donc

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{(|\alpha|-1)\varepsilon} (P(x,D)\, D^{\alpha'} v) \leq B^{|\alpha|+1} \left(\frac{A^{|\alpha'|+1}}{B^{|\alpha|+1}} + A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k\right) \qquad \text{(iii)}$$

Regroupant (i), (ii) et (iii), on a alors :

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha|\varepsilon}(D^\alpha v) \leq C_1 \left\{ B^{|\alpha|-1} + n B^{|\alpha|} + B^{|\alpha|-1} \left[\frac{A^{|\alpha'|+1}}{B^{|\alpha|+1}} + A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k \right] \right\}$$

$$= B^{|\alpha|+1} \; C_1 \left\{ B^{-2} + n B^{-1} + \frac{A^{|\alpha'|+1}}{B^{|\alpha|+1}} + A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k \right\}$$

On choisit B tel que $\frac{nA}{B} < 1$ donc :

$$A \sum_{k=1}^{|\alpha|-2} B^{-k} A^k n^k < \frac{nA^2}{B} \times \frac{1}{1 - \frac{nA}{B}}$$

et ensuite B suffisamment grand pour que

$$\left\{ \quad \right\} \leq \frac{1}{C_1}$$

On obtient alors la relation (9) pour $|\alpha| = j+1$:

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{|\alpha|\varepsilon}(D^\alpha v) \leq B^{|\alpha|+1} .$$

Insistons bien sur le fait que le choix de B est indépendant de j.

Démonstration du théorème I.

Soit C > 0 tel que $\overline{\omega}_C \subset \omega$. Dans le lemme I.2, nous choisissons $\varepsilon = \frac{C}{|\alpha|}$ pour un multi-indice α fixé.

D'après (9), il vient

$$\frac{C^{|\alpha|}}{|\alpha|^{|\alpha|}} |D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq B^{|\alpha|+1}$$

donc $$|D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq \frac{B^{|\alpha|+1}}{C^{|\alpha|}} |\alpha|^{|\alpha|}$$

qui montre l'analyticité de v sur $\overline{\omega}_C$ (par (2')).

II. ANALYCITE AU BORD.

On démontre un résultat dans $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$.

On pose $x = (x',y)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}_+$.

Pour $0 < R < 1$ et $0 < \varepsilon < R$, nous notons maintenant

$$\omega = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \; |x| < R\}$$

$$\underline{\omega} = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \mid \; |x| < R$$

$$\omega_\varepsilon \quad \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \; |x| < R-\varepsilon\}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on pose $\alpha = (\alpha',k)$ avec $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Pour $P(x,D)$ opérateur elliptique dans $\overline{\omega}$ on pose :

$$P(x,D) = D_y^2 \quad \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0,2)}} a_\beta(x)\, D^\beta$$

Théorème II.

Soit $P(x,D)$ *un opérateur elliptique d'ordre 2 dans* $\overline{\omega}$, *à coefficients analytiques dans* $\overline{\omega}$. *Si* $v \in C^\infty(\overline{\omega})$ *avec* $v(x',o) = o$ *et* $P(x,D)v$ *analytique dans* $\overline{\omega}$ *alors* v *est analytique dans* $\overline{\omega}_c$ *quel que soit* $c \in \left]0,R\right[$.

Nous démontrons comme au I.

Lemme II.1.

Soit $v \in C^\infty(\overline{\omega})$ *telle que* $v(x',o) = o$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = 2$. *Il existe une constante* $C_1 > 0$ *telle que pour tout* ε, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon + \varepsilon_1 < R$:

$$\varepsilon^2 N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha v) \leq C_1 \{\varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(P(x,D)v) + \varepsilon \sum_{|\beta|=1} N_{\varepsilon_1}(D^\beta v) + N_{\varepsilon_1}(v)\} \tag{7'}$$

Nous utilisons la régularité pour le problème de Dirichlet homogène. $P(x,D)$ étant elliptique dans $\overline{\omega}$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$\forall\ u \in \mathcal{D}(\underline{\omega})$ avec $u(x',o)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq 2$

on ait :

$$|D^\alpha u|_{L^2(\omega)} \leq C\ |P(x,D)u|_{L^2(\omega)} .$$

On obtient ensuite (7') en appliquant à $u = \varphi\, v$ cette dernière inégalité.

