PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

P. BOERO

R. PAVEC

Coercivité de formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 2, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A2_0>

Coercivité de formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids.

par

P. BOERO et R. PAVEC

Le but de ce travail est d'étudier la coercivité de formes sesquilinéaires intégro-différentielles "formellement positives" dégénérées sur la frontière de l'ouvert. Dans la première partie, on suppose que l'ouvert est borné et à frontière de classe C^{∞} et on étend les résultats obtenus par Aronszajn dans le cas de formes du même type définies sur $H^m(\Omega)$. Dans la deuxième partie, on suppose l'ouvert moins régulier, et on obtient une caractérisation des formes coercives d'ordre 2 et quelques résultats partiels dans le cas de formes d'ordre 2m. Dans les deux cas, la méthode de démonstration consiste à se ramener à l'étude de formes sur l'ouvert $\mathbb{R}^n_+$ (1^e partie) où $\mathbb{R}^{n-j} \times (R_+)^j$, (2^e partie).

I - FORMES DEFINIES SUR UN OUVERT BORNE A FRONTIERE C^∞.

1. Notations, hypothèses et énoncé des résultats.

Soit ψ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et Ω l'ouvert défini par :

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) > 0\}$$

On suppose que cet ouvert est non vide et borné et qu'en tout point de la frontière Γ de Ω la différentielle de ψ est non nulle. r étant un nombre réel positif ou nul, on pose pour tout $x \in \Omega$:

$$\varphi(x) = \psi^r(x)$$

Soit D^α , $\alpha \in \mathbb{N}^n$, l'opérateur différentiel :

$$D^\alpha = \prod_{j=1}^{n} D_j^{\alpha_j} , \; D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Définissons les espaces :

$$W_\varphi^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n , \; |\alpha| \leq m : \; \varphi^{1/2}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

où $m \in \mathbb{N}$. On munit $W_\varphi^m(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|^2_{W_\varphi^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\varphi^{1/2}\, D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} ,$$

et on note :

$$|u|^2_{W_\varphi^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = m} \|\varphi^{1/2}\, D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Soient $P_k(x,\xi)$, $k = 1,\dots,N$, des polynômes en ξ de degré $\leq m$. On pose :

$$P_k(x,\xi) = P'_k(x,\xi) + R_k(x,\xi)$$

où P'_k est la partie principale de P_k. On suppose que les coefficients de P'_k sont continus sur $\overline{\Omega}$ et ceux de R_k dans $L^\infty(\Omega)$.

Posons : pour tout $u,v \in W_\varphi^m(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \varphi(x) \sum_{k=1}^{N} P_k(x,D)u\, \overline{P_k(x,D)v}\, dx.$$

Définition : On dit que la forme sesquilinéaire a est coercive sur $W_{\varphi}^{m}(\Omega)$ s'il existe $\alpha_o > o$ et $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a(u,u) \geq \alpha_o \|u\|^2_{W_{\varphi}^{m}(\Omega)} - \lambda_o \|u\|^2_{W_{\varphi}^{o}(\Omega)} .$$

On donne des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les polynômes P_k, pour que a soit coercive sur $W_{\varphi}^{m}(\Omega)$. Soit :

$$A(x,\xi) = \sum_{k=1}^{N} |P'_k(x,\xi)|^2 \quad , \quad x \in \Omega \ , \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

THEOREME 1 : Pour que a soit coercive sur $W_{\varphi}^{m}(\Omega)$, il faut et il suffit que :

(A) Pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n - \{o\}$, on ait $A(x,\xi) \neq o$.

(B) Pour tout $x \in \Gamma$ et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{o\}$, de la forme $\xi = \xi_1 + \tau\,\xi_2$, où $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ et est tangent en x à Γ et ξ_2 est le vecteur unitaire de la normale en x à Γ, $\tau \in \mathbb{C}$, on ait $A(x,\xi) \neq o$.

Ce résultat a été démontré par Aronszajn [3] dans le cas r=o, c'est-à-dire pour des formes définies sur $H^m(\Omega)$. On suppose donc dans la suite que r est strictement positif. Au § 6, on utilisera la proposition suivante (Agmon [1] , Aronszajn [3]).

Proposition 1. Soient Q_k , $k = 1,\dots,N$ des polynômes homogènes de degré m, à coefficients constants tels que :

pour tout $\xi = (\xi',\xi_n) \neq o$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi)|^2 \neq o$.

Alors la forme :

$$A(u,v) = \int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{N} Q_k(D)u \ \overline{Q_k(D)v} \ dx$$

définie sur $H^m(\Omega_t)$, avec $\Omega_t = R^{n-1} \times \,]t \ , +\infty[$, vérifie :

$$\forall\ u \in H^m(\Omega_t) : A(u,u) \geq \alpha\ |u|^2_{H^m(\Omega_t)} .$$

et la constante α est indépendante de t.

2. La condition (A) est nécessaire.

Si a est coercive sur $W^m_\varphi(\Omega)$ alors pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$ (i.e. $\overline{\Omega}' \subset \Omega$) la forme :

$$A_{\Omega'}(u,v) = \int_{\Omega'} \sum_{k=1}^{N} P_k(x,D)u \ \overline{P_k(x,D)v} \ dx$$

est coercive sur $H^m_o(\Omega')$. Ceci résulte immédiatement du fait que si on prolonge $u \in H^m_o(\Omega')$ par o dans $\Omega - \Omega'$ on obtient un élément de $W^m_\varphi(\Omega)$ et qu'il existe $m>o$ et $M<+\infty$ tels que

$$\forall\ x \in \Omega' : m \leq \varphi(x) \leq M.$$

La condition (A) résulte alors de la réciproque de l'inégalité de Gårding.

On suppose maintenant la condition (A) réalisée et il reste à démontrer l'équivalence de (B) et de la coercivité de a. Pour cela, on va se ramener à R^n_+. Explicitons d'abord les hypothèses faites sur Ω.

3. Explicitation des hypothèses faites sur Ω.

Soient :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

$$\Sigma_+ = \{x \in \Sigma \mid x_n > o\}$$

$$\Sigma_o = \{x \in \Sigma \mid x_n = o\}.$$

Nous allons montrer que pour tout $x_o \in \Gamma$ il existe un voisinage V_o de x_o et un difféomorphisme Θ de V_o dans Σ_o tel que le poids ψ se transforme en x_n et que les hypothèses (A) et (B) soient conservées.

