

A. BRUNEL

Théorème ergodique en moyenne d'Eberlein

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 3, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A3_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEOREME ERGODIQUE EN MOYENNE D'EBERLEIN

(cf. Transactions of Ann. Math. Soc. (67) p. 217-240. Abstract Ergodic theorem) exposé par A. BRUNEL.

1. Situation et notations.

E : espace localement convexe séparé,

G : sous semi-groupe de l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E ,

G^* : enveloppe convexe de G dans $\mathcal{L}(E)$.

$\forall x \in E$ $O(x)$ désigne l'orbite de x sous G

$O^*(x)$ " " " " G^* .

$\overline{O^*(x)}$ adhérence de $O^*(x)$ dans E .

Définition 1.

Le semi groupe G est dit ergodique s'il existe une famille

$\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, I ordonné filtrant telle que :

1°) $\forall \alpha \in I$ $T_\alpha \in \mathcal{L}(E)$

2°) $\forall \alpha \in I$ $\forall x \in E$ $T_\alpha x \in \overline{O^*(x)}$

3°) $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est équicontinu

4°) $\forall x \in E$ $\forall T \in G$ $\lim_{\alpha} (T_\alpha T x - T_\alpha x) = 0$ (limite dans E)
et $\lim_{\alpha} (T T_\alpha x - T_\alpha x) = 0$

2. Théorème ergodique d'Eberlein.

Théorème 1.

Si G est ergodique relativement à $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, $\forall x \in E$ les conditions suivantes pour un $y \in E$ sont équivalentes

$$1^\circ) y \in \overline{O^+(x)} \quad \text{et} \quad T_\alpha y = y \quad \forall \alpha \in G$$

$$2^\circ) y = \lim_{\alpha} T_\alpha x \quad (\text{limite pour top. donnée sur } E)$$

$$3^\circ) y = \lim_{\alpha} \text{faible } T_\alpha x$$

$$4^\circ) y \text{ est valeur d'adhérence pour la topologie faible de la famille } (T_\alpha x)_{\alpha \in I} \text{ suivant l'ordonné filtrant } I.$$

Démonstration.

Les implications $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)$ sont triviales.

Montrons que $1) \Rightarrow 2)$:

Soit U voisinage convexe équilibré de 0 dans E . Montrons $\exists \beta$ tel que $\forall \alpha > \beta \quad T_\alpha x - y \in U$.

Soit V et W voisinages convexes équilibrés de 0 dans E tels que : $V+V \subset U$ et $\bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha(W) \subset U$ (hypothèse d'équicontinuité).

Par hypothèse $\exists T^* \in G^*$ tel que $y - T^*(x) \in W$. En outre l'orbite de y étant réduite à y (hypothèse 1)) on a $T_\alpha y = y$ d'après la propriété 2) de la famille $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Ecrivons :

$$\begin{aligned} (1) \quad T_\alpha x - y &= T_\alpha x - T_\alpha T^* x + T_\alpha T^* x - T_\alpha y \\ &= T_\alpha x - T_\alpha T^* x + T_\alpha (T^* x - y). \end{aligned}$$

Comme $y - T^*x \in W$ l'hypothèse sur W et l'équicontinuité impliquent

$$T_\alpha(T^*x - y) \in U, \forall \alpha$$

En outre d'après la propriété 4°) de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, il existe β tel que $\forall \alpha > \beta$, $T_\alpha x - T_\alpha T^*x \in V$.

La famille 1) montre alors que $T_\alpha x - y \in U$.

Montrons que 4) $\Rightarrow$ 1)

Comme $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est continu dans le convexe $O^*(x)$ d'après l'hypothèse 2) sur $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, l'adhérence faible de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est contenue dans l'adhérence faible (ou forte) de $O^*(x)$. Donc 4) $\Rightarrow y \in \overline{O^*(x)}$.

Pour montrer que $Ty = y$ nous montrons que $\forall z' \in E'$,

$\langle y - Ty, z' \rangle = 0$, ou encore que $\forall \varepsilon > 0 \quad |\langle y - Ty, z' \rangle| \leq \varepsilon$. Or d'après la propriété 4°) de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\exists \beta$ tel que $\forall \alpha > \beta$, $|\langle T_\alpha x - T_\alpha x, z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après 4) on peut maintenant trouver $\alpha > \beta$:

$$|\langle y - T_\alpha x, z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\langle y - T_\alpha x, T_\alpha z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Pour un tel α en écrivant :

$$y - Ty = y - T_\alpha x + T_\alpha x - T T_\alpha x + T T_\alpha x - Ty$$

On a :

$$|\langle y - Ty, z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

D'où le théorème.

