

LE CALVE

Quelques modèles stochastiques d'apprentissage

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Séminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 4, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES MODELES STOCHASTIQUES D'APPRENTISSAGE

I - INTRODUCTION.

Considérons l'expérience suivante : un rat est placé à l'entrée d'un couloir se ramifiant ensuite en deux autres couloirs, droit et gauche. A l'extrémité d'un couloir (le droit par exemple) on place de la nourriture, et on observe le comportement du rat, en particulier quel est le premier couloir emprunté :

Cette expérience peut se schématiser de la façon suivante ;

A un signal s (ici ouverture de la cage du rat) le sujet a fait une réponse a (le couloir de droite par exemple) on lui a présenté un renforcement e (présence de nourriture au bout du couloir ou non).

Dans l'exemple très simple précédent, l'espace S des signaux est réduit à un seul élément (ouverture de la cage), l'espace A des réponses à deux éléments (couloir de droite, couloir de gauche) et le renforcement constant (présence de la nourriture au bout du couloir de droite).

On constate qu'au bout d'un certain nombre d'essais (une cinquantaine), l'animal emprunte toujours en premier le couloir de droite. On dit qu'il y a eu "apprentissage de la réponse droite".

Si l'on change la loi du renforcement, plaçant par exemple la nourriture à droite avec une probabilité Π , on constate, après un certain nombre d'essais, beaucoup plus grand que dans le premier cas, que le rat tend à donner la réponse droite avec la probabilité Π . Ce résultat porte en général le nom de "loi de l'ajustement".

° Bien entendu il est possible de varier à l'infini, de tels modèles, soit en changeant les espaces S , A , E , soit en changeant les règles de présentation des signaux ou des renforcements.

Nous allons donner un modèle mathématique général pour de telles expériences, et, le particularisant, étudier quelques modèles simples.

II - MODELE GENERAL.

a) On se donne quatres espaces mesurables $(S, \mathcal{F})$, $(A, \mathcal{A})$, $(E, \mathcal{E})$ et $(Z, \mathcal{Z})$ dits respectivement des stimuli, des réponses, des renforcements, et des états.

b) Une probabilité Q_0 sur $(Z, \mathcal{Z})$ et une probabilité R_0 sur $(S, \mathcal{F})$

c) Une probabilité de passage $P_a(z, s, \cdot)$ de $Z \times S \rightarrow A$ dite règle de réponse.

d) Une probabilité de passage $P_z(z, s, a, e, \cdot)$ de

$Z \times S \times A \times E \rightarrow Z$ dite règle de conditionnement.

e) Une probabilité de passage $P_e(s, a, \cdot)$ de $S \times A \rightarrow E$ dite règle de renforcement.

f) Une probabilité de passage $P_s (s, a, e, .)$ de $S \times A \times E \rightarrow S$ dite règle de présentation des stimuli.

Concrètement, les données de S, A, E sont des données observables, les probabilités P_e et P_s définissant les règles d'expérimentation, Z, P_z et P_a des constructions hypothétiques liées au comportement du sujet sur lequel on fait l'expérience. ($Z_{n+1} \in Z$ pouvant être considéré comme "l'état d'esprit" du sujet après le $n^{\text{ième}}$ essai, P_z la façon dont sans "état d'esprit" évolué, en fonction des essais, et P_a sa façon de répondre en fonction du stimulus présenté et de son "état d'esprit").

On cherche alors à fabriquer un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n))$ à valeurs dans $(Z \times S \times A \times E, \mathcal{Z} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{E})$ et satisfaisant aux relations suivantes

$$(R_0) \quad P(Z_0 \in \Lambda) = Q_0(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{Z}, \quad P(S_0 \in \Lambda) = R_0(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{S}$$

$$(R_1) \quad P(A_n \in \Lambda / Z_n, S_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = P_a(Z_n, S_n, \Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{A}$$

$$(R_2) \quad P(Z_{n+1} \in \Lambda / Z_n, S_n, A_n, E_n, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \\ = P_z(Z_n, S_n, A_n, E_n, \Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{Z}$$

$$(R_3) \quad P(E_n \in H / S_n, A_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = P_e(S_n, A_n, H) \quad \forall H \in \mathcal{E}$$

$$(R_4) \quad P(S_{n+1} \in G / S_n, A_n, E_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = P_s(S_n, A_n, E_n, G) \quad \forall G \in \mathcal{S}$$

Nous énoncerons sans démonstration un résultat de [6]

2.1

LEMME. Soit $X = [\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ un processus à valeurs dans $Z \times S \times A \times E$. La condition nécessaire et suffisante pour que X satisfasse aux relations R_i est que X soit un processus de Markov à transition

stationnaire admettant Q comme probabilité de transition et π_0 pour distribution initiale, avec

$$Q(z, s, a, e, M) = \int_Z P_z(z, s, a, e, dz) \int_S P_s(s, a, e, ds) \int_A P_a(z', a', da') \int_E P_e(s', a', de') \frac{1}{M}(z', s', a', e')$$

et

$$\pi_0(M) = \int_Z Q_0(dz) \int_S R_0(ds) \int_A P_a(z, s, da) \int_E P_e(s, a, de) \frac{1}{M}(z, s, a, e)$$

En appliquant le théorème de Ionescu Tulcea on obtient alors le théorème : (cf. [6])

2-2

THEOREME FONDAMENTAL D'EXISTENCE.

