

MICHEL MÉTIVIER

Fonctionnelles aléatoires et processus généralisés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 12, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A12_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONNELLES ALEATOIRES ET PROCESSUS GENERALISES.

Par Michel METIVIER

Dans la suite $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ désignera l'espace des fonctions réelles $\mathcal{F}$ -mesurables finies définies sur Ω , et $M(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace quotient de $\mathcal{M}$ par le sous espace des fonctions P-négligeables.

En outre S^* désignera toujours le dual algébrique de l'espace vectoriel S .

1. - Fonctionnelles aléatoires et processus généralisés.

1.1 - Fonctionnelle. linéaire aléatoire, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans S' .

Définition 1.

Soit $S' \subset S^*$, on appellera Fonct. Lin. Aléa. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans S' toute application $\omega \leadsto \mathcal{L}(\omega) \in S'$ de Ω dans S' telle que $\forall x \in S$, l'application $\omega \leadsto \langle x, \mathcal{L}(\omega) \rangle$ notée $\langle x, \mathcal{L}(.) \rangle$ soit un élément de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 2.

On dira que la fonctionnelle $\mathcal{L}_1$ est une modification de $\mathcal{L}$, si $\forall x \in S$ $\langle x, \mathcal{L}(\omega) \rangle = \langle x, \mathcal{L}_1(\omega) \rangle$ P.S.

1.2 - Processus généralisé.

Définition 3.

On appellera processus généralisé sur S , base sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ toute application linéaire L de S dans $M(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Il convient de noter que , si $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S$, quel que soit le représentant $X_1 \dots X_n$ choisi dans chaque classe $L(\varphi_1) \dots L(\varphi_n)$, la distribution conjointe des variables aléatoires $X_1 \dots X_n$ est la même. Cette distribution conjointe sera désormais appelée distribution conjointe de $L(\varphi_1) \dots L(\varphi_n)$.

Définition 4.

Deux processus L et L' basés sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ respectivement sont dits équivalents si : $\forall \varphi_1 \dots \varphi_n \in S$ les systèmes $(L(\varphi_1) \dots L(\varphi_n))$ et $(L'(\varphi_1) \dots L'(\varphi_n))$ ont même distribution conjointe.

Proposition 1.

A toute fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}$ correspond de façon unique un processus généralisé sur S par :

$$\forall \varphi \in S \quad L(\varphi) = \overbrace{\langle \varphi, \mathcal{L}(\cdot) \rangle}^{(*)}$$

1.3 - Fonctionnelle linéaire aléatoire canonique.

Soit sur S' la tribu $\mathcal{G}'$ engendrée par les cylindres :

$\{ f' : \langle \varphi, f' \rangle \in B \}$ où B est un Borelien de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in S$.

On peut évidemment parler de la mesure P' image de P par $\mathcal{L}$.

Considérons la fonctionnelle linéaire aléatoire $\mathcal{L}_c$ définie sur $(S', \mathcal{G}', P')$ par :

$$(1.3.1) \quad \mathcal{L}_c(f') = f'.$$

Définition 5.

La fonctionnelle aléatoire $\mathcal{L}_c$ définie sur $(S', \mathcal{G}', P')$ par

(*) φ désigne la classe d'équivalence dans $M(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$.

(1.3.1), à valeurs dans S' , est appelée fonctionnelle linéaire aléatoire canonique associée à $\mathcal{L}$.

Proposition 2.

Deux fonctionnelles aléatoires L_1 et L_2 , à valeurs dans S' ont même fonctionnelle aléatoire canonique associée, si et seulement si les processus généralisés L_1 et L_2 sont équivalents.

Démonstration :

Evidente en vertu de :

$$\begin{aligned} P \left[(L_1(\varphi_1), \dots, L_1(\varphi_n)) \in B_1 \times \dots \times B_n \right] &= \\ &= P \left[(\langle \varphi_1, L_1(\cdot) \rangle, \dots, \langle \varphi_n, L_1(\cdot) \rangle) \in B_1 \times \dots \times B_n \right] \\ &= P_1^! \{ f' : (\langle \varphi_1, f' \rangle, \dots, \langle \varphi_n, f' \rangle) \in B_1 \times \dots \times B_n \} \end{aligned}$$

$P_1^!$ désignant la mesure image de P par $\mathcal{L}_1$ sur $(S', \mathcal{G}')$.

1.4 - Les mesures $\mu_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}^L$ et le système projectif $(S_{/V_0}^*, P_V^L)$ de probabilités.

Dans la suite on notera $\mu_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}^L$ la répartition conjointe de $(L(\varphi_1) \dots L(\varphi_n))$, (ou plus brièvement $\mu_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ si L est clair et aucune ambiguïté possible).

