

LE CALVE

**Modèles linéaires d'apprentissage**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965*  
« Séminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 5, p. 1-14

<[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1964-1965\\_\\_\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A5_0)>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,  
1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MODELES LINEAIRES D'APPRENTISSAGE

° °                    ° °  
°

Dans cet exposé nous reprenons un type particulier du modèle général présenté dans [6].

1 FORMALISATION

Il s'agit d'un processus  $X_n = (Z_n, S_n, A_n, E_n)$  indexé par  $\mathbf{N}$ , à valeurs dans  $(Z, \mathcal{Z}) \times (S, \mathcal{S}) \times (A, \mathcal{A}) \times (E, \mathcal{E})$ .

Nous rappelons que  $Z$  représente l'ensemble des états intérieurs,  $S$  l'ensemble des stimuli,  $A$  l'ensemble des réponses,  $E$  l'ensemble des renforcements. A chaque état intérieur  $z \in Z$  correspond un opérateur  $T_z$  de passage de  $S$  dans  $A$  :  $T_z(s, a)$ .

On se donne les probabilités  $Q_0$  sur  $Z$ ,  $Q'_0$  sur  $S$ ; les probabilités de passage  $P_1(s, a, \cdot)$  de  $S \times A \rightarrow E$ ,  $P_2(s, a, e, \cdot)$  de  $S \times A \times E \rightarrow S$ , qui permettent de formuler les règles opératoires suivantes (cf. [6])

$$R_0) \quad P(Z_0 \in \Delta) = Q_0(\Delta) \qquad P(S_0 \in \Lambda) = Q'_0(\Lambda)$$

$$R_1) \quad P(A_n \in \Gamma / Z_n, S_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = T_{Z_n}(S_n, \Gamma)$$

$$R_3) \quad P(E_n \in H / Z_n, S_n, A_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = P_1(S_n, A_n, H)$$

$$R_4) \quad P(S_{n+1} \in G / Z_{n+1}, X_n, \dots, X_0) = P_2(S_n, A_n, E_n, G)$$

La règle  $R_2$ , qui donne la loi de l'évolution de l'opérateur  $T_{Z_n}$  lié à l'état intérieur  $Z_n$ , s'exprime cette fois au moyen d'un opérateur linéaire  $L_{S_n, E_n}$ , défini sur les fonctions de transition de  $S$  dans  $A$ , laissant invariant le sous-ensemble convexe des probabilités de transition.

L'application affine  $L_{S_n, E_n}$  du convexe  $\mathcal{M}_S(A)$  ensemble des probabilités de transition de  $S$  dans  $A$ ) dans lui-même est dans les applications souvent définie de la façon suivante :

On se donne  $(s, A', e) \rightarrow \theta(s, A', e)$  une application mesurable de  $S \times \mathcal{A} \times E$  dans  $[0, 1]$  et  $(s, e) \rightarrow \Lambda(s, e)$  encore notée  $\Lambda_e(s)$  une application mesurable de  $S \times E$  dans  $\mathcal{M}_S(A)$ . On pose alors :

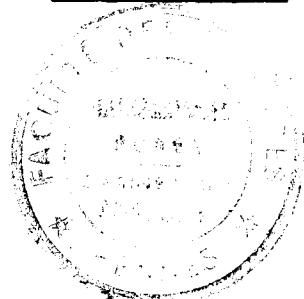
$$L_{S_n, E_n}[\gamma(s, r)] = [1 - \theta(S_n, r, E_n)] \gamma(s, r) + \theta(S_n, r, E_n) \Lambda_{E_n}(S_n, s, r)$$

$$\forall \gamma(\dots) \in \mathcal{M}_S(A)$$

On a donc :

$$R_2) \quad T_{Z_{n+1}}(\dots) = L_{S_n, E_n} [T_{Z_n}(\dots)]$$

L'opérateur  $L_{S_n, E_n}$  ainsi défini est appelé fonction d'adaptation linéaire de caractéristiques  $\theta$  et  $\Lambda$ .



