C. GOULAOUIC
B. HANOUZET

Un résultat de régularité pour les solutions d'un système différentiel

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 3, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A3_0>

UN RESULTAT DE REGULARITE POUR LES SOLUTIONS D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL

par

C. GOULAOUIC et B. HANOUZET

I - Introduction

Nous démontrons des résultats de régularité (ou de longement) dans le cas d'un système différentiel particulier (intervenant dans l'étude des équations de Maxwell). La méthode paraît plus intéressante que les résultats obtenus ici.

I.1 Enoncé des résultats.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ suffisamment régulière (*). On désigne par $\vec{n}$ le champ de vecteurs unitaires normal à Γ, dirigé par exemple vers l'intérieur de Ω ; on désigne aussi par $\vec{A}$ un champ de vecteurs C^∞ dans $\mathbb{R}^3$, transversal à Γ en tout point de Γ.

On considère une fonction vectorielle $\vec{u}$ vérifiant :

$$(S)\quad \begin{cases} \vec{u} \in (L^2(\Omega))^3 & (1) \\ \operatorname{div}\vec{u} \in L^2(\Omega) & (2) \\ \operatorname{rot}\vec{u} \in (L^2(\Omega))^3 & (3) \end{cases}$$

On vérifie aisément que les relations (S) impliquent que $\vec{u}$ a une trace sur Γ , $\gamma_0\vec{u} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$.

On démontre les résultats :

Théorème 1. *Soit* $\vec{u}$ *vérifiant les hypothèses* (S) *et les conditions aux limites :*

$$\gamma_0\vec{u} \wedge \vec{n} = 0 \textit{ sur } \Gamma. \qquad (4)$$

Alors on a : $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3$.

Théorème 2 : *Soit* $\vec{u}$ *vérifiant les hypothèses* (S) *et la condition aux limites :*

$$\gamma_0\vec{u} \cdot \vec{A} = 0 \textit{ sur } \Gamma \qquad (5)$$

Alors on a : $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3$.

- -

(*) On peut considérer des ouverts non bornés, en particulier $\mathbb{R}^3$, ou "peu réguliers" (cf. démonstration).

I.2. Remarques

a) Ces résultats, du moins lorsque $\vec{A} = \vec{n}$ sur Γ, sont aussi obtenus par d'autres méthodes (cf. J.L. LIONS [2] et GOBERG [1]).

b) Les hypothèses (S) ne suffisent pas pour montrer que $\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3$. On peut, en effet, trouver une fonction f dans $H^1(\Omega)$ qui n'appartient pas à $H^2(\Omega)$ et telle que $\Delta f \in L^2(\Omega)$. Alors $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ vérifie les relations (S) et n'appartient pas à $(H^1(\Omega))^3$.

c) Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^3$ le système (S) implique $\vec{u} \in (H^1(\mathbb{R}^3))^3$, comme on le voit aisément par transformation de Fourier.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R}^2 \times \left]o,\infty\right[$, le théorème 1 et le théorème 2 dans le cas $\vec{A} = \vec{n}$, se démontrent en se ramenant par réflexion au cas de $\mathbb{R}^3$.

d) Le système (S) est local, en ce sens que : quels que soient $\vec{u}$ vérifiant (S) et $\Psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ la fonction $\Psi\vec{u}$ vérifie (S).

e) Les hypothèses (S) impliquent la régularité à l'intérieur. En effet, si $\vec{u}$ vérifie (S) et Ψ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\Psi\vec{u}$ vérifie (S) dans Ω, donc $\widetilde{\Psi\vec{u}}$ (obtenu en prolongeant $\Psi\vec{u}$ par o sur $\complement\Omega$) vérifie (S) dans $\mathbb{R}^3$, donc $\Psi\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3$.

f) Les problèmes traités, dans le cas où Ω est un ouvert convenable et rot $\vec{u} = o$ (dans (2)), peuvent s'interpréter comme suit : il existe $f \in H^1(\Omega)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$; le théorème 1 correspond à la régularité du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} f & H^1_o(\Omega) \\ \Delta f & L^2(\Omega) \end{cases}$$

Le théorème 2 correspond à la régularité du problème à dérivée oblique (non dégénérée).