Supposons $x_o = o$. Par une transformation unitaire de matrice A, on transforme Ω en Ω' de frontière Γ' tel que ce plan tangent en o a Γ' soit $R^{n-1} \times \{o\}$. Posons pour $x' \in \Omega'$:

$$(1) \qquad \begin{cases} y_i = x'_i & 1 \leq i \leq n-1 \\ y_n = \psi(A^{-1}(x')) = \psi_1(x') \end{cases}$$

La différentielle de cette application en x' a pour matrice :

$$J(x') = \begin{pmatrix} & I & \begin{matrix} o \\ \vdots \\ o \end{matrix} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x'_2} \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x'_n} \end{pmatrix}$$

I étant la matrice unité d'ordre n-1. La différentielle de ψ étant non nulle en tout point de Γ , on en déduit :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x'_n}\ (o) \neq o \quad .$$

Il existe donc un voisinage ouvert V_o de x_o tel que $J(x')$ inversible sur AV_o. En composant A et l'application (1), on obtient un difféomorphisme Θ possédant les propriétés suivantes :

- $v_o \cap \Omega \xrightarrow{\Theta} \Sigma_+$.
- $v_o \cap \Gamma \xrightarrow{\Theta} \Sigma_o$.
- La différentielle de Θ au point $x \in V_o$ a pour matrice :

$$D(x) = J(A(x)) \circ A$$

- $\psi(\Theta^{-1}(y)) = y_n$, $y \in \Theta(v_o)$

Pour tout u satisfaisant à :

(2) $\qquad u \in W^m_\psi(\Omega)$, supp $u \subset V_o \cap \overline{\Omega}$

posons :

(3) $\qquad u \circ \Theta^{-1} = v$

En prolongeant v par o à R^n_+, on a :

(4) $\qquad v \in W^m_{x_n^r}(R^n_+)$, supp $v \subset \Theta(v_o \cap \overline{\Omega})$

et il existe une constance $c > o$ telle que :

(5) $$\frac{1}{c}\ \|v\|^2_{W^m_{x_n^r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|u\|^2_{W^m_\psi(\Omega)} \leq c\ \|v\|^2_{W^m_{x_n^r}(\mathbb{R}^n_+)}$$

pour tout u satisfaisant à (2).

Posons :

$$b(v,v) = a(u,u) = a(v \circ \Theta\ ,\ v \circ \Theta)$$

$$= \int_\Omega \varphi(x) \sum_{k=1}^{N} |P_k(x,D)(v \circ \Theta)|^2\, dx.$$

Faisons le changement de variable $\Theta(x) = y$. Il vient en prolongeant toutes les fonctions par o à $\mathbb{R}^n_+$:

(6) $$b(v,v) = \int_{R^n_+} y_n^r \sum_{k=1}^{N} |P_k(\Theta^{-1}(y),D)\ (v \circ \Theta)\ (\Theta^{-1}(y))|^2\ |J|\ dy$$

où $|J| = |D(x)|$, jacobien du changement de variable est non nul. D'après la forme de dérivation des fonctions composées :

$$b(v,v) = \int_{R^n_+} y_n^r\ |J| \sum_{k=1}^{N} |Q_k(y,D)v|^2\ dy.$$

Avec

$$(Q_k(y,D)v)o\Theta = P_k(\Theta^{-1}(y),D)\ (vo\Theta)$$

pour toute fonction v de classe C^∞ par exemple. Prenons :

$$v(y) = e^{i\lambda\xi y}\ \ ,\ \xi \in \mathbb{C}^n\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$Q_k(y,D)v = Q_k(y,\lambda\xi)v$$

On a :

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}\ vo\Theta(x) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial \cdot \partial_j(x)}{\partial\ x_i}\right) vo\Theta(x) = \lambda\ \xi'_j\ vo\Theta(x)\quad ;\quad y = \Theta(x).$$

en posant

$$\xi' = (\xi'_i)_{i=1,\dots,n} = {}^tD(x)\xi.$$

En itérant, on en déduit :

$$D^\alpha\ vo\Theta(x) = (\lambda^{|\alpha|}\ \xi'^\alpha + R_\alpha(\xi',\lambda))\ vo\Theta(x)$$

où $R_\alpha(\xi',\lambda)$ est un polynôme de degré $<|\alpha|$ en λ; soit

$$P_k(x,D)\ vo\Theta(x) = \left[\lambda^m\, P'(x,\xi') + R_k(\xi',\lambda)\right]\ vo\Theta(x)$$

où R_k est de degré $<$ m en λ. On déduit donc :

$$Q_k(y,\lambda\xi) = \lambda^m\, P'(x,\xi') + R_k(\xi',\lambda)\ ,\ y = \Theta(x).$$

Donc en divisant par λ^m et en prenant la limite quand $\lambda\to+\infty$,

$$(7)\qquad \begin{cases} Q'_k(y,\xi) = P'_k(x,\xi') \\ \xi' = {}^tD(x)\,\xi \\ y = \Theta(x) \end{cases}$$

La matrice ${}^tD(x)$ étant non singulière, l'hypothèse (A) se conserve donc.

Soit $y\in\Sigma_o$ et T et N les sous-espaces tangent et normal à Σ_o :

$$T = \{x\in R^n \mid x_n = o\}$$

$$N = \{x\in R^n \mid x_n = \lambda\, e_n \,,\; e_n = (o,\dots,o,1)\}.$$

Soient N' et T' les sous-espaces transformés de N et T par ${}^tD(x)$; $x=\Theta^{-1}(y)$.

Puisque ${}^tD(x)$ est non singulière N' et T' engendrent R^n. Vérifions que T' est la direction de la normale en $x = \Theta^{-1}(y)$ à Γ. On a :

$$e'_n = {}^tD(x)\, e_n$$

Soit :

$$e'_n = {}^tA\; {}^tJ(x)\, e_n = A^{-1}({}^tJ(Ax)e_n) \qquad ,$$

Or

$${}^tJ(Ax)e_n = \frac{\partial\psi'}{\partial x'_n}(Ax)\,.\,e_n$$

donc est normal à Γ' en Ax. A étant unitaire e'_n est donc orthogonal à Γ en x.

L'hypothèse (B) se conserve donc puisque ${}^tD(x)$ transforme la normale en y à Σ_o en la normale à Γ en $x = \Theta^{-1}(y)$.

D'après ce qui précède, on peut donc trouver un recouvrement ouvert de $\overline{\Omega}$

$$(O_i)_{o\leq i\leq p}$$

tel que : - $O_o \Subset \Omega$

- O_i est voisinage d'un point x_i de Γ et il existe un difféomorphisme Θ_i de O_i dans Σ possédant les propriétés de Θ énoncées précédemment.

On utilisera dans la suite une partition de l'unité :

$$(\varphi_i)_{i=o,p} \;,\; \varphi_i \in \mathcal{D}(O_i)$$

avec :

$$\sum_{i=o}^{p} \varphi_i^2(x) = 1, \text{ pour tout } x\in\overline{\Omega}.$$

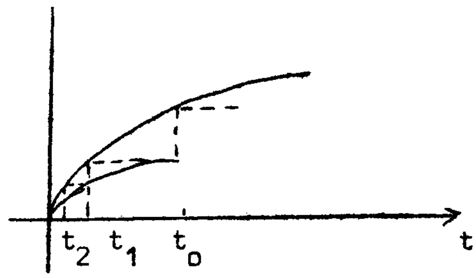
Dans R_+^n le poids se transforme en x_n^r. Il existe une fonction en escalier h définie sur $[o,1]$ telle que :

(8) $\forall\ t \in [o,1]\ ,\ \frac{1}{2}\, t^r \leq h(t) \leq t^r.$

h peut se construire de la manière suivante. Soit $(t_i)_{i=o,..,\infty}$ la suite définie par :

$$t_o = 1$$

$$t_{i+1}^r = \frac{1}{2}\, t_i^r \ ,\ i \geq 1$$



Cette suite tend vers O. En effet :

$$t_{i+1} = (\frac{1}{2})^{1/r}\ t_i = (\frac{1}{2})^{\frac{i+1}{r}}$$

Posons :

$$h(o) = o$$

$$h(t) = t_{i+1}^r \text{ pour } t \in [t_{i+1}, t_i]$$

Soit

$$y(t) = \begin{cases} o & \text{si } t < o \\ 1 & \text{si } t \geq o. \end{cases}$$

Alors :

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\ y(t-t_i)\ ,\ \alpha_i = t_i^r - t_{i+1}^r = \frac{1}{2}\, t_i^r > o.$$

Au paragraphe 4, on démontre deux lemmes qui vont permettre de "localiser" le problème en utilisant la partition de l'unité qui vient d'être introduite plus haut.