Remarquons que la connaissance de  $Z_n, S_n, E_n$ , détermine complètement l'opérateur  $T_{Z_n + 1}$ .

Remarquons également que les axiomes  $(R_3)$  et  $(R_4)$  entraînent que  $Z_n$  est indépendant de  $S_n$  et  $E_n$ .

## 2 PROPRIETES ASYMPTOTIQUES

### 2.1. - Etude de $P(A_{n+1} \in I' / S_{n+1})$

Si les probabilités conditionnelles  $P(A_n \in I' / S_n)$  sont régulières, et  $Z_n$  étant indépendant de  $S_n$ , on a

$$P(A_n \in I' / S_n) = \int P(A_n \in I' / Z_n, S_n) P(dZ_n) \quad (\text{cf. appendice}).$$

Nous nous placerons dans ce cas.

Posons  $\alpha_n = E [T_{Z_n}]$  que nous noterons encore

$$\alpha_n(\dots) = \int T_{Z_n}(\dots) dP \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\forall s \in \mathcal{S}, I' \in \mathcal{A} : \alpha_n(s, I') = \int T_{Z_n(\omega)}(s, I') dP(\omega) \quad \text{On}$$

vérifie facilement que  $\alpha_n(s, I')$  défini par cette intégrale appartient à  $\mathcal{M}_S(A)$ .

Donc 
$$\underline{\alpha_n(S_n, I') = P(A_n \in I' / S_n)}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus on peut écrire : } P(dZ_{n+1}) &= \int P(dZ_{n+1} / Z_n, S_n, E_n) \\ &\quad * P(dZ_n, dS_n, dE_n) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}(\dots) &= \int T_{Z_{n+1}}(\dots) P(dZ_{n+1}) \\ &= \iint T_{Z_{n+1}}(\dots) P(dZ_{n+1}/Z_n, S_n, E_n) P(dZ_n, dS_n, dE_n)\end{aligned}$$

Or la connaissance de  $Z_n, S_n, E_n$  entraînant la connaissance de  $T_{Z_{n+1}}$  ( $T_{Z_{n+1}} = L_{S_n, E_n} [T_{Z_n}]$ ) :

$$\alpha_{n+1}(\dots) = \int L_{S_n, E_n} [T_{Z_n}(\dots)] P(dZ_n, dS_n, dE_n)$$

De plus,  $Z_n$  étant indépendant de  $S_n$  et  $E_n$  :

$$\alpha_{n+1}(\dots) = \int P(dS_n, dE_n) \int L_{S_n, E_n} [T_{Z_n}(\dots)] P(dZ_n)$$

La linéarité de  $L_{S_n, E_n}$  permet alors d'écrire

$$\alpha_{n+1}(\dots) = \int L_{S_n, E_n} [E(T_{Z_n}(\dots))] P(dS_n, dE_n)$$

Soit encore :

$$\alpha_{n+1}(\dots) = \int L_{S_n, E_n} [\alpha_n(\dots)] P(dS_n, dE_n)$$

Comme enfin l'application  $L_{S_n, E_n} \rightarrow L_{S_n, E_n} [\alpha_n(s, r)]$

est linéaire en  $L$ , on a :

$$\alpha_{n+1}(\dots) = \left[ \int L_{S_n, E_n} P(dS_n, dE_n) \right] \alpha_n(\dots).$$

Et en remarquant que l'opérateur agissant sur  $\alpha_n$  ne dépend que de  $n$  :

$$\alpha_{n+1}(\cdot, \cdot) = T_n [\alpha_n(\cdot, \cdot)] \text{ avec } T_n = \int L_{S_n, E_n} P(dS_n, dE_n)$$