Nous ne pouvons obtenir l'analogue du lemme I.2 pour toutes les dérivées, mais seulement pour les dérivées tangentielles. En effet, si $v \in C^\infty(\overline{\omega})$ avec $v(x',o)=o$ on a encore

$v \in C^\infty(\overline{\omega})$ avec $v(x',o) = o$, on a encore

$D^\alpha v \in C^\infty(\overline{\omega})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, si $\alpha = (\alpha',0)$ on a $D^\alpha v(x',o) = o$,

mais si D^α contient une dérivation normale d'ordre ≥ 1, on n'a plus à priori

$D^\alpha v(x',o) = 0$.

En appliquant (7'), en remplaçant v par $D^\alpha v$, $\alpha = (\alpha',0)$, on obtient :

Lemme II.2.

Soit $v \in C^\infty(\overline{\omega})$ *avec* $v(x',o) = o$ *telle que* $P(x,D) = f$ *soit analytique dans* $\overline{\omega}$.

Il existe une constante $B > o$ *telle que :*

$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ *vérifiant* $\alpha = (\alpha',k)$, $k \leq 2$, $\forall\ \varepsilon > 0$:

$$\varepsilon^{|\alpha|}\ N_{|\alpha|\varepsilon}\ (D^\alpha v) \leq B^{|\alpha|+1} \tag{9'}$$

Ce lemme permet de conclure que, pour $C > 0$ avec $\overline{\omega}_C \subset \underline{\omega}$, il existe une constante $B > 0$ telle que :

$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $\alpha = (\alpha',k)$, $k \leq 2$

$$|D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq B^{|\alpha|+1}\ |\alpha|\ ! \tag{10}$$

Le théorème II sera démontré si nous prouvons la relation (10) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Plus précisément, nous avons :

Lemme II.3.

Sous les hypothèses du lemme II.2, pour $C \in]0,R[$, *il existe deux constantes* E *et* $F > 0$ *telles que :*

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \alpha = (\alpha',k)\ :\ |D^\alpha v|_{L^2(\omega_C)} \leq E^{|\alpha'|+1}\ F^k\ |\alpha|\ ! \tag{11}$$

D'après (10), on sait que la relation (11) est vraie pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $k = 0,1,2$. Nous montrons qu'on peut choisir E et F telles que, si (11) est vraie à l'ordre k, quel que soit α', alors elle est aussi vraie à l'ordre $k+1$, quel que soit α', le choix de E et F étant indépendant de k.

Nous dérivons la relation $P(x,D)v = f$ à l'ordre $(\alpha', k-1)$:

$$D^{(\alpha',k+1)}v = D^{(\alpha',k-1)}f + \sum_{\substack{|\beta|\leq 2\\ \beta\neq(0,2)}} (a_\beta\ D^{(\alpha',k-1)}\ D^\beta v + [D^{(\alpha',k-1)},\ a_\beta]\ D^\beta v)$$

et nous majorons chacun des termes obtenus.

i) Par (5), on a :

$$|D^{(\alpha',k-1)}f|_{L^2(\omega_C)} \leq A^{|\alpha'|+k}\ (|\alpha'|+k-1)\ ! \tag{i}$$

ii) $$\sum_{\substack{|\beta|\leq 2\\ \beta\neq(0,2)}} a_\beta\ D^{(\alpha',k-1)}\ D^\beta\ u = \sum_{\beta=(\beta'_1,0)} a_\beta\ D^{(\alpha'+\beta'_1,k-1)}\ v + \sum_{\beta=(\beta'_2,1)} a_\beta\ D^{(\alpha'+\beta'_2,\ k)}v$$

Par l'hypothèse de récurrence :

$$|D^{(\alpha'+\beta'_1,k-1)}v|_{L^2(\omega_C)} \leq E^{|\alpha'+\beta'_1|+1}\ F^{k-1}\ (|\alpha'|+|\beta'_1|+k-1)\ !$$

$$|D^{(\alpha'+\beta'_2,k)}v|_{L^2(\omega_C)} \leq E^{|\alpha'|+|\beta'_2|+1}\ F^k\ (|\alpha'|+|\beta'_2|+k)\ !$$

En tenant compte de $|\beta'_1| \leq 2$, $|\beta'_2| \leq 1$ et en supposant $\underline{1 \leqslant E \leqslant F}$, on a :

$$\Big| \sum_{\substack{|\beta| \leq 2 \\ \beta \neq (0,2)}} a_\beta \, D^{(\alpha',k-1)} \, D^\beta v \Big|_{L^2(\omega_c)} \leq$$

$$E^{|\alpha'|+1} \, F^{k+1} \, (|\alpha'|+k+1) \, ! \, \frac{AE}{F} \, . \qquad \text{(ii)}$$

iii) Majorons les termes intervenant dans la commutation.