Soit S^* le dual algébrique de S .

Pour tout système fini $\alpha = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$ extrait de S , on notera

$\mathcal{E}(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ le sous espace de S engendré par $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$, par $(\mathcal{E}(\varphi_1 \dots \varphi_n))^{\circ}$ son polaire dans S^* , et par $\Psi(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ l'application de S^* dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Psi(\varphi_1 \dots \varphi_n)(f) = (\langle \varphi_i, f \rangle)_{i=1 \dots n}$$

L'image de S^* par $\Psi(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ sera notée $S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$.

Nous avons la décomposition algébrique canonique :

$$S^* \xrightarrow{\Pi_{\alpha}} S^* / (\mathcal{E}(\varphi_1 \dots \varphi_n))^{\circ} \xrightarrow{I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}} S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)} \subset \mathbb{R}^n$$

la projection canonique Π_{α} ne dépendant que du sous espace V de S engendré par les $\varphi_1 \dots \varphi_n$, à la différence de l'isomorphisme canonique $I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$.

Nous allons montrer successivement que $\mu^L_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ est portée par $S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ dans $\mathbb{R}^n$ et que si l'on considère alors la mesure sur $S^* / (\mathcal{E}(\varphi_1 \dots \varphi_n))^{\circ}$ transportée de $\mu^L_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$ par l'isomorphisme canonique $I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$, cette mesure ne dépend que du sous espace V engendré par $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ dans S .

Nous utiliserons d'abord le :

Lemme 1.

Pour tout sous espace de dimension finie V de S il est possible de choisir un représentant $\mathcal{L}_V \Psi$ dans chaque classe d'équivalence $L(\Psi)$, $\Psi \in V$ de telle sorte que $\forall \omega \in \Omega$ l'application $\Psi \mapsto \mathcal{L}_V \Psi(\omega)$ soit linéaire.

Démonstration :

Soit $(\Psi_1 \dots \Psi_r)$ une base de V . Choisissons de façon arbitraire $\mathcal{L}_V \Psi$ dans chaque classe $L\Psi$ pour tous les Ψ qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $\Psi_1 \dots \Psi_r$. Comme l'ensemble D de ces Ψ est un ensemble dénombrable, à l'exception d'un ensemble de probabilité nulle $\Omega_0 \subset \Omega$, pour tout $\Psi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Psi_i \in D$ on a, en vertu de la linéarité de L :

$$\mathcal{L}_V \Psi(\omega) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathcal{L}_V \Psi_i(\omega).$$

Modifions $\mathcal{L}_V \Psi$ sur Ω_0 en posant par exemple $\mathcal{L}_V \Psi(\omega) = 0$

$\forall \omega \in \Omega_0$. Nous voyons alors que :

$\forall \omega \in \Omega \quad \Psi \mapsto \mathcal{L}_V \Psi(\omega)$ est linéaire sur D , et continue pour la topologie induite sur D par $\mathbb{R}^n$. Elle se prolonge donc de façon unique en une forme linéaire (nécessairement continue) sur V , que nous notons $\mathcal{L}_V \Psi(\omega)$. Si (Ψ_n) est une suite extraite de D telle que $\Psi = \lim_n \Psi_n$ on a pour tout $\omega \in \Omega$ $\mathcal{L}_V \Psi(\omega) = \lim_n \mathcal{L}_V \Psi_n(\omega)$. D'où la mesurabilité de $\mathcal{L}_V \Psi$ pour tout $\Psi \in S$.

Par ailleurs si $\Psi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \Psi_i$ les λ_i étant quelconques,

pour tout représentant $\mathcal{L}\Psi$ de $L\Psi$ on a, en vertu de la linéarité de L :

$$\mathcal{L}\Psi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathcal{L}_V \Psi_i = \mathcal{L}_V \Psi. \text{ P.S.}$$

Ceci prouve que $\mathcal{L}_V \Psi$ est un élément de la classe $L\Psi$. D'où le lemme 1. Dans ce qui suit nous appellerons $\mathcal{L}_V$ un relèvement de L associé au sous espace V .

Lemme 2.