## 2.2. - Etude de $P(A \in \Gamma)$ .

Nous avons 
$$P(A_n \in \Gamma) = \int P(A_n \in \Gamma / S_n) P(dS_n)$$

donc 
$$P(A_n \in \Gamma) = \int \alpha_n(S_n, \Gamma) P(dS_n)$$

Alors 
$$P(A_{n+1} \in \Gamma) = \int \alpha_{n+1}(S_{n+1}, \Gamma) P(dS_{n+1})$$

$$= T_n \left[ \int \alpha_n(S_{n+1}, \Gamma) P(dS_{n+1}) \right]$$

Donc 
$$\underline{\underline{P(A_{n+1} \in \Gamma) = T_n [P(A_n \in \Gamma)]}}$$

## 3. PARTICULARISATIONS DU MODELE GENERAL

3.1. 
$$\underline{S = \{s_1, s_2\}, A = E = \{a, a'\}} \text{ et règle totalement}$$

indépendante stationnaire. (Pour la Terminologie cf [8])

On prend  $(T_z)_{z \in Z} = [0,1]^2$  isomorphe à  $\mathcal{M}_S(A)$   
 puisque la donnée de  $T_z$  est équivalente à celle de  $T_z(s_1, a)$  et  $T_z(s_2, a)$ .

Les caractéristiques de la fonction d'adaptation seront

$$\theta(s, \Gamma, e) = \theta \text{ constante et } \Lambda(S_n, E_n, s_i, a) = 1 \text{ si } S_n = s_i \text{ et } E_n = a$$
  
 avec  $\xi_n(a) = 1$  si  $E_n = a$ , 0 autrement.

Les axiomes s'écrivent donc :

$$R_1) P(A_n = a / Z_n, S_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = T_{Z_n}(S_n, a)$$

$$R_2) T_{Z_{n+1}}(s_i, a) = (1 - \theta) T_{Z_n}(s_i, a) + \xi_n(a) \mathbb{1}_{\{s_i\}} S_n$$

$$R_3) P(E_n = a / Z_n, S_n, A_n, X_0, \dots, X_{n-1}) = \eta(S_n)$$

On posera  $P(E_n = a) = \pi$

$$R_4) \quad P(S_n = s_i / Z_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = \alpha_i$$

L'opérateur  $L_{S_n, E_n}$  est donc défini ici par :

$$L_{S_n, E_n} f(s_i, a) = (1 - \theta) f(s_i, a) + \theta \mathcal{E}_{E_n}^{(a)} \cdot \frac{1}{\{s_i\}} S_n$$

$$\text{donc } T_n f(s_i, a) = (1 - \theta) f(s_i, a) + \theta P(E_n = a, S_n = s_i)$$

$$P(A_{n+1} = a / S_{n+1} = s_i) = (1 - \theta) P(A_n = a / S_n = s_i) + \theta P(E_n = a, S_n = s_i)$$

$$P(A_{n+1} = a / S_n = s_i) = (1 - \theta) P(A_n = a / S_n = s_i) + \theta \alpha_i \pi(s_i)$$


---

Or  $\theta$  étant inférieur à 1, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n = a / S_n = s_i) = P(E_n = a, S_n = s_i) = \alpha_i \pi(s_i)$$


---

De même

$$P(A_{n+1} = a) = (1 - \theta) P(A_n = a) + \theta P(E_n = a)$$


---

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n = a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n = a) = \pi$$


---

Résultat pouvant être considéré comme une sorte de loi de l'ajustement.

3.2. - Modèles continus d'Estes et Suppes pour  $S = \{s\}$   $A = E$   
 $= [a, b] \subset \mathbb{R}$

Pour  $Z$  on prend l'ensemble des fonctions de répartition. La fonction d'adaptation linéaire est définie par :

$$L_{E_n} T_{Z_n} (A) = (1 - \theta) T_{Z_n} (A) + \theta K (A, E_n)$$

$$\theta \text{ étant une constante et } K (A, E_n) = \int_A k (x, E_n) dx$$

La fonction  $k (x, E_n)$  porte le nom de fonction de répartition d'étalement. Elle exprime que le renforcement n'agit pas seulement au point  $x$ , mais "s'étalement" sur les points voisins.