4 - Inégalités entre les normes de $W^m_\varphi(\Omega)$, $W^{m-1}_\varphi(\Omega)$, $W^o_\varphi(\Omega)$.

Lemme 4.1. Soit b une forme sesquilinéaire sur $W^m_\varphi(\Omega)$, du type

$$(1)\quad b(u,v) = \int_\Omega \varphi(x) \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dx \;;\; a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega).$$

$(O_i)_{o\leq i\leq p}$ et $(\varphi_i)_{o\leq i\leq p}$ étant les ouverts et les fonctions introduites au § 3, on a pour tout $u \in W^m_\varphi(\Omega)$:

$$(2)\quad b(u,u) = \sum_{i=o}^{p} b(\varphi_i u, \varphi_i u) + R(u)$$

et

$$(3)\quad |R(u)| \leq C\, \|u\|_{W^m_\varphi(\Omega)}\, \|u\|_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)}.$$

La formule de Leibinz appliquée au développement de $b(\varphi_i u, \varphi_i u)$ montre que $R(u)$ est une somme de termes de la forme :

$$\int_\Omega \varphi(x)\, f(x)\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta u}\, dx$$

où

$$f \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \quad |\alpha|\leq m,\ |\beta|\leq m,\ |\alpha| + |\beta| \leq 2m-1.$$

La majoration (3) résulte donc de l'inégalité de Schwarz.

Lemme 4.2. Pour tout $\varepsilon>o$, il existe des constantes $c(\varepsilon)$ et $c_1(\varepsilon)$ telles que pour tout $W^m_\varphi(\Omega)$:

$$(4)\quad \|u\|^2_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} \leq \varepsilon\, \|u\|^2_{W^m_\varphi(\Omega)} + c(\varepsilon)\, \|u\|^2_{W^o_\varphi(\Omega)}$$

$$(5)\quad \|u\|_{W^m_\varphi(\Omega)}\, \|u\|_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} \leq \varepsilon\, \|u\|^2_{W^m_\varphi(\Omega)} + c_1(\varepsilon)\, \|u\|^2_{W^o_\varphi(\Omega)}.$$

Remarquons d'abord que (5) résulte de (4) et de :

$$2\, \|u\|_{W^m_\varphi(\Omega)}\, \|u\|_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} \leq \eta\, \|u\|^2_{W^m_\varphi(\Omega)} + \frac{1}{\eta}\, \|u\|^2_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} \;;\; \eta>o.$$

La démonstration de (4) se fait en ramenant à R^n_+. On utilisera le lemme :

Lemme 4.3. L'inégalité (4) est vérifiée dans l'espace :

$$\{u \in W^m_{x_n^r}(R^n_+)\ ;\ \mathrm{supp}\, u \subset \Sigma_+ \cup \Sigma_o\}.$$

En effet, en utilisant la fonction étagée h introduite au § 3:

$$\|u\|^2_{W^{m-1}_{x_n^r}(R^n_+)} = \int_{R^n_+} x_n^r \Big(\sum_{|\alpha|\le m-1} |D^\alpha u|^2\Big)\, dx$$

$$\le 2 \int_{R^n_+} h(x_n) \Big(\sum_{|\alpha|\le m-1} |D^\alpha u|^2\Big)\, dx$$

$$\le 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \int_{t_i}^{\infty} \int_{R^{n-1}} \sum_{|\alpha|\le m-1} |D^\alpha u|^2\, dx.$$

On obtient donc :

$$(6)\quad \|u\|^2_{W^{m-1}_{x_n^r}(R^n_+)} \le 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|u\|^2_{H^{m-1}(R^{n-1} \times]t_i,+\infty[)}.$$

Or on sait que pour tout $\varepsilon > o$ il existe $c(\varepsilon)$

$$\|u\|^2_{H^{m-1}(R^{n-1} \times]t_i,+\infty[)} \le \varepsilon \|u\|^2_{H^m(R^{n-1} \times]t_i,+\infty[)} + c(\varepsilon) \|u\|^2_{L^2(R^{n-1} \times]t_i,+\infty[)}$$

et la constante $c(\varepsilon)$ ne dépend pas de i. En reportant dans (6), il vient donc :

$$\|u\|^2_{W^{m-1}_{x_n^r}(R^n_+)} \le 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Big(\varepsilon \|u\|^2_{H^m(R^{n-1} \times]t_i,+\infty[} + c(\varepsilon) \|u\|^2_{L^2(R^{n-1} \times]t_i,+\infty[)}\Big)$$

$$\le 2\varepsilon \int_{R^n_+} h(x_n) \Big(\sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha u|^2\Big)\, dx + 2c(\varepsilon) \int_{R^n_+} h(x_n)\, |u(x)|^2\, dx$$

$$\le 2\Big(\varepsilon \|u\|^2_{W^m_{x_n^r}(R^n_+)} + c(\varepsilon) \|u\|^2_{W^o_{x_n^r}(R^n_+)}\Big).$$

Démonstration du lemme 4.2.

On fait une démonstration par récurrence sur m. D'après le lemme 4.1 :

$$\|u\|^2_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} = \sum_{i=o}^{p} \|\varphi_i u\|^2_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} + R(u)$$

avec

$$|R(u)| \leq c \; \|u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} \; \|u\|_{W_\varphi^{m-2}(\Omega)}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence et (5) :

(7) $$|R(u)| \leq c.\varepsilon \; \|u\|^2_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} + c.c_1(\varepsilon) \; \|u\|^2_{W_\varphi^{o}(\Omega)}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, on obtient donc ;

(8) $$\|u\|^2_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} \leq 2 \sum_{i=o}^{p} \|\varphi_i u\|^2_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} + c_1 \; \|u\|^2_{W_\varphi^{o}(\Omega)} .$$

La fonction $\varphi_o u \in H^m(\Omega)$. Donc en posant $m = \inf_{x \in O_o} \varphi(x)$, $M = \sup_{x \in O_o} \varphi(x)$,

on a :

$$\|\varphi_o u\|^2_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} \leq M \; \|\varphi_o u\|^2_{H^{m-1}(\Omega)} \leq M(\varepsilon \; \|\varphi_o u\|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \; \|\varphi_o u\|^2_{L^2(\Omega)})$$

$$\leq \frac{M\varepsilon}{m} \; \|\varphi_o u\|^2_{W_\varphi^{m}(\Omega)} + \frac{MC(\varepsilon)}{m} \; \|\varphi_o u\|^2_{W_\varphi^{o}(\Omega)}$$