Pour tout système fini $(\Psi_1 \dots \Psi_n)$ extrait de S (libre ou non), la mesure $\mu_{(\Psi_1 \dots \Psi_n)}^L$ est portée par $S_{\Psi_1 \dots \Psi_n}^*$ dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :

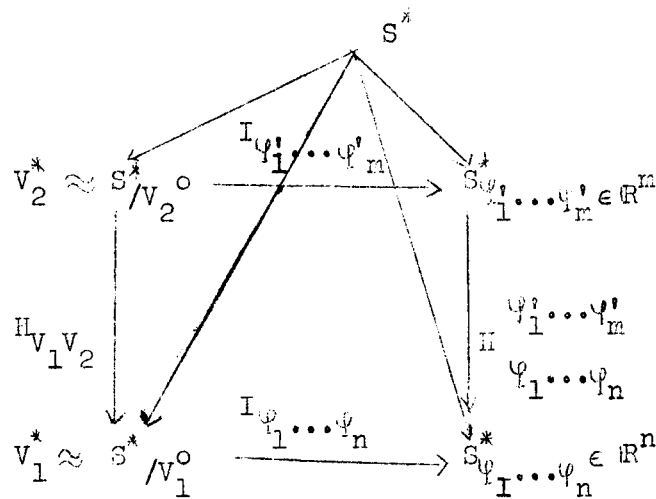
Soit en effet $\mathcal{L}_V$ un relèvement de L associé au sous espace V engendré par $\{\Psi_1 \dots \Psi_n\}$ dans S . La mesure $\mu_{(\Psi_1 \dots \Psi_n)}^L$ est la mesure image de P par l'application $\omega \mapsto \mathcal{L}_V(\omega)$, $\mathcal{L}_V(\omega)$ étant la forme linéaire sur V identifiée à l'élément $(\langle \Psi_i, \mathcal{L}_V(\omega) \rangle)_{i=1 \dots n}$ de $\mathbb{R}^n$. Or toute forme linéaire sur V se prolongeant en une forme linéaire f sur S , et $S_{\Psi_1 \dots \Psi_n}^*$ étant l'ensemble des éléments de la forme $(\langle \Psi_i, f \rangle)_{i=1 \dots n}$ où f est une forme linéaire sur S , on a $\mathcal{L}_V(\omega) \in S_{\Psi_1 \dots \Psi_n}^*$ pour tout ω . D'où le lemme 2.

Théorème 1.

Soit V le sous espace de S engendré par $\{\Psi_1 \dots \Psi_n\}$. Soit P_V^L la mesure sur S_V^* transportée de $\mu_{(\Psi_1 \dots \Psi_n)}^L$ par l'isomorphisme

canonique $S^*/V^0 \xrightarrow{I_{\varphi_1 \dots \varphi_n}} S^*_{(\varphi_1 \dots \varphi_n)}$. La mesure P_V^L est indépendante du système de générateurs $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ de V considéré. En outre $(S^*/V^0, S_V^*, P_V^L)$ est un système projectif, indexé par l'ensemble filtrant à droite pour ϵ des sous espaces de dimension finie V de E , de mesures de Følner régulières.

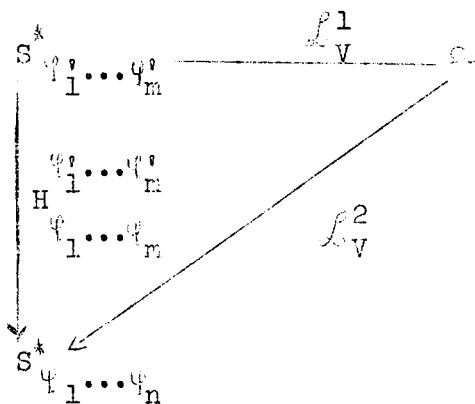
Démonstration :



Supposons V_2 engendré par $\{\varphi_1' \dots \varphi_m'\}$ (non nécessairement libre) et V_1 engendré par $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ (non nécessairement libre également), avec $V_1 \subset V_2$. On a le diagramme canonique commutatif ci-dessus.

Nous voyons par conséquent que si $x = (\langle \varphi_i', f \rangle)_{i=1 \dots m} \in S^*_{\varphi_1' \dots \varphi_m'}$ on a : $H_{\varphi_1 \dots \varphi_n}^{\varphi_1' \dots \varphi_m'}(x) = (\langle \varphi_i, f \rangle)_{i=1 \dots n}$

Soit alors $\mathcal{L}_{V_1+V_2}^L$ un relèvement de L relatif au sous espace V engendré par $\{\varphi_1' \dots \varphi_m', \varphi_1 \dots \varphi_n\}$. Si on désigne par $\mathcal{L}_V^1$ (resp $\mathcal{L}_V^2$)



l'application :

$$\omega \mapsto (\langle \psi_i^1, L_V^1(\omega) \rangle)_{i=1 \dots m}$$

(resp. l'application :

$$\omega \mapsto (\langle \psi_i^1, L_V^2(\omega) \rangle)_{i=1 \dots n}$$

on sait d'après le lemme 2 et sa

démonstration, que $L_V^1(\Omega) \subset S_{\psi_1^1 \dots \psi_m^1}^*$

et $L_V^2(\Omega) \subset S_{\psi_1^1 \dots \psi_n^1}^*$. En outre de la définition de L_V^1 et L_V^2 et de

la propriété énoncée ci-dessus pour $H_{\psi_1^1 \dots \psi_m^1}^{\psi_1^1 \dots \psi_n^1}$, il résulte que :