Soit $\Omega = (Z \times S \times A \times E)^N$ et pour tout $n \in N$, soit X_n la projection de Ω sur $Z_n \times S_n \times A_n \times E_n$. Soit $\mathcal{F}$ la tribu sur Ω engendrée par les X_n ($n \in N$). Alors

- il existe une probabilité P et une seule sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que le processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_n)_{n \in N})$ satisfasse aux relations (caractère Markovien stationnaire).

$$P \left[X_{n+1} \in M / X_0, X, \dots, X_n \right] = P \left[X_{n+1} \in M / X_n \right] = Q \left[X_n, M \right]$$

$$P \left[X_0 \in M \right] = \pi_0(M)$$

Les fonctions π_0 et Q étant définies comme précédemment.

Nous n'avons pu affirmer le caractère markovien et l'unicité qu'en faisant des hypothèses particulières sur les règles de renforcement

et de présentation des stimuli (caractère simplement dépendant : ne dépendant des événements antérieurs que par l'intermédiaire des derniers événements observés).

Dans le cas de règles plus générales, on peut encore montrer l'existence et l'unicité d'un processus, mais celui-ci n'est plus en général Markovien.

Dans le cas où $X_n = (Z_n, S_n, A_n, E_n)$ est Markovien on peut montrer que les processus faisant intervenir le couple (Z_n, S_n) , tels que (Z_n, S_n, A_n) , (Z_n, S_n, E_n) , (Z_n, S_n) sont markoviens, mais, en général, les autres tels que (S_n, A_n, E_n) processus des événements observables ne le sont pas.

On étudiera donc, dans les cas particuliers, les propriétés des processus markoviens et on en déduira ceux des événements observables.

En faisant des hypothèses simplificatrices sur les fonctions P_e et P_s on obtient des cas particuliers intéressants :

- P_s est constante en s, a, e : la règle de présentation des stimuli est dite indépendante.
- P_s est une mesure ponctuelle pour chaque s, a, e la règle de présentation est dite déterministe.
- La conjonction des deux cas précédents correspond au cas où le stimulus S_n est constant d'essai à essai.
- Si P_e est une fonction constante en S_n , la règle de renforcement dite "aléatoire indépendante".
- Si P_e est une mesure ponctuelle pour chaque S_n , la règle de renforcement est dite déterministe.

- La conjonction des deux cas précédents correspond au cas du renforcement constant.

III - PARTICULARISATIONS DU MODELE GENERAL.

Nous prendrons $S = \{s\}$ c'est-à-dire un seul stimulus. Il suffit alors de se donner les espaces A, E, Z , les probabilités P_a de Z dans P , P_e de A dans E , et P_z de $Z \times A \times E$ dans Z

De plus, si la fonction $z \rightarrow P_a(z, \cdot)$ est injective il est possible d'identifier Z à l'ensemble des mesures de probabilité sur $(A, \mathcal{A})$, soit $\mathcal{M}(A, \mathcal{A})$.

Bien souvent on ne prendra pour Z qu'un sous-ensemble de $\mathcal{M}(A, \mathcal{A})$.

Dans bien des cas il est possible également de faire $E = A$.

Pratiquement deux cas seulement ont été bien étudiés :

1°) A (ou E) est fini ($\mathcal{A} = \mathcal{P}(A)$)

2°) A (ou E) est la droite réelle R ($\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens).

Pour ces deux cas Estes et Suppes (cf. [3]) ont défini deux modèles : le modèle linéaire, le modèle à un élément.

3-1°) Modèle linéaire $A = E = \{a, a'\}$

3.1.1 On prend $Z = \mathcal{M}(A)$. On peut d'ailleurs caractériser une probabilité sur A par la mesure de $\{a\}$, et par suite, identifier Z à $[0;1]$ (voir R_1 ci-dessous).

Les règles se réduisent à

R_0) $Z_0 = P_0$ où P_0 est un paramètre $0 \leq P_0 \leq 1$

R_1) $P(A_n = a / Z_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = Z_n$

$$R'_2) \quad Z_{n+1} = (1 - \theta) Z_n + \theta 1_{\{a\}} E_n$$

$$R_3) \quad P(E_n = a / Z_n, A_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = \Pi$$

L'axiome R_3 correspondant à la règle dite du renforcement indépendant. R'_2 indique que Z_{n+1} est parfaitement déterminé par la connaissance de Z_n et de E_n .