On se donne en plus la distribution de probabilité de  $E_n$  :

$$P (E_n \leq y) = \int_a^y f_n (t) dt$$

Pour simplifier l'écriture on posera

$$P (A_n \leq x) = R_n (x) = \int_a^x r_n (t) dt \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n (x) = R (x)$$

Dans ces conditions l'opérateur  $T_n$ , défini par

$$\int_{L_{S_n}, E_n} P (dS_n, dE_n) \text{ devient}$$

$$T_n [h (A)] = (1 - \theta) h (A) + \theta \int_a^b \int_A k (x, t) f_n (t) dx dt$$

Donc

$$P (A_{n+1} \leq x) = (1 - \theta) P (A_n \leq x) + \theta \int_a^b \int_a^x k (x, t) f_n (t) dx dt$$


---

Nous allons voir ce que devient cette relation suivant différents types de loi de renforcement.

### 3.2.1. - Renforcement indépendant.

Dans ce cas  $f_n (t) = f (t)$ . L'opérateur  $T_n$  est alors indépendant de  $n$ . Il est alors immédiat que

$$R (x) = \int_a^b \int_a^x k (x, t) f (t) dx dt.$$

3.2.2. - Renforcement "simplement contingent"

Cette loi est constituée par la donnée de fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  et d'un point  $C$  de l'intervalle  $[a, b]$  tels que

$$f_n(y) = \int_a^C f_1(y) r_n(x) dx + \int_C^b f_2(y) r_n(x) dx$$

On a alors

$$R(x) = \int_a^b \int_a^x k(x, y) [R(c) f_1(y) + (1 - R(c)) f_2(y)] dx dy$$

3.2.3. - Renforcement "contingent continu"

Ce cas est obtenu comme limite du cas précédent, en prenant une suite croissante de points de subdivision  $c$ .

$$\text{On a alors } f_n(y) = \int_a^b f(y/x) r_n(x) dx$$

On peut montrer que :

$$R(x) = \int_a^b \int_a^b \int_a^x k(x, y) f(y/t) r(t) dx dt dy$$

Remarque : Le résultat le plus frappant est que la loi de l'ajustement  $(R(x) = P(E \leq x))$  a disparu. On la retrouverait en prenant

$$k(x, y) = \frac{1}{\{x\}} y.$$

3.2.4. - Exemples.

Nous prendrons  $[a, b] = [0, 2\pi]$ . Nous nous placerons dans le cas du renforcement indépendant, (encore appelé cas non contingent), les fonctions  $f$  et  $K_1$  étant prises périodiques de période  $2\pi$ .

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{\pi^2} & \text{Si } 0 \leq y \leq \pi \\ \frac{2}{\pi} - \frac{y}{\pi^2} & \pi < y \leq 2\pi \end{cases}$$

a) Distribution d'étalement parabolique.

$$k_1(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} - (x-y)^2 & \text{Si } |x-y| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \\ 0 & \text{Si } \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} < |x-y| \leq \pi \end{cases}$$

On obtient alors

$$r_1(x) = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{x^4}{6} - \frac{2\pi}{3} x^3 + (\pi^2 - a^2) x^2 + \left( 2a^2\pi - \frac{2}{3}\pi^3 \right) x + \frac{\pi^4}{6} - a^2\pi^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{a^4}{4} \right]$$

$$\text{En posant } a = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}$$

b) Distribution d'étalement exponentielle.

$$k_2(x, y) = \frac{e^{-|x-y|}}{2(1-e^{-\pi})} \quad \text{pour } -\pi < x-y < \pi$$