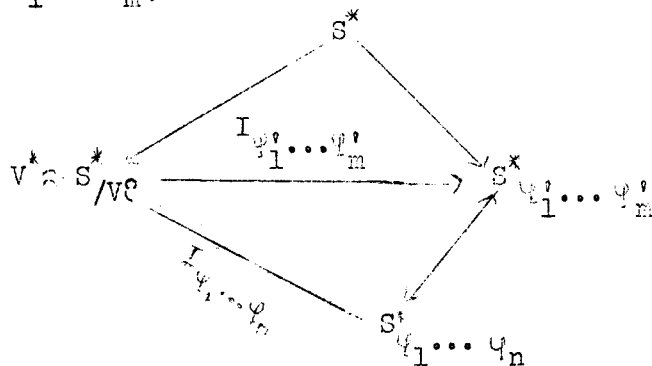
$$L_V^2 = H_{\psi_1^1 \dots \psi_n^1}^{\psi_1^1 \dots \psi_m^1} \circ L_V^1.$$

La mesure $\mu_{\psi_1^1 \dots \psi_n^1}^L$, image de P par L_V^2 est donc image de

$$\mu_{\psi_1^1 \dots \psi_m^1}^L \text{ par } H_{\psi_1^1 \dots \psi_n^1}^{\psi_1^1 \dots \psi_m^1}.$$

Enfin si l'on a V engendré à la fois par $\{\psi_1 \dots \psi_n\}$ et

$\{\psi_1^1 \dots \psi_m^1\}$ le diagramme ci-dessus s'écrit :



Ce qui prouve que la mesure P_V^L est indépendante du système de générateurs (libre ou non) considéré pour $\tilde{V}$. D'où le théorème.

Théorème 2.

1° Un processus généralisé L défini sur S est associé de façon unique, à une équivalence près, à tout système projectif d'espace probabilisés $(S/V_0, \mathcal{B}_{V^*}, P_V, H_{V_1 V_2})$.

2° Ce système projectif définit de façon unique une fonctionnelle aléatoire canonique à valeurs dans S^* admettant pour processus généralisé associé un processus équivalent à L .

Démonstration :

D'après le théorème précédent, à tout processus généralisé correspond un système projectif $(V^*, \mathcal{B}_{V^*}, P_V^L, H_{V_1 V_2})$ unique.

Reciproquement, donnons nous un système projectif $(V^*, \mathcal{B}_{V^*}, P_V, H_{V_1 V_2})$ avec $V^* \subseteq S/V_0$, V décrivant l'ensemble des sous espaces de dimension finie de S . Remarquons d'abord que $\varprojlim (V^*, H_{V_1 V_2})$ s'identifie à S^* . En effet, se donner une famille (x_V) telle que $V \subset V_1 \subset V_2$ on ait $x_{V_1} = H_{V_1 V_2}(x_{V_2})$ revient à se donner un système compatible de formes linéaires sur tous les sous espaces vectoriels de dimension finie de S , donc une forme linéaire sur S . Réciproquement tout élément de S^* définit trivialement un élément (x_V) de la limite projective. (Cf le premier diagramme de la démonstration du th. 1). De même, si (V_n) est une suite croissante de sous espaces de dimension finie de S et si (x_n) est une suite telle que : $x_n \in V_n^*$ et

$H_{V_n V_{n+1}}(x_{n+1}) = x_n$ pour tout n , il lui correspond de façon unique une forme linéaire sur le sous espace vectoriel $\bigcup_n V_n$, soit $\tilde{f}$ telle que $V_n \ni x_n$ s'identifie à la restriction de $\tilde{f}$ à V_n , et par conséquent il existe $f \in S^*$ telle que $x_n =$ projection canonique de f sur $S^*/V_n^0 \approx V_n^*$.