I.3. Méthode

La méthode utilisée consiste à "dériver" le système (S) et à se ramener à des problèmes aux limites elliptiques pour les diverses composantes, soit en toutes les variables, soit en les variables tangentielles seulement.

Cette méthode est locale et ne nécessite pas de démonstration de la densité des fonctions régulières.

Enfin, on peut constater que la méthode n'est pas subordonnée à la forme particulière des équations de l'exemple traité ; elle peut s'adapter à des systèmes bien plus généraux, à coefficients éventuellement variables

II - Démonstration du théorème 1.

On suppose les hypothèses (S) et $\gamma_o \vec{u} \wedge \vec{n} = o$ sur Γ.

On sait déjà qu'il suffit de démontrer la régularité au bord.

On pose $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ avec $\vec{v}_3$ transversal à Γ et $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tangents à Γ en tout point ; on note :

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, u_j \quad \text{et} \quad u_j = \sum_{i=1}^{3} \beta_{ji}\, v_i .$$

Les hypothèses impliquent, pour $i = 1,2$:

$$\begin{cases} v_i \in L^2(\Omega) \\ \Delta v_i \in H^1(\Omega) \\ \gamma_o v_i = o \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

<u>donc $v_1 \in H^1(\Omega)$ et $v_2 \in H^1(\Omega)$</u>.

On déduit alors de (S) les relations :

$$\begin{cases} \beta_{13}\, D_1\, v_3 + \beta_{23}\, D_2\, v_2 + \beta_{33}\, D_3\, v_3 \in L^2(\Omega) \\ \beta_{33}\, D_2\, v_3 - \beta_{23}\, D_3\, v_3 \in L^2(\Omega) \\ \beta_{13}\, D_3\, v_3 - \beta_{33}\, D_1\, v_3 \in L^2(\Omega) \\ \beta_{23}\, D_1\, v_3 - \beta_{13}\, D_2\, v_3 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

L'un des coefficients β_{13}, β_{23}, β_{33} est non nul ; supposons que c'est β_{33} au voisinage du point de Γ où on fait l'étude. On obtient :

$$((\beta_{13})^2 + (\beta_{23})^2 + (\beta_{33})^2)\, D_3\, v_3 \in L^2(\Omega),$$

donc $D_3\, v_3 \in L^2(\Omega)$, puis $D_1\, v_3 \in L^2(\Omega)$ et $D_2\, v_3 \in L^2(\Omega)$;

donc $\underline{\vec{u} \in (H^1(\Omega))^3}$.

III - Démonstration du théorème 2.

On suppose les hypothèses (S) et $\gamma_o \vec{u} \,.\, \vec{A} = o$ sur Γ.

Il suffit encore de montrer la régularité de $\vec{u}$ au bord.

On note $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{n} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et on a fait l'hypothèse que $\vec{A}$ est transversal à Γ en tout point de Γ, c'est-à-dire

$$\vec{A}.\vec{n} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\ a_i \neq o \text{ en tout point de } \Gamma.$$

1°) On fait un changement de fonctions :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \\ v_3 = a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + a_3\, u_3, \end{cases}$$

et les hypothèses (S) et (5) impliquent alors :

$$\begin{cases} v_3 \in L^2(\Omega) \\ \Delta v_3 \in H^{-1}(\Omega) \\ \gamma_o v_3 = o \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

ce qui implique : $\underline{v_3 \in H^1_o(\Omega)}$ (6)

Les fonctions v_1 et v_2 vérifient les relations :

$$(S')\quad \begin{cases} v_1 \in L^2(\Omega)\ ;\ v_2 \in L^2(\Omega) & (7) \\ a_3\, D_1\, v_1 + a_3\, D_2\, v_2 - a_1\, D_3\, v_1 - a_2\, D_3\, v_2 \in L^2(\Omega) & (8) \\ D_1\, v_2 - D_2\, v_1 \in L^2(\Omega) & (9) \\ a_3\, D_3\, v_2 + a_2\, D_2\, v_2 + a_1\, D_2\, v_1 \in L^2(\Omega) & (10) \\ a_3\, D_3\, v_1 + a_1\, D_1\, v_1 + a_2\, D_1\, v_2 \in L^2(\Omega). & (11) \end{cases}$$

2°) Etude locale au voisinage d'un point $x \in \Gamma$.