Pour $i \geq 1$, en utilisant les difféomorphismes Θ_i introduits au § 3 posons :

$$v_i = (\varphi_i u) \circ \Theta_i^{-1}$$

D'après le lemme 4.3 :

$$\|v_i\|^2_{W_{x_n^r}^{m-1}(R_+^n)} \leq \varepsilon \; \|v_i\|^2_{W_{x_n^r}^{m}(R_+^n)} + c(\varepsilon) \; \|v_i\|^2_{W_{x_n^r}^{o}(R_+^n)}$$

et d'après les inégalités (3.5), on a donc :

$$\|\varphi_i u\|^2_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} \leq \varepsilon \; \|\varphi_i u\|^2_{W_\varphi^{m}(\Omega)} + c_2(\varepsilon) \; \|\varphi_i u\|_{W_\varphi^{o}(\Omega)} .$$

En reportant dans (8), on obtient donc :

(9) $$\|u\|^2_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} \leq \varepsilon \sum_{i=o}^{p} \|\varphi_i u\|^2_{W_\varphi^{m}(\Omega)} + c_3(\varepsilon) \; \|u\|_{W_\varphi^{o}(\Omega)}$$

puisque

$$\sum_{i=o}^{p} \|\varphi_i u\|^2_{W^{o}(\Omega)} = \|u\|^2_{W_\varphi^{o}(\Omega)} .$$

L'inégalité (4) résulte alors de (9) en remarquant que :

$$\|\varphi_i u\|^2_{W^m_\varphi(\Omega)} \leq c \ \|u\|^2_{W^m_\varphi(\Omega)} \quad , \quad i = o,\ldots,p$$

Pour m=1, l'inégalité (4) est immédiate : il suffit de prendre $c(\varepsilon) = 1$ pour tout ε.

Remarque 4.1. : L'inégalité (4) est vérifiée dans l'espace :

$$\{u \in W^m_\xi \ (R^{n-1} \times \,]o,1[) \ , \ \text{supp } u \text{ borné}\}$$

où $\xi(x) = x_n^r(1-x_n)^r$.

En effet en prenant $O_1 = R^{n-1} \times]-\frac{1}{4},\frac{3}{4}[$, $O_2 = R^{n-1} \times]\frac{1}{4},\frac{5}{4}[$ et φ_1 et φ_2 telles que :

$$\begin{cases} \varphi_1 \in \mathcal{D}(]-\frac{1}{4},\frac{3}{4}[) \\ \varphi_2 \in \mathcal{D}(]\frac{1}{4},\frac{5}{4}[) \\ \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) = 1 \quad , \quad t \in [o,1]. \end{cases}$$

La démonstration précédente s'applique puisque le lemme 4.3. permet de majorer

$$\|\varphi_1 u\|^2_{W^{m-1}_{x_n^r}(R^n_+)} \quad \text{et} \quad \|\varphi_2 u\|^2_{W^{m-1}_{(1-x_n)^r}} (R^{n-1} \times]-\infty,1[) .$$

Cette remarque sera utilisée au paragraphe 5.

5. Condition nécessaire : la coercivité entraîne (B).

Soit $x_o \in \Gamma$ et V_o et Θ le voisinage de x_o et le difféomorphisme introduits au § 3. Alors la forme déduite de a :

$$b(u,v) = \int_{R^n_+} x_n^r \sum_{k=1}^{N} Q_k(x,D)u \ \overline{Q_k(x,D)v} \ dx$$

est coercive sur l'espace :

(1) $\{u \in W^m_{x_n^r} \ (R^n_+) \ , \ \text{supp } u \subset \Theta(v_o \cap \overline{\Omega})\}.$

et d'après le § 3 pour montrer que les polynômes P_k vérifient l'hypothèse (B) en x_o, il suffit de montrer que :

(B') Pour tout $\xi = (\xi',\xi_n) \neq o$, $\xi' \in R^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=1}^{N} |Q_k'(o,\xi)|^2 \neq o$.

Posons :

$$b_o(u,v) = \int_{R_+^n} x_n^r \sum_{k=1}^{N} Q_k'(o,D)u \,.\, \overline{Q_k'(o,D)v} \; dx$$

$u,v \in W^m_{x_n^r}(R_+^n)$ et à support borné.

Lemme 5.1. b_o est coercive sur :

$$\{u \in W^m_{x_n^r}(R_+^n) \text{ , supp u borné}\},$$

muni de la norme induite par $W^m_{x_n^r}(R_+^n)$.

Si u est à support borné pour λ assez grand :

$u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, $x \in R_+^n$, est à support contenu dans $\Theta(v_o \cap \overline{\Omega})$ et on a :

(2) $$b(u_\lambda,u_\lambda) \geq \alpha_o \;\|u_\lambda\|^2_{W^m_{x_n^r}(R_+^n)} - \lambda_o \;\|u_\lambda\|^2_{W^o_{x_n^r}(R_+^n)}$$

Exprimons les deux membres de (2) par rapport à u. $b_o(u_\lambda, u_\lambda)$ est de la forme :

(3) $$\lambda^{2m-n-r} \int_{R_+^n} x_n^r \sum_{k=1}^{N} |Q_k'(\tfrac{x}{\lambda},D)\; u(x)|^2 \; dx + R.$$

où R est une somme de termes du même type que dans (3) mais avec pour exposant de λ : $2p-n-r$ avec $p \leq m-1$. De même dans le deuxième membre de (2) le terme de plus haut degré en λ est :

$$\lambda^{2m-n-r} \int_{R_+^n} x_n^r \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \; dx.$$

Lorsque λ tend vers $+\infty$: les coefficients de $Q_k'(\frac{x}{\lambda},D)$ convergent uniformément vers ceux de $Q_k'(o,D)$ sur supp u et $\frac{R}{\lambda^{2m-n-r}}$ tend vers o.

On obtient donc :

(4) $$b_o(u_\lambda, u_\lambda) \geq \alpha_o \ |u|^2_{W^m_{x^r_n}(R^n_+)}$$

Posons maintenant :

$$\Omega_1 = R^{n-1} \times]o,1[\quad , \ \xi(x) = x_n^r(1-x_n)^r$$

(5) $$b_1(u,v) = \int_{\Omega_1} \xi(x) \sum_{k=1}^{N} Q'_k(o,D)u \ \overline{Q'_k(o,D)v} \ dx$$

pour u et v appartenant à l'espace :

(6) $$\{u \in W^m_\xi(\Omega_1) \ , \ \text{supp } u \text{ borné}\}.$$

Lemme 5.2. La forme b_1 définie par (5) est coercive sur l'espace défini par (6).

Soient φ_1 et φ_2 les fonctions introduites dans le remarque 4.1. D'après le lemme 4.1. :

$$b_1(u,u) = b_1(\varphi_1 u, \varphi_1 u) + b_2(\varphi_2 u, \varphi_2 u) + R(u)$$

et d'après la remarque 4.1.

$$|R(u)| \leq \varepsilon \ \|u\|^2_{W^m_\xi(\Omega_1)} + c(\varepsilon) \ \|u\|^2_{W^o_\xi(\Omega_1)}$$

$b_1(\varphi_i u, \varphi_i u)$, i = 1,2, se minore en utilisant le lemme 5.1. Il vient :

$$b_1(u,u) \geq \alpha(|\varphi_1 u|^2_{W^m_\xi(\Omega_1)} + |\varphi_1 u|^2_{W^m_\xi(\Omega_1)}) - |R(u)|.$$

En utilisant à nouveau les lemmes du paragraphe 4, on obtient :

$$b_1(u,u) \geq \alpha \ |u|^2_{W^m_\xi(\Omega_1)} - \varepsilon \ \|u\|^2_{W^m_\xi(\Omega_1)} - c(\varepsilon) \ \|u\|^2_{W^o_\xi(\Omega_1)}$$

(7) $$b_1(u,u) \geq \frac{\alpha}{2} \ \|u\|^2_{W^m_\xi(\Omega_1)} - c \ \|u\|^2_{W^o_\xi(\Omega_1)}.$$

Démonstration de (B').