3.1.2 LOI DE L'AJUSTEMENT

On a :

$$P(A_n = a) = \int_{\Omega} P(A_n = a / Z_n) dP = \int_{\Omega} Z_n dP$$

donc

$$P(A_{n+1} = a) = (1 - \theta) P(A_n = a) + \theta \Pi$$

de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n = a) = \Pi$ on retrouve ici la loi de l'ajus-

tement

3.1.3 PROBABILITES SEQUENTIELLES

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = a, E_n = a) &= \int_{\Omega} P(A_{n+1} = a, E_n = a / Z_{n+1}) dP(A_{n+1} = a, E_n = a, \mathbf{z}) \\ &= \int_{\Omega} P(A_{n+1} = a / Z_{n+1}) \cdot P(E_n = a / A_{n+1}, Z_{n+1}) dP = \Pi \int_{\Omega} Z_{n+1} dP(\dots, \mathbf{z}) \\ &= \left[(1 - \theta) P(A_n = a) + \theta \right] \Pi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P(A_{n+1} = a / E_n = a) = (1 - \theta) P(A_n = a) + \theta \rightarrow (1 - \theta) \Pi + \theta \\ P(A_{n+1} = a / E_n = a') = (1 - \theta) P(A_n = a) \rightarrow (1 - \theta) \Pi \end{cases}$$

$$\boxed{P(A_{n+1} = a/E_n = a, A_n = a)}$$

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = a, E_n = a, A_n = a) &= \int_{\Omega} P(A_{n+1} = a, E_n = a, A_n = a/Z_n) dP \\ &= \int_{\Omega} P(A_n = a/Z_n) \cdot P(E_n = a/A_n = a, Z_n) \cdot P(A_{n+1} = a/E_n = a, A_n = a, Z_n) dP \\ &= \int_{\Omega} Z_n \cdot \Pi \cdot Z_{n+1} dP = \left[(1 - \theta) E(Z_n^2) + \theta E(Z_n) \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } P(E_n = a, A_n = a) = P(A_n = a) \times P(E_n = a/A_n = a) = \Pi E(Z_n)$$

donc

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a, A_n = a) = \frac{(1 - \theta) E(Z_n^2) + \theta E(Z_n)}{E(Z_n)}$$

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a', A_n = a) = \frac{(1 - \theta) E(Z_n^2)}{E(Z_n)}$$

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a, A_n = a') = (1 - \theta) \left[\frac{E(Z_n) - E(Z_n^2)}{1 - E(Z_n)} \right] + \theta$$

$$P(A_{n+1} = a/E_n = a', A_n = a') = (1 - \theta) \frac{[E(Z_n) - E(Z_n^2)]}{1 - E(Z_n)}$$

$$\boxed{E(Z_n^P)}$$

$$Z_{n+1}^P = \sum_{i=0}^P C_P^i \theta^i (1 - \theta)^{P-i} Z_n^{P-i} 1_{\{a\}} E_n$$

$$\text{donc } E(Z_{n+1}^P) = \sum_{i=0}^P \pi_{oi} \theta^i (1-\theta)^{P-i} E(Z_n^{P-i})$$

avec

$$\pi_{oi} = \pi \quad \text{si } i \neq 0 \quad \text{et } \pi_{oo} = 1$$

3-1-4

CONVERGENCE FAIBLE DE Z_n

Nous allons montrer que la suite (Z_n) de variables aléatoires converge faiblement vers une variable z

Comme $0 \leq Z_n \leq 1$ presque sûrement les moments $E(Z_n^P)$ des variables Z_n sont uniformément bornés par 1. Nous avons donc seulement à montrer (cf. le théorème de convergence des moments [4] p. 185, que pour tout P $\lim_n E(Z_n^P)$ existe.

Puisque $0 \leq Z_n \leq 1$ $E(Z_n^{P+1}) \leq E(Z_n^P)$. On a donc la représentation suivante de la fonction caractéristique

$$\phi_{Z_n}(t) \text{ de } Z_n : \quad \phi_{Z_n}(t) = 1 + it + \dots + \frac{(it)^P}{P!} E(Z_n^P) + \dots$$

Démontrons la convergence en n par récurrence sur P . Elle est vraie $P = 1$ ($E(Z_n) = P(A_n = a)$)

Supposons que $E(Z_n^i)$ converge en n $\forall i < P-1$ et montrons que $E(Z_n^P)$ converge en n .

$$E(Z_{n+1}^P) = \sum_{i=0}^P \pi_{oi} C_P^i \theta^i (1-\theta)^{P-i} E(Z_n^{P-i})$$

$= \alpha E(Z_n^P) + V_n$, V_n étant une suite convergente en n et $\alpha = (1-\theta)^P \leq 1$