On trouve alors

$$r_2(x) = - \frac{e^{x\pi} + (x-\pi)e^{-\pi} + e^{-x} + x}{\pi^2(1-e^{-\pi})}$$

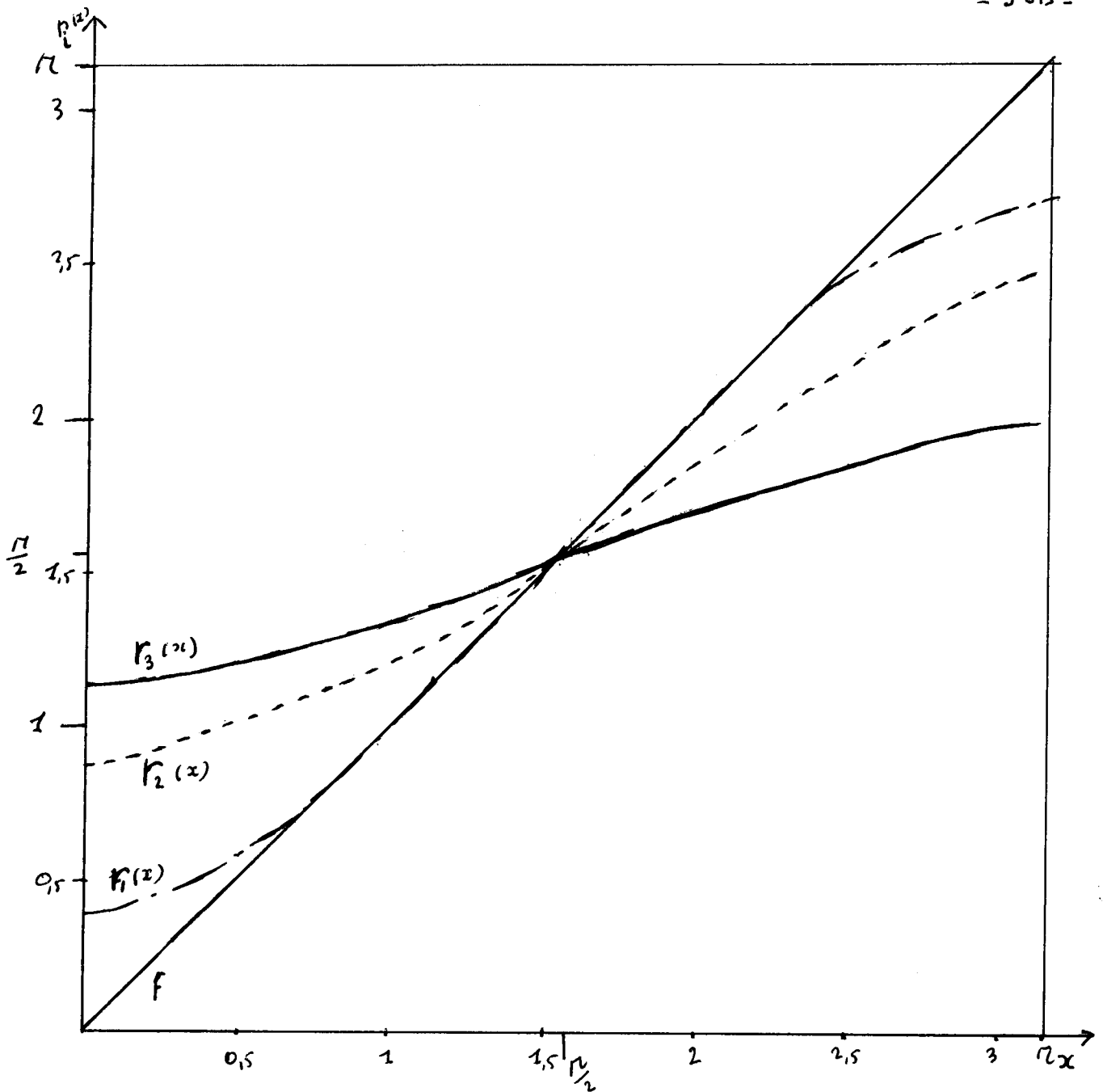
c) Distribution d'étalement trigonométrique.