Posons $Q_k(D) = Q'_k(o,D)$. En introduisant la transformation de Fourier partielle dans R^{n-1}, on peut écrire :

$$b_1(u,u) = \int_0^1 \xi(x)\, dx_n \int_{R^{n-1}} \sum_{k=1}^{N} |Q_k(D)u|^2\, dx' \quad , \quad x = (x',x_n)$$

$$= \int_0^1 \xi(x)\, dx_n \int_{R^{n-1}} \sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi',D_n)\hat{u}(\xi',x_n)|^2\, d\xi'.$$

Soit $v \in \mathcal{D}(R^{n-1})$ et $\xi_n \in \mathbb{C} - \{o\}$. Posons :

$$u(x',x_n) = v(x')\, e^{i\xi_n x_n}$$

$$Q_k(\xi',D_n)\hat{u}(\xi',x_n) = Q_k(\xi',\xi_n)\, \hat{v}(\xi')\, e^{i\xi_n x_n}.$$

Donc :

$$b_1(u,u) = \int_0^1 \xi(x)\, |e^{i\xi_n x_n}|^2\, dx_n \int_{R^{n-1}} \Big(\sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi)|^2\Big) |\hat{v}(\xi')|^2\, d\xi'.$$

En transformant de la même manière le second membre de (7), et après simplication par $\int_0^1 \xi(x)\, |e^{i\xi_n x_n}|^2\, dx$, il vient donc :

$$\int_{R^{n-1}} \Big[\sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi)|^2 - \Big(\alpha_1\Big(\sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha\, \bar{\xi}^\alpha\Big) - \lambda_1\Big)\Big] |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi \geq o$$

et cette inégalité est vérifiée pour toute fonction $\hat{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{D}(R^{n-1}))$, donc pour toute fonction de $\mathcal{S}(R^{n-1})$. On en déduit :

$$\forall\ \xi' \in R^{n-1}\ ,\ \sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi)|^2 \geq \alpha_1 \sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha\, \bar{\xi}^\alpha - \lambda_1$$

ce qui donne, compte tenu de l'homogénéité :

$$\sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi)|^2 \geq \alpha_1 \sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha\, \bar{\xi}^\alpha \quad , \text{ pour tout } \xi' \in R^{n-1} \text{ et } \xi_n \in \mathbb{C} - \{o\}$$

et la condition (B') en résulte.

6. Condition suffisante : (B) entraîne la coercivité de a.

Soit $x \in \Gamma$, V_o et Θ le voisinage de x_o et le difféomorphisme introduits au § 3. Alors la forme déduite de a :

(1) $$b(u,v) = \int x_n^r \sum_{k=1}^{N} Q_k(x,D) \overline{Q_k(x,D)v} \, dx$$

(2) $u,v \in W^m_{x_n^r}(R^n_+)$, et à support dans $\Theta(V_o \cap \overline{\Omega})$ vérifie :

(A') Pour tout $x \in \Theta(V_o \cap \Omega)$, pour tout $\xi \in R^n - \{o\}$:

$$\sum_{k=1}^{N} |Q'_k(x,\xi)|^2 \neq o$$

(B') Pour tout $x \in \Theta(V_o \cap \Gamma)$, pour tout $\xi = (\xi',\xi_n) \neq o$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{N} |Q'_k(x,\xi)|^2 \neq o.$$

Lemme 6.1. La forme b définie par (1) est coerci ve sur l'espace défini par (2).

La démonstration de ce lemme se fait en deux étapes :

1) Cas où les polynômes Q_k sont homogènes à coefficients constants.

Les deux hypothèses (A') et (B') se réduisent alors à :

(C) Pour tout $\xi = (\xi',\xi_n) \neq o$, $\xi' \in R^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi)|^2 \neq o.$$

Alors d'après la proposition 1.1. la forme :

$$A_t(u,v) = \int_t^{\infty} dx' \int_{R^{n-1}} \sum_{k=1}^{N} Q_k(D)u \, \overline{Q_k(D)v} \, dx$$

est coercive sur $H^m(R^{n-1} \times]t,+\infty[)$, et on a l'inégalité :

$$A_t(u,u) \geq \alpha \, |u|^2_{H^m(R^{n-1} \times]t,+\infty[)} \quad , \; u \in H^m\text{-}R^{n-1} \times]t,+\infty[)$$

et α ne dépend pas de t.

On va en déduire la coercivité de b. On a :

$$b(u,u) \geq \int_0^\infty h(x_n) \int_{R^{n-1}} \sum_{k=1}^{N} |Q_k(D)u|^2 \; dx$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \; A_{t_i}(u,u)$$

$$b(u,u) \geq \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \; |u|^2_{H^m(R^{n-1} \times]t_i,+\infty[)}$$

$$\geq \alpha \int_0^\infty h(x_n) \, dx_n \int_{R^{n-1}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \; dx'$$

D'où :

(3) $$b(u,u) \geq \alpha_1 \; |u|^2_{W^m_{x_n^r}(R^n_+)} \quad , \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{2} .$$

2. Cas général.

Soit b' la partie principale de b, c'est-àdire :

$$b(u,u) = \int x_n^r \sum_{k=1}^{N} |Q'_k(x,D)u|^2 \; dx$$

D'après le lemme 4.3. :

$$|b'(u,u)-b(u,u)| \leq \varepsilon \; \|u\|^2_{W^m_{x_n^r}(R^n_+)} + c(\varepsilon) \; \|u\|^2_{W^o_{x_n^r}(R^n_+)}$$

Il suffit donc de montrer que b' est coercive.

Soit $x_o \in \overline{\Theta(v_o \cap \Gamma)}$. Montrons qu'il existe $\delta > o$, $\alpha_o > o$, $\lambda_o \in R$ tel que si u est à support contenu dans la boule de centre x_o et de rayon δ :

(4) $$b'(u,u) \geq \alpha_o \; \|u\|^2_{W^m_{x_n^r}(R^n_+)} - \lambda_o \; \|u\|^2_{W^o_{x_n^r}(R^n_+)}$$

Posons :

$$Q'_k(x,D) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha,k}(x) \; D^\alpha$$

$$Q'_k(x,D)u = Q'_k(x_o,D)u + \sum_{|\alpha|=m} (a_{\alpha,k}(x)-a_{\alpha,k}(x_o)) \; D^\alpha u$$

Soit $\omega(\rho) = \sup |a_{\alpha,k}(x)-a_{\alpha,k}(x_o)|$ où le sup est pris pour

$|\alpha| = m$, $k=1,N$, $x \in \Theta(v_o \cap \bar{\Omega})$, $|x-x_o|<\rho$.