Par la formule de Leibnitz, on a :

$$\left[D^{(\alpha',k-1)}, a_\beta \right] D^\beta v = \sum_{\substack{\gamma \leq (\alpha',k-1) \\ \gamma \neq 0}} \binom{(\alpha',k-1)}{\gamma} \left(D^\gamma a_\beta \right) D^{(\alpha',k-1) - \gamma + \beta} v$$

donc, par (6) :

$$\left| \left[D^{(\alpha',k-1)}, a_\beta \right] D^\beta v \right|_{L^2(\omega_c)} \leq$$

$$\sum_{\substack{\gamma \leq (\alpha',k-1) \\ \gamma \neq 0}} \binom{|\alpha|+k-1}{|\gamma|} A^{|\gamma|+1} |\gamma| \, ! \, \left| D^{(\alpha',k-1) - \gamma + \beta} v \right|_{L^2(\omega_c)}$$

En posant $\gamma = (\gamma', \gamma'')$, $\beta = (\beta', \beta'')$, comme $k-1-\gamma'' + \beta'' \leq k$, on a par l'hypothèse de récurrence :

$$\left| D^{(\alpha',k-1)-\gamma+\beta} v \right|_{L^2(\omega_c)} \leq E^{|\alpha'-\gamma'+\beta'|+1} \, F^{k-1-\gamma''+\beta''} \, (|\alpha'| + k-1-|\gamma|+|\beta|) \, !$$

$$\leq E^{|\alpha'|+2 - |\gamma|} \, F^k \, (|\alpha'| + k+1 - |\gamma|) \, !$$

(en supposant $1 \leq E \leq F$).

On obtient alors

$$\left| \left[D^{(\alpha',k-1)}, a_\beta \right] D^\beta v \right|_{L^2(\omega_c)} \leq \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} n^j \, \frac{(|\alpha'|+k-1) \, \ldots \, (|\alpha'|+k-j)}{j \, !} \, A^{j+1} \, j \, ! \quad \times$$

$$\leq E^{|\alpha'|+2-j} \, F^k \, (|\alpha'|+k+1-j)! \leq E^{|\alpha'|+1} \, F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)! \, \frac{AE}{F} \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} \left(\frac{nA}{E} \right)^j$$

En désignant par N le nombre de multi-indices de longueur ≤ 2, on a alors :

$$\left| \sum_{\substack{|\beta|\leq 2 \\ \beta \neq (0,2)}} \left[D^{(\alpha',k-1)}, a_\beta \right] D^\beta v \right|_{L^2(\omega_c)} \tag{iii}$$

$$\leq E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)! \ \frac{NAE}{F} \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} \left(\frac{nA}{E}\right)^j$$

En regroupant (i), (ii) et (iii) :

$$|D^{(\alpha',k+1)} v|_{L^2(\omega_c)} \leq E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)! \times$$

$$\left\{ \frac{A^{|\alpha'|+k} (|\alpha'|+k-1)!}{E^{|\alpha'|+1} F^{k+1} (|\alpha'|+k+1)!} + \frac{AE}{F} + N \frac{AE}{F} \sum_{j=1}^{|\alpha'|+k-1} \left(\frac{nA}{E}\right)^j \right\}.$$

On choisit d'abord E telle que $\frac{nA}{E} < 1$, puis F telle que $\left\{ \quad \right\} \leq 1$.

Ceci termine la démonstration du lemme II.3 donc celle du théorème II.

On en déduit, par un difféomorphisme analytique, le résultat :

<u>Théorème III.</u>

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $P = P(x,D)$ *un opérateur elliptique dans* $\overline{\Omega}$, $\mathcal{O}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *On suppose que les coefficients de* P *sont analytiques dans* $\mathcal{O} \cap \overline{\Omega}$, *que* $\partial\Omega \cap \mathcal{O}$ *est analytique ; soit* u *une fonction* C^∞ *dans* $\mathcal{O} \cap \overline{\Omega}$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega \cap \mathcal{O}} = 0 \\ P(x,D)u \ \textit{analytique dans} \ \mathcal{O} \cap \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Alors la fonction u *est analytique dans* $\mathcal{O} \cap \overline{\Omega}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER : "Linear partial differential operators" - Springer Verlag 1963.

[2] MORREY et NIRENBERG : "On the analycity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations".
Comm. Pure Appl. Math. 10, 271-290 (1957).

[3] BAOUENDI et GOULAOUIC : "Analycité "jusqu'au bord" pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés".
C.R. Acad. Sc. PARIS (avril 1970).