$$k_3(x, y) = \frac{1}{4} \cos \frac{x-y}{2} \quad -\pi < x-y < \pi$$

$$\text{On trouve } r_3(x) = \frac{1}{\pi^2} \left[ 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \cos \frac{x}{2} + \pi - x \right]$$

#### 4. - SUR UN MODELE ETUDIE PAR M. C. BERT (cf. [2])

Ce modèle ne rentre pas dans notre schéma pour la raison suivante : l'axiome  $R_3$  du renforcement est remplacé ici par un axiome  $R'_3$  moins restrictif.



Distribution asymptotique des réponses pour le modèle linéaire continu d'ESTES-SUPPES, correspondant aux trois distributions d'étalement parabolique ( $r_1(x)$ ), exponentielle ( $r_2(x)$ ) et trigonométrique ( $r_3(x)$ ), avec renforcement indépendant.

Signalons que l'on peut étendre notre cadre de façon à inclure le modèle de M. C. BERT en remplaçant  $(R_3)$  par un analogue de  $(R'_3)$  et qu'en particulier les résultats du paragraphe 2 restent valables.

On se place dans le cas où  $S = \{s\}$  c'est-à-dire un seul stimulus. L'ensemble des opérateurs  $T_{Z_n}$  est identifiable à l'ensemble  $\mathcal{M}(A)$  des mesures sur A.

Les caractéristiques  $\theta(s, r, e)$  et  $\Lambda(s, e)$  de la fonction d'adaptation sont prises ainsi :

$$\theta(s, r, e) = \theta \text{ constante, } \theta \in [0, 1]$$

$\Lambda(s, r, e) = G(e, r)$  probabilité de transition de E dans A.

$$\text{Donc } L_{E_n} [T_{Z_n}(r)] = (1 - \theta) T_{Z_n}(r) + \theta G(E_n, r)$$

Enfin,  $\beta_n(\dots)$  étant une probabilité de transition de  $A^n \times E^{n-1}$  dans E, on pose

$$\begin{aligned} P(E_n \in H / X_0, \dots, X_{n-1}, Z_n, A_n) \\ = \beta_n(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, A_n, H) \end{aligned}$$

On désignera par  $\mathcal{B}_n$  la sous-tribu engendrée par  $X_0, \dots, X_n$

## THEOREME

### - Hypothèses.

1°) La probabilité de transition  $G(\dots)$  définie à partir d'une partition dénombrable  $\sum_i D_i$  de  $(E, \mathcal{E})$  et d'une famille de probabilités  $(G_{D_i})_i$  sur  $(A, \mathcal{A})$  par la formule  $G(E_n, \cdot) = \sum_i 1_{D_i}(E_n) \cdot G_{D_i}(\cdot)$ .

2°)  $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par la donnée de  $m+1$  probabilités de transition  $\beta_h$  ( $0 \leq h \leq m$ ), probabilités de transition de  $(A \times E)^h \rightarrow E$  ( $m$  entier positif) et par :

$$\forall n > m, \quad \beta_n(X_0, \dots, X_n, \dots) = \beta_m(X_{n-m}, \dots, X_n, \dots)$$

3°)  $\exists D \in \mathcal{E}$ , élément de la partition  $\sum_i D_i$  et  $0 < \eta < 1 \quad \forall h \leq m, \quad \forall u \in (A \times E)^h \times A : \beta_h(u, D) > \eta$

Soit alors  $C \in \mathcal{A} : G_D(c) = \alpha > 0$  et  $\sum_j C_j$  une partition dénombrable de  $(A, \mathcal{A})$  dont  $C$  est élément.