Autrement dit la condition de "séquential maximality" du théorème de Bochner (cf Bochner - Harmonic Analysis and the theory of probabilities Chap. V) ~~est vérifiée~~. Il existe donc une mesure P^* limite projective des mesures P_V , définie sur la plus petite tribu $\mathcal{G}^*$ de S^* rendant mesurables les applications canoniques $S^* \longrightarrow S^*/V_n^0$, c'est à dire la tribu engendrée par les cylindres de la forme :

$$\{f : f \in S^*, \exists \varphi_1 \dots \varphi_n \in S \text{ et } B \text{ borélien de } \mathbb{R}^n, (\langle \varphi_i, f \rangle)_{i=1 \dots n} \in B\}.$$

Le système projectif $(V, \mathcal{B}_{V^*}, P_V, H_{V_1 V_2})$ définit donc une fonctionnelle linéaire canonique sur S^* unique.

Considérons ainsi, la fonctionnelle linéaire aléatoire canonique unique sur S^* associée à $(V, \mathcal{B}_{V^*}, P_V^L, H_{V_1 V_2})$ L étant un processus généralisé quelconque sur S . Pour tout système $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ libre ou non engendrant V , et tout borelien B de $\mathbb{R}^n$, on a par définition :

$$P^* \{f : (\langle \varphi_i, f \rangle)_{i=1 \dots n} \in B\} = \mu_{\varphi_1 \dots \varphi_n}^L(B).$$

Le processus généralisé associé à la fonctionnelle aléatoire canonique (S^*, P^*) est donc bien équivalent à L . D'où le théorème.

1.5 - Cas où P^* est portée par $S' \subset S^*$.

Si P^* est portée par $S' \subset S^*$, la fonctionnelle aléatoire canonique

à valeurs dans S^* associée au processus généralisé L prend ses valeurs dans S' presque sûrement. On peut donc alors parler de la fonctionnelle aléatoire canonique (S', P^*) associée au processus généralisé L .

Remarque :

Si S' est un sous espace muni d'une norme, de S^* , et si P^* est portée par S' on doit avoir, b désignant la boule unité de S' , et P^{*ext} la mesure extérieure associée à P^* :

$$P^{*ext}(b) \neq 0.$$

Sinon on aurait $P^{*ext}(S') = 0$.

1.6 - Exemple d'une fonctionnelle aléatoire, associée à un processus généralisé définie sur un Hilbert H , et non portée par le sous espace $\bar{H}$ (conjugué de H) $\subset H^*$. (H : Hilbert séparable).

Soit L un isomorphisme de H dans $G \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, G étant un sous espace de variables aléatoires gaussiennes de L^2 . (Pour montrer l'existence d'un tel isomorphisme, on prend une base (φ_n) orthonormée complète de H et on prend pour $L(\varphi_n)$ des variables gaussiennes indépendantes normalisées. Il est toujours possible de construire Ω pour qu'un tel choix soit possible).

Il existe donc une fonctionnelle aléatoire canonique $(H^*, \mathcal{C}^*, P^*)$ telle en particulier que les distributions conjointes finies de variables aléatoires $L(\varphi_n)$ soient les mêmes que celles des variables aléatoires $f \leadsto \langle \varphi_n, f \rangle$ définies sur l'espace probabilisé $(H^*, \mathcal{C}^*, P^*)$.

Or les variables aléatoires $L(\varphi_n)$ étant indépendantes,

gaussiennes, de norme 1, on a $P \left[|L \Psi_n|^2 > a \right] = a \neq 0, \forall n$.

En vertu du lemme de Porel Cantelli :

$$P \left[\limsup_n \left[|L \Psi_n|^2 > a \right] \right] = 1.$$

D'où :

$$P \left[\sum_n |L \Psi_n|^2 = +\infty \right] = 1.$$

D'où encore :

$$P^* \left[\left\{ f : \sum_n | \langle \Psi_n, f \rangle |^2 = \infty \right\} \right] = 1.$$

Comme la boule unité b de $\tilde{H} \subset H^*$ est telle que :

$$b = \left\{ f : \sum_n | \langle \Psi_n, f \rangle |^2 \leq 1 \right\}$$

on en déduit que :

$$P^*_{\text{ext}}(b) = 0$$

D'où :

Proposition.

Une isométrie L d'un espace de Hilbert H dans un espace de variables aléatoires gaussiennes, n'admet aucune représentation comme fonctionnelle aléatoire à valeurs dans H .

Remarque :

On peut montrer, et nous montrerons sans doute dans la suite que (Minlos - Kolmogoroff) : pour qu'un processus généralisé L défini sur un espace de Hilbert H , soit représentable par une fonctionnelle aléatoire, à valeurs dans $\tilde{H}$, il faut et il suffit que L puisse s'écrire :

$$L = M \circ A$$

ou A est un opérateur de Hilbert - Schmidt dans H , et M un processus généralisé tel que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans H implique $M(\varphi_n) \longrightarrow M(\varphi)$ en probabilité dans $M(\Omega, \mathcal{F}, P)$.