D'après la continuité des coefficients $a_{\alpha,k}$: $\lim\limits_{\rho\to o} \omega(\rho) = o$.

Si u est à support dans la boule de centre x_o et rayon ρ , on a donc :

$$\|Q'_k(x_o,D)u\|_{W^o_{x^r_n}(R^n_+)} \leq \|Q'_k(x,D)u\|_{W^o_{x^r_n}(R^n_+)} + \omega(\rho) \ \|u\|_{W^m_{x^r_n}(R^n_+)} \quad ;$$

On en déduit :

$$b'_{x_o}(u,u) \leq c(b'(u,u) + \omega^2(\rho) \ \|u\|^2_{W^m_{x^r_n}(R^n_+)})$$

avec :

$$b'_{x_o}(u,u) = \int x^r_n \sum_{k=1}^{N} |Q'_k(x_o,D)u|^2 \ dx.$$

Donc d'après l'inégalité (3) du lemme 6.1 :

$$\alpha_1 \ |u|^2_{W^m_{x^r_n}(R^n_+)} \leq c(b'(u,u) + \omega^2(\rho) \ \|u\|^2_{W^m_{x^r_n}(R^n)}).$$

On en déduit (4) en prenant ρ assez petit et en utilisant le lemme 4.3.

$\overline{\Theta(v_o \cap \Gamma)}$ étant compact, on peut en trouver un recouvrement fini par des boules de centre x_i et de rayon $\delta(x_i)$. Soient U_i , $i = 1,q$ ces boules et U_o un ouvert tel que :

$$\overline{\Theta(v_o \cap \Omega)} \subset \bigcup_{i=o}^{q} U_i \ , \text{ et } U_o \Subset \Sigma_+$$

Il existe des fonction $\psi_i \in \mathcal{D}(U_i)$ telles que :

$$\sum_{i=o}^{q} \psi^2_i(x) = 1 \quad , \ x \in \Theta(v_o \cap \Omega)$$

D'après les lemmes 4.1. et 4.3. :

$$b'(u,u) = \sum_{i=o}^{q} b'(\psi_i u,\psi_i u) + R(u)$$

$$|R(u)| \leq \varepsilon \ \|u\|^2_{W^m_{x^r_n}(R^n_+)} + c(\varepsilon) \ \|u\|^2_{W^o_{x^r_n}(R^n_+)} \quad ;$$

Le terme $b(\psi_o u,\psi_o u)$ se minore en la coercivité de :

$$\int_{U_o} \sum_{k=1}^{N} |Q'_k(x,D)u|^2 \, dx$$

sur $H_o^m(U_o)$, qui résulte de (A') et de l'inégalité de Garding.

$b(\psi_i u,\psi_i u)$ se minore en utilisant (4), pour $1 \leq i \leq q$. On obtient :

$$b'(u,u) \geq \alpha \sum_{i=o}^{q} \|\psi_i u\|^2_{W^m_{x_n^r}(R^n_+)} - \lambda \|u\|^2_{W^m_{x_n^r}(R^n_+)} - |R(u)|$$

et en utilisant à nouveau les lemmes 4.1. et 4.3. :

$$\sum_{i=o}^{q} \|\psi_i u|^2_{W^m_{x_n^r}(\mathbb{R}^n_+)} = \|u\|^2_{W^m_{x_n^r}(\mathbb{R}^n_+)} + R_1(u)$$

avec :

$$|R_1(u)| \leq \varepsilon \, |u\|^2_{W^m_{x_n^r}(R^n_+)} + c(\varepsilon) \, \|u\|^2_{W^o_{x_n^r}(\mathbb{R}^n_+)}$$

<u>Démonstration de la coercivité de a.</u>

Soit $(O_i)_{i=o,p}$ le recouvrement de Ω introduit au paragraphe (3)

$$a(u,u) = \sum_{i=o}^{p} a(\varphi_i u, \varphi_i u) + R(u)$$

où

$$|R(u)| \leq \varepsilon \, \|u\|^2_{W^m_\varphi(\Omega)} + c(\varepsilon) \, \|u\|^2_{W^o_\varphi(\Omega)} .$$

$a(\varphi_o u, \varphi_o u)$ se minore en utilisant l'hypothèse (A) et l'inégalité de Garding.

$a(\varphi_i u, \varphi_i u) = b((\varphi_i u) \circ \Theta_i^{-1}, (\varphi_i u) \circ \Theta_i^{-1})$, $1 \leq i \leq p$, et on utilise la coercivité de b qui résulte du lemme 6.1. On termine alors comme dans la démonstration précédente.

7. Cas des coefficients constants.

Lorsque $P_k(x,D) = P_k(D)$ les hypothèses (A) et (B) sont équivalentes à :

(1) $$\forall\, \xi \in \mathbb{C}^n - \{o\} : \sum_{k=1}^{N} |P_k(\xi)|^2 \neq o.$$

En effet (1) résulte du fait que pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{o\}$, il existe $x \in \Gamma$, ξ_1 tangent à Γ en x, ξ_2 normal en x à Γ et $\tau \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\xi = \xi_1 + \tau\, \xi_2.$$

8. Cas où m=1.

Soit a une forme sesquilinéaire sur $W^1_\varphi(\Omega)$ dont la partie principale a' s'écrit :

$$a'(u,v) = \int_\Omega \varphi(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i u\, \overline{D_j v}\, dx \quad ,$$

Les coefficients a_{ij} étant continus sur $\overline{\Omega}$.

Théorème 8.1. Pour que a soit coercive sur $W^1_\varphi(\Omega)$, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha>o$ tel que :

(A') Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \Omega$:

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j\right) \geq \alpha\, |\xi|^2$$

(B') Pour tout $x \in \Gamma$ et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ de la forme $\xi_1 + \tau\, \xi_2$ où ξ_1 est tangent en x à Γ, ξ_2 étant le vecteur unitaire de la normale en x à Γ et $\tau \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \overline{\xi}_j\right) \geq \alpha\, |\xi|^2$$

On se ramène au cas d'une forme hermitienne en posant :

$$b(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) + \overline{a(v,u)}).$$

On a :

$$\begin{cases} b(u,v) = \overline{b(v,u)} \\ b(u,u) = \operatorname{Re} a(u,u). \end{cases}$$

et si $\sum_{ij=1}^{n} b_{ij}(x)\, \xi_i\, \bar{\xi}_j$ désigne la forme hermitienne dans C^n associé à b :

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \bar{\xi}_j = \sum_{ij=1}^{n} b_{ij}(x)\, \xi_i\, \bar{\xi}_j.$$

La démonstration du théorème 1 s'adapte a ce cas :

si b est coercive, on en déduit :

(A) $\forall\, x \in \Omega$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n - \{o\}$: $\sum_{ij=1}^{n} b_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \neq o$

(B) $\forall\, x \in \Gamma$, $\forall \xi = \xi_1 + \tau\, \xi_2$, ...