4°) La probabilité de transition  $\beta_m(\dots)$  est définie à partir de la partition  $\sum_k A_k$  de  $(A \times E)^m \times A$  induite par les partitions  $\sum_i D_i$  et  $\sum_j C_j$  de  $E$  et  $A$  respectivement, et d'une famille de probabilités  $Q_{A_K}(\cdot)$  sur  $(E, \mathcal{E})$  par la formule

$$\beta_m(X_{n-m}, \dots, X_n, \dots) = \sum_K 1_{A_K}(X_{n-m}, \dots, X_n) Q_{A_K}(\cdot)$$

Les probabilités de transition  $\beta_h(\dots)$   $0 \leq h \leq m$  sont définies suivant un schéma analogue.

#### - CONCLUSIONS.

Il existe une probabilité sur  $(A, \mathcal{A})$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N} :$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ A_{K+n} \in H/B_K \right\} = \mu(H)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ A_n \in H \right\} = \mu(H)$$

-----

## APPENDICE

-----

Soient  $X, Y, Z$  trois variables aléatoires à valeurs dans  $(A, \mathcal{A}), (B, \mathcal{B}), (C, \mathcal{C})$  respectivement.

Si  $Z$  admet distribution conditionnelle régulière  $\nu^Y(\cdot)$  par rapport à  $Y$ , pour tout  $A' \in \mathcal{A}$  on a :

$$P(X \in A' / Y) = \int P(X \in A' / Y, Z) \nu^Y(dz)$$

- Démonstration.

Soit  $F \in \mathcal{C}(Y)$ ,  $F = Y^{-1}(B')$   $B' \in \mathcal{B}$ :

par définition de  $P(X \in A' / Y, Z)$ , et  $P_{YZ}$  désignant la distribution conjointe de  $Y$  et  $Z$  :

$$\int_F 1_{[X \in A']} dP = \int_{B \times C} P(X \in A' / Y = y, Z = z) P_{YZ}(dy, dz)$$

L'hypothèse sur la régularité de  $\nu^Y(C')$  permet d'écrire :

$$\int_F 1_{[X \in A']} dP = \int_{B'} \left[ \int_C P(X \in A' / Y = y, Z = z) \nu^Y(dz) \right] P_Y(dy)$$

Ceci prouve la formule

COROLLAIRE : Si  $Y$  et  $Z$  sont indépendants :

$$P(X \in A' / Y) = \int P(X \in A' / Y, Z = z) P_Z(dz)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- - - - -

- [1] BUSH, ESTES et al : Studies in Mathematical learning Theory  
( Stanford, Calif. Stanford Univ. Press 1959).
- [2] M. C. BERT Convergence d'une chaîne à liaisons complètes et application à un modèle d'apprentissage ( C.R. Acad. Sc. Paris, t. 259 ( 21 - 9- 64).
- [3] BUSH, LUCE, GALANTER : Handbook of Mathematical Psychology  
( New-York, Wiley 1963 5 volumes)
- [4] COURREGE et ROUANET : Sur les fondements des modèles stochastiques d'Adaptation. (Paris 1964).
- [5] ESTES et SUPPES
  - a) Foundations of linear Models ( chap. 8 in Bush, Estes cf [1]).
  - b) Foundations of statistical learning Theory : II stimulus Sampling Models for simple learning, Technical Report n° 4, 1959, Institute for Math. Studies in Soc. Sciences Stanford Calif.
- [6] LE CALVE : Quelques modèles stochastiques d'apprentissage.  
Université de Rennes. Fac. des Sciences. Seminaire de Probabilités. Exposé n° 4 du 16-12-64.

- [7] LUCE. D. Individual chance Behaviour. ( ch. 4. New-York, Wiley 1959).
- [8] ROUANET : Les modèles stochastiques de l'apprentissage.  
(Mathématiques et sciences humaines ( E. P. H. E. Paris.  
n° 5 - 6 - 8 1964).
- [9] SUPPES et ATKINSON : Markov learning Models for multiperson  
Interaction (Stanford Calif. Stanford Univ. Press 1960).

Nombreux articles dans la revue PSYCHOMETRIKA

- ° - ° - ° - ° - ° - ° - ° - ° -