On peut supposer qu'au point x, on a : $a_3(x)\ \alpha_3(x) \neq o$.

Soit φ une fonction définie au voisinage de Γ, telle que $\varphi(y) = o$ pour $y \in \Gamma$ et $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi$ sur Γ. On peut trouver un voisinage $\mathcal{O}$ de x tel que $a_3(y)\ D_3\ \varphi(y) \neq o$ pour tout $y \in \mathcal{O}$. Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \cap \overline{\Omega})$; $\Psi\vec{v}$ vérifie aussi les relations (S') ; on garde les mêmes notations $\Psi\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et on se propose de démontrer que v_1 et v_2 appartiennent à $H^1(\Omega)$.

On introduit un difféomorphisme Θ de $\overline{\Omega} \cap \mathcal{O}$ sur un ouvert de $\overline{\mathbb{R}^3_+}$, pour séparer les variables tangentielles et la variable normele :

$$\Theta \begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = \varphi(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

On pose $v_i(x_1, x_2, x_3) = w_i(X_1, X_2, X_3)$ pour $i = 1,2$; on a :

$$\begin{cases} D_1\ v_i = D_1\ W_i + \alpha_1\ D_3\ W_i \\ D_2\ v_i = D_2\ W_i + \alpha_2\ D_3\ W_i \\ D_3\ v_i = \alpha_3\ D_3\ W_i. \end{cases}$$

Compte tenu de $a_3\ \alpha_3 \neq o$, le système (S') devient :

$$\begin{cases} W_1 \in L^2\ ;\ W_2 \in L^2 \quad (*) & (12) \\ (a_3\alpha_1 - a_1\alpha_3) D_3 W_1 + (a_3\alpha_2 - a_2\alpha_3) D_3 W_2 + a_3 (D_1 W_1 + D_2 W_2) \in L^2 & (13) \\ D_1\ W_2 + \alpha_1\ D_3\ W_2 - D_2\ W_1 - \alpha_2\ D_3\ W_1 \in L^2 & (14) \\ (a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3) D_3 W_2 + a_1 D_2 W_1 + a_2 D_2 W_2 + a_1\alpha_2 D_3 W_1 \in L^2 & (15) \\ (a_1\alpha_1 + a_3\alpha_3) D_3 W_1 + a_1 D_1 W_1 + a_2 D_1 W_2 + a_2\alpha_1 D_3 W_1 \in L^2 & (16) \end{cases}$$

De (14) et (15) on tire :

$$(\vec{A}.\vec{n})\ D_3\ W_2 + a_1\ D_1\ W_2 + a_2\ D_2\ W_2 \in L^2 \qquad (17)$$

De (14) et (16) on tire :

$$(\vec{A}.\vec{n})\ D_3\ W_1 + a_1\ D_1\ W_1 + a_2\ D_2\ W_1 \in L^2 \qquad (18)$$

(*) On note L^2 au lieu de $L^2(\mathbb{R}^3_+)$.

On élimine $D_3\, W_1$ et $D_3\, W_2$ entre (14) (17) (18), et entre (13) (17) (18) ; on obtient les relations :

$$\begin{cases} a\, D_1\, W_1 + b\, D_2\, W_2 + c\, D_1\, W_2 + d\, D_2\, W_1 \in L^2 & (19) \\ e\, D_1\, W_1 + f\, D_2\, W_2 + g\, D_1\, W_2 + h\, D_2\, W_1 \in L^2 & (20) \\ \qquad\qquad \text{avec} & \\ a = a_1\, \alpha_2 \qquad\qquad e = a_3(a_2\alpha_2+a_3\alpha_3) + a_1^2\, \alpha_3 & \\ b = -a_2\, \alpha_1 \qquad\qquad f = a_3(a_1\alpha_1+a_3\alpha_3) + a_2^2\, \alpha_3 & \\ c = a_2\alpha_2+a_3\alpha_3 \qquad\qquad g = a_1(a_2\alpha_3-a_3\alpha_2) & \\ d = -(a_1\alpha_1+a_3\alpha_3) \qquad\qquad h = a_2(a_1\alpha_3-a_3\alpha_1). & \end{cases}$$