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} b_{ij}(x)\, \xi_i\, \bar{\xi}_j \neq o.$$

La condition (A) donne immédiatement (A'), (B) donne :

$$\forall\, x \in \Gamma \;,\quad \exists\; \alpha(x) > o : \forall \xi = \xi_1 + \tau\, \xi_2$$

$$\sum b_{ij}(x)\, \xi_i\, \bar{\xi}_j \geq \alpha(x) \quad |\xi|^2$$

De la continuité de b_{ij} sur Γ, il résulte :

$$\inf_{x \in \Gamma} \alpha(x) = \alpha > o.$$

Si (A') et (B') sont réalisées, la démonstration de la coercivité se fait comme pour le théorème 1, sauf pour la première partie du lemme 6.1 (cas des coefficients constants dans R^n_+), où on ne peut plus faire appel au résultat d'Aronszajn : on pourrait décomposer b en somme de carrés, mais on aurait une expression de la forme :

$$\int_{R^n_+} x_x^r \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, |Q_k(D)u|^2\, dx$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$ et les hypothèses (A') et (B') n'entrainent pas $\varepsilon_k = +1$.

Démontrons donc directement que la forme :

$$(1)\quad b(u,v) = \int_{R^n_+} x_n^r \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, D_i u\, \overline{D_j v}\, dx$$

est coercive sur l'espace :

$$u \in W_{x_n^r}(R^n_+)\ ,\ \text{supp } u \text{ borné.}$$

Les coefficients α_{ij} vérifiant :

$$(2)\quad \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_{ij}\, \xi_i\, \bar{\xi}_j \geq \alpha\, |\xi|^2$$

pour tout $\xi = (\xi', \xi_n)$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$

Remarquons d'abord que si ξ est la forme :

$$(3)\quad \xi = (\lambda\xi', \xi_n)\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}\ ,\ \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\ ,\ \xi_n \in \mathbb{C}$$

l'inégalité (2) est encore vérifiée : il suffit de l'écrire pour $(\xi', \frac{\xi_n}{\lambda})$ et de multiplier les deux membres par $|\lambda|^2$. s'écrit :

$$b(u,u) = \int_0^\infty x_n^r\, dx_n \int_{R^{n-1}} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \xi_i\, \bar{\xi}_j \Big)\, d\xi'$$

où ξ est donné par (3) avec :

$$\lambda = \hat{u}(\xi', x_n)$$

$$\xi_n = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \hat{u}(\xi', x_n).$$

En appliquant (2), on en déduit donc :

$$b(u,u) \geq \alpha \int_0^\infty x_n^r\, dx_n \int_{R^{n-1}} \Big(\sum_{i=1}^{n-1} |\xi_i\, \hat{u}(\xi', x_n)|^2 + \Big|\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_n}(\xi', x_n)\Big|^2 \Big)\, d\xi'$$

$$\geq \alpha\, |u|^2_{W^1_{x_n^r}(R^n_+)}\ .$$

II - LE CAS D'UN OUVERT AVEC COINS.

Dans cette partie, on suppose que l'ouvert est borné et que tout point de la frontière possède un voisinage V tel que $V \cap \Omega$ s' applique sur $(R_+)^j \times R^{n-j}$. (Le cube $]o,1[^n$ de R^n possède cette propriété).
La méthode de démonstration est analogue utilisée en (I).

1. Hypothèses et énoncé des résultats.

Soient φ_1 , $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$, des fonctions de classe C^∞ sur R^n et :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_i(x) > o \quad , \quad 1 \leq i \leq p\}.$$

On suppose Ω non vide et borné. Si $x \in \Gamma$, la frontière de Ω , l'une au moins des fonctions φ_i s'annule en x. Soit :

$$I(x) = \{i \in \{i,2,\ldots,p\} \quad , \quad \varphi_i(x) = o\} \ .$$

On suppose que pour tout $x \in \Gamma$, I(x) a au plus n éléments. Soit :

$$\Gamma_j = \{x \in \Gamma \mid \ |I(x)| = j\} \quad , \quad 1 \leq j \leq n.$$

Soit T(x) le sous-espace de R^n orthogonal au système de vecteurs $(\text{grad } \varphi_i(x))_{i \in I(x)}$; et $N_{\mathbb{C}}(x)$ le sous-espace engendré par ce système dans $\mathbb{C}^n$. On suppose que si $x \in \Gamma_j$, T(x) est de dimension n-j.
Soit pour tout $x \in \Omega$:

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{p} \varphi_i^{r_i}(x) \ , \text{ ou } r_i \in \mathbb{R}_+.$$

On définit l'espace $W^m_\varphi(\Omega)$ comme au (I). On considère comme au (I) la forme :

$$a(u,v) = \int_\Omega \varphi(x) \sum_{k=1}^{N} P_k(x,D)u \ \overline{P_k(x,D)v} \ dx.$$

THEOREME 1.

1) Conditions nécessaires : si a est coercive sur $W^m(\Omega)$ alors :

(A) Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n - \{o\}$, on a $A(x,\xi) \neq o$

(B) Pour tout $x \in \Gamma_j$ et $\xi \in \mathbb{C}^n - \{o\}$ de la forme $\xi = \xi_1 + \xi_2$ ou $\xi_1 \in T(x)$ et $\xi_2 \in N_{\mathbb{C}}(x)$ on a $A(x,\xi) \neq o$, $(1 \leq j \leq n)$.

2) Conditions suffisantes : La condition (A) et la condition (B_1) suivante entrainent la coercivité de a :

- Pour tout $x \in \Gamma_1$ et tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{o\}$ de la forme $\xi = \xi_1 + \xi_2$ ou $\xi_1 \in T(x)$ et $\xi_2 \in N_{\mathbb{C}}(x)$ on a : $A(x,\xi) \neq o$.
- Pour tout $x \in \Gamma_j$, avec $j \geq 2$, et tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{o\}$ on a : $A(x,\xi) \neq o$.

2. La condition (A) est nécessaire. (même démonstration qu'au (I)).

3. Explicitation des hypothèses faites sur Ω .

On démontre que tout point $x_o \in \Gamma_j$ possède un voisinage V_o tel que :

$$V_o \cap \Omega = \{x \mid \forall\ i \in I(x_o) : \varphi_i(x) > o\} \cap V_o$$

$$V_o \cap \Gamma = \{x \mid \forall\ i \in I(x_o) : \varphi_i(x) = o\} \cap V_o$$

$$V_o \cap \Gamma_k = \phi \quad \text{si} \quad k > j$$

et tel qu'il existe un difféomorphisme Θ possédant les propriétés :

$$V_o \cap \Omega \longrightarrow (R^+)^j \times R^{n-j} = \Omega_j$$

$$V_o \cap \Gamma \longrightarrow ((R^+)^j \times R^{n-j}) \cap \{x \mid \prod_{i=1}^{j} x_i = o\}$$

$$\forall\ x \in \Theta(V_o \cap \Omega) : \varphi_i(\Theta^{-1}(x)) = x_i \ , \ 1 \leq i \leq j$$

(En supposant $I(x) = \{1,2,\ldots,j\}$)

La différentielle de Θ en x_o transforme $T(x_o)$ et $N(x_o)$ en $\{o\} \times R^{n-j}$ et $R^j \times \{o\}$ respectivement.