Définition 2.

Si G est ergodique, x est dit ergodique avec point fixe limite y , si et seulement si il existe y satisfaisant l'une des quatre conditions équivalentes du théorème.

Notons que si un tel y existe il est unique : ceci résulte en effet de la propriété 2).

Notons de même que si la limite exprimée par la condition 2) existe pour une famille ergodique $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, la limite existe et est la même pour toute autre famille ergodique $\{T_{\alpha'}\}_{\alpha' \in I'}$, d'après la condition 1).

La notion d'ergodicité pour un point $x \in E$, ne dépend donc pas de la famille ergodique $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ considérée.

En outre l'application $x \mapsto y$ définie pour les éléments ergodiques est notée T_∞ .

Théorème 2.

Supposons que E soit un Banach. Si G est ergodique les éléments ergodiques de E forment un sous-espace vectoriel Γ fermé et invariant par le ^{semi}groupe G de E . L'application T_∞ est linéaire bornée de Γ dans Γ et possède des propriétés :

$\|T_\infty\| \leq M$ (avec $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| \leq M$). En outre $T_\infty = T_\infty^2 = T_\infty U = U T_\infty$ pour tout $U \in (\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}) \cup \overline{G^*}$.

Démonstration.

- Le fait que Γ soit un sous-espace vectoriel résulte trivialement de 2).

- $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| \leq M$ exprime l'équicontinuité des $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$. D'où $\|T_\infty\| \leq M$ résulte de 2).

- Montrons que $x \in \Gamma \implies Tx \in \Gamma \quad \forall T \in G$.

Or $x \in \Gamma \implies T_\alpha x \rightarrow y$ (condition 2)).

Comme (propriété 4°) de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $(T_\alpha Tx)_{\alpha \in I}$ converge également vers y .

D'où $Tx \in \Gamma$ par définition de Γ .

- Montrons que Γ est fermé

$$\text{Soit } x_n \in \Gamma \quad \lim_n x_n = x \in E$$

$$x_n \in \Gamma \implies T_\alpha x_n = y_n \in E$$

comme

$$y_n - y_m = \lim_\alpha T_\alpha (x_n - x_m)$$

$$\|y_n - y_m\| \leq M \|x_n - x_m\|.$$

La suite (y_n) étant aussi de Cauchy, et converge vers un $y \in E$.

On en déduit immédiatement que $\lim T_\alpha x = y$. D'où $x \in \Gamma$. La fin du théorème résulte directement du lemme suivant :

Lemme.

Si Γ est un sous-espace vectoriel fermé, invariant sous G , tel que $\forall x \in \Gamma$, $\overline{O^(x)}$ possède un unique point fixe Sx , alors pour tout endomorphisme U satisfaisant la condition $Ux \in \overline{O^*(x)}$, $\forall x \in E$, alors $Sx = S^2x = S U x = U Sx$.*

Démonstration.

Si $x \in \Gamma$, $\overline{O^*(x)} \subset \Gamma$ par hypothèse, d'où $Sx \in \Gamma$. Donc S applique Γ dans Γ . Comme $\overline{O^*(Sx)} = \{Sx\}$, mais $Sx \in \Gamma \implies Sx$ est le seul point fixe de $\overline{O^*(Sx)}$. D'où $Sx = S^2x$.

Maintenant la condition $Ux \in \overline{O^*(x)}$ implique $Ux \in \Gamma$ et $\overline{O^*(Ux)} \subset \overline{O^*(x)}$, d'où $S U x = Sx$, puisque $\overline{O^*(Ux)}$ a un point fixe unique.

3. Application à la situation classique.

Hypothèse. E : Banach T endomorphisme borné de E tel que

$$\sup_n \|T^n\| \leq C.$$

Pour une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ on prend les moyennes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$T_n = \frac{1}{n} (T + \dots + T^n).$$

On vérifie immédiatement les conditions 1° à 4° de la définition 1.