Des relations (19) (20), on déduit :

$$\mathcal{A}\, W_1 \equiv \left[(fD_2+gD_1)\ (aD_1+dD_2) - (bd_2+cD_1)\ (eD_1+hD_2)\right]\ W_1 \in L^2(H^{-1}(\mathbb{R}^2)) \qquad (21)$$

$\mathcal{A}$ est elliptique (en X_1,X_2) si et seulement si :

$$4\Delta' = (gd+af-be-ch)^2 - 4(ga-ce)\ (df-bh) < o\ , \qquad (22)$$

On explicite :

$$\begin{aligned} ga-ce &= -a_3\ \left[\alpha_2^2 a_1^2 + (a_2\alpha_2+a_3\alpha_3)^2 + \alpha_3^2\ a_1^2\right] \\ &= -a_3\ \left[(\vec{A}.\vec{n})^2 + a_1^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) - 2a_1\alpha_1(\vec{A}.\vec{n})\right] \end{aligned}$$

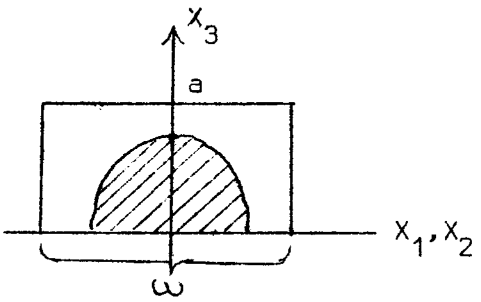
$$\begin{aligned} df-hb &= -\ a_3\ \left[(a_1\alpha_1+a_3\alpha_3)^2 + \alpha_3^2\ a_2^2 + \alpha_1^2\ a_2^2\right] \\ &= -a_3\ \left[(\vec{A}.\vec{n})^2 + a_2^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) - 2a_2\alpha_2(\vec{A}.\vec{n})\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gd+af-be-ch &= a_3\left[2a_1\alpha_2(a_1\alpha_1+a_3\alpha_3) + 2a_2\alpha_1(a_2\alpha_2+a_3\alpha_3) - 2a_1a_2\alpha_3^2\right] \\ &= 2a_3\ \left[(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\ (\vec{A}.\vec{n}) - a_1a_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\right] \end{aligned}$$

$$\Delta' = -a_3^2(\vec{A}.\vec{n})^2\ \left[\alpha_3^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2) + (\vec{A}.\vec{n})^2\right]$$

<u>On a bien toujours $\Delta' < o$.</u>

Soit maintenant $\omega \times [o,a[$ un ouvert de $\overline{R^3_+}$ contenant le support de W_1.



Presque partout en $X_3 \in [o,a]$, on a :

$$\begin{cases} W_1 \in L^2(\omega) \\ \mathcal{A} W_1 \in H^{-1}(\omega) \\ \gamma_o W_1 = o \quad \text{sur} \quad \partial\omega \times [o,a] \end{cases}$$

On en tire que, pour presque tout $X_3 \in [o,a]$, la fonction $W_1(.,.,X_3)$ est dans $H^1(\omega)$ et que l'on a :

$$|W_1(.,.,X_3)|_{H^1(\omega)} \leq C \{ |W_1(.,.,X_3)|_{L^2(\omega)} + |\mathcal{A} W_1(.,.,X_3)|_{H^{-1}(\omega)} \},$$

la constante C pouvant être choisie indépendante de $X_3 \in [o,a]$ puisque les coefficients de $\mathcal{A}$ sont continus.

En élevant au carré et en intégrant sur $[o,a]$ l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$W_1 \in L^2(H^1(\omega)). \qquad (23)$$

Les relations (18) (23) impliquent :

$$W_1 \in H^1.$$

De même, on obtient :

$$W_2 \in H^1,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 2.

<u>Remarque</u> : Dans le cas où $\vec{A} = \vec{n}$ sur Γ, les calculs ci-dessus deviennent très simples.

<u>Références</u> : |1| GOBERG (non publié)

|2| J. L. LIONS (livre à paraître)