On vérifie alors de la même manière qu'au (I) que les propriétés (A), (B) et (B_1) se conservent dans ce difféomorphisme. Le poids se transforme donc en :

en :

$$\varphi_j(x) = \prod_{i=1}^{j} x_i^{r_i}$$

On utilisera les inégalités :

(1) $$\frac{1}{2} H(x_1,\ldots x_j) \leq \prod_{i=1}^{j} x_i^{r_i} \leq H(x_1,x_2,\ldots,x_j)$$

où

$$H(x_1,\ldots,x_j) = \prod_{i=1}^{j} h(x_i) \qquad \text{(I-3)}$$

4. Inégalités entre les normes.

Lemme 4.1. Pour tout $\varepsilon>o$, il existe $c(\varepsilon)$ tel que pour tout $u \in W^m_\varphi(\Omega)$:

$$\|u\|^2_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} \leq \varepsilon \, \|u\|^2_{W^{m-1}_\varphi(\Omega)} + c(\varepsilon) \, \|u\|^2_{W^o_\varphi(\Omega)}$$

La démonstration est analogue à celle de (I-4). On vérifie que le lemme est également valable pour l'ouvert

$$\Omega'_j = \,]o,1[^j \times R^{n-j} \text{ , avec le poids } \varphi_j(x).\ \varphi_j(1-x).$$

5. Conditions nécessaires.

On suppose a coercive. Soit $x_o \in \Gamma_j$. En utilisant le difféomorphisme Θ introduit au § 3, on démontre que si la forme :

$$b(v,v) = \int_{\Omega_j} \varphi_j(x) \sum_{k=1}^{N} |Q(x,D)v|^2 \, dx$$

est coercive sur

$$\{u \in W^m_{\varphi_j}(\Omega_j) \text{ , supp } u \text{ borné}\}$$

alors :

$$\sum_{k=1}^{N} |Q'_k(o,\xi)|^2 \neq o \text{ pour } \xi \in \mathbb{C}^n - \{o\} \text{ de la forme}$$

$$\xi = (\xi',\xi'') \text{ ou } \xi' \in C^j \text{ et } \xi'' \in R^{n-j}.$$

On montre d'abord que la forme :

$$b'(v,v) = \int_{\Omega_j} \varphi_j(x).\ \varphi_j(1-x) \sum_{k=1}^{N} |Q'_k(o,D)u|^2 \, dx.$$

En introduisant alors les fonctions $e^{\xi' x'} u(x'')$, où $x = (x',x'')$ et en utilisant la transformation de Fourier partielle par rapport à x'', on en déduit le résultat cherché.

6. Conditions suffisantes de coercivité.

En utilisant un recouvrement convenable et une partition de l'unité associée à ce recouvrement, on se ramène à montrer que la forme :

(1) $$b(u,v) = \int_{\Omega_j} \varphi_j(x) \sum_{k=1}^{N} Q_k(x,D)u \; \overline{Q_k(x,D)v} \; dx$$

est coercive sur :

(2) $$\{u \in W^m_j(\Omega_j) \mid \text{supp } u \subset \Sigma\}$$

sachant que :

1°) $\sum_{k=1}^{N} Q'_k(x,\xi) \neq o$ pour $x \in \Sigma_+$ et $\xi \in \mathbb{C}^n - \{o\}$ si $j \geq 2$.

2°) $\sum_{k=1}^{N} Q'_k(x,\xi) \neq o$ pour $x \in \Sigma$ et $\xi = (\xi',\xi'')$, $\xi' \in \mathbb{C}$, $\xi'' \in R^{n-1}$ si $j=1$.

Le cas $j=1$ a été triaté au (I). Si $j \geq 2$, on procède de la même manière:dans le cas des coefficients constants, on utilise les inégalités 3-1 et le fait la forme :

$$\int_{\Omega_j} \sum_{k=1}^{N} |Q_k(D)u|^2 \; dx$$

est coercive sur $H^m(\Omega_j)$ sachant que $\sum_{k=1}^{N} |Q_k(\xi)|^2 \neq o$ pour tout $\xi \in C^n - \{o\}$, d'après un résultat de Smith (4).

7. Cas de formes d'ordre 2.

On considère sur $W^1_\varphi(\Omega)$ une forme sesquilinéaire dont la partie principale s'écrit

$$a'(u,v) = \int_\Omega \varphi(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \; D_i u \; \overline{D_j v} \; dx$$

les coefficients a_{ij} étant continus sur $\overline{\Omega}$, Posons pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{C}^n$:

$$A(x,\xi) = \operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \; \xi_i \; \overline{\xi}_j \right)$$

Théorème 7.1. : Pour que a soit coercive sur $W^1_\varphi(\Omega)$, il faut et il suffit que

(A') Pour tout $\xi \in R^n - \{o\}$ et tout $x \in \Omega$ on ait : $A(x,\xi) > o$.

(B') Pour tout $x \in \Gamma_j$ et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{o\}$ de la forme :

$\xi = \xi_1 + \xi_2$ ou $\xi_1 \in T(x)$ et $\xi_2 \in N_{\mathbb{C}}(x)$ on ait $A(x,\xi) > o$.

Comme au I-8, on se ramène au cas où a est hermitienne. La démonstration du théorème 1.1. s'adapte, sauf la démonstration des conditions suffisantes de coercivité ; il reste à vérifier que :

$$b(u,v) = \int_{\Omega_j} \varphi_j(x) \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} D_i u \overline{D_j v}\, dx$$

est coercive sur $\{u \in W^m_{\varphi_j}(\Omega_j)$, supp u borné$\}$ sachant que :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j > o \text{ pour } \xi = (\xi',\xi'') \neq o \ , \ \xi' \in \mathbb{C}^j \ , \xi'' \in \mathbb{R}^{n-j}$$

On en déduit :

$$\Sigma \ \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha \ |\xi|^2 \text{ pour } \xi = (\xi',\xi'') \in C^j \times R^{n-j}$$

et de même qu'au I-8 :

(1) $\Sigma \ \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha \ |\xi|^2$ pour $\xi = (\xi',\lambda\xi'')$, $\xi' \in \mathbb{C}^j$, $\xi'' \in \mathbb{R}^{n-j}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

En utilisant la transformation de Fourier en x" :

$$b(v,v) = \int_{(R_+)^j} \varphi_j(x')dx' \int_{R^{n-j}} (\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j)\, d\xi''$$

ou

$$\xi = (\xi_i)_{i=1,n} = (\xi',\lambda\xi'')$$

avec

$$\lambda = \hat{u}(x',\xi'')$$

$$\xi_i = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x',\xi'') \ , \ i = 1,j$$

D'après l'inégalité (1), il vient donc :

$$b(v,v) \geq \alpha \int_{(R_+)^j} \varphi_i(x')dx' \int_{R^{n-j}} (\sum_{i=1}^{j} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x',\xi'')|^2 + \sum_{i=j+1}^{n} |\xi_i \hat{u}(x',\xi'')|^2)d\xi''$$

$$\geq \alpha \ |u|^2_{W^1_{\varphi_j}(\Omega_j)}$$

d'où la coercivité de b.

BIBLIOGRAPHIE

1 _ S. AGMON : The coerciveness problem for integro-differential forms. J. Analyse Math, 6, (1958) 183-223.

2 _ S. AGMON : Lectures on boundary value problems. Van Nostrand Math. Studies.

3 _ N. ARONZAJN : On coercive integro-differential quadratic forms. Tchn. Report n°14. University of Kansas. (1955) 94-106

4 - SMITH : Inequalites for formaly positive integro-differential forms. Bull. Am. Math. Soc. 67 (1961) 368-370.