Donc, à partir d'un certain rang, en appelant l la limite de V_n

$$\alpha E(Z_n^P) + l - \varepsilon \leq E(Z_{n+1}^P) \leq \alpha E(Z_n^P) + l + \varepsilon$$

la première suite converge vers $\frac{l - \varepsilon}{1 - \alpha}$

la deuxième suite converge vers $\frac{l + \varepsilon}{1 - \alpha}$

Le choix de ε étant arbitraire entraîne donc que $E(Z_{n+1}^P)$ converge en n vers $\frac{l}{1 - \alpha}$

3-2°) Modèle à un élément d'Estes et Suppes pour

$$A = E\{a, a'\}$$

On prend $Z = \{z, z'\}$.

Les règles s'expriment ici :

R₀) $P(Z_0 = z) = P_0$ $0 \leq P_0 \leq 1$ P_0 étant un paramètre.

R₁) $P(A_n = a / Z_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = P_1(Z_n, a)$

avec

$$P_1(z, a) = \beta$$

$$P_1(z', a') = \beta'$$

R₂) $P(Z_{n+1} = z / Z_n, A_n, E_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = (1 - C) 1_{\{z\}}(Z_n) + C 1_a(E_n)$

R₃) $P(E_n = a / Z_n, A_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = \pi$

En général on prend $\beta = 1$, $\beta' = 0$. Nous les garderons quelconques.

3-2-1 - Loi de l'ajustement du conditionnement.

$$P(Z_{n+1} = z) = \int_{\Omega} P(Z_{n+1} = z / Z_n, A_n, E_n) dP$$

$$= \int_{\Omega} \left[(1 - C) 1_{\{z\}} Z_n + C 1_{\{a\}} E_n \right] dP$$

$$P(Z_{n+1} = z) = \frac{(1 - C) P(Z_n = z) + C \Pi}{\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = z) = \Pi}$$

3-2-2 - Loi de l'ajustement de la réponse.

Etude de $P(A_{n+1} = a)$

$$P(A_{n+1} = a) = \int P(A_{n+1} = a / Z_{n+1}) dP = \beta [(1 - C) P(Z_n = z) + C \Pi]$$

$$+ \beta' [1 - (1 - C) P(Z_n = z) - C \Pi]$$

Or $P(A_n = a) = \beta P(Z_n = z) + \beta' [1 - P(Z_n = z)]$

donc $P(A_{n+1} = a) = (1 - C) P(A_n = a) + C \Pi (\beta - \beta') + \beta' C$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n = a) = \Pi (\beta - \beta') + \beta'$ et si $\beta = 1, \beta' = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n = a) = \Pi$

On retrouve la loi de l'ajustement. (On l'obtient exactement d'ailleurs sur Z_n et non sur A_n .)

3-2-3 - Probabilités séquentielles.

3-2-3-1 - Etude de $P(A_{n+1} = a / E_n = a)$

$$P(A_{n+1} = a, E_n = a) = \int_{\Omega} P(A_{n+1} = a, E_n = a / Z_{n+1}) dP$$

$$= \int_{\Omega} P(A_{n+1} = a / Z_{n+1}) \cdot P(E_n = a / A_{n+1}, Z_{n+1}) dP$$

$$= \Pi \left\{ \beta \left[(1 - C) P(Z_n = z) + C \right] + \beta' \left[- (1 - C) P(Z_n = z) - C + 1 \right] \right\}$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a) = (1 - C) P(A_n = a) + \beta C$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a') = (1 - C) P(A_n = a) + \beta' C$$

$$\S 2-3-2 - \text{Etude de } \underline{P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = a)}$$

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = a, E_n = a, A_n = a) &= \int P(A_{n+1} = a, E_n = a, A_n = a / Z_n) dP \\ &= \int P(A_n = a / Z_n) \cdot P(E_n = a / A_n = a, Z_n) \cdot P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = \\ &= a, Z_n) dP \end{aligned}$$

$$\text{Or } P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = a, Z_n = z) = \beta$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = a, Z_n = z') = C\beta + (1 - C)\beta'$$

Donc

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = a, E_n = a, A_n = a) &= \Pi \left\{ \beta^2 P(Z_n = z) + \beta' [C\beta + (1 - C)\beta'] [1 - P(Z_n = \right. \\ &= \Pi \left[P(A_n = a) (\beta + \beta' - C\beta') + \beta \beta' (1 - C) \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = a) = \frac{P(A_{n+1} = a, E_n = a, A_n = a)}{P(E_n = a, A_n = a)}$$

$$\begin{cases} P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = a) = \beta + \beta' - C\beta' - \frac{\beta \beta' (1 - C)}{P(A_n = a)} (= 1 \\ \text{si } \beta = 1, \beta' = 0) \\ P(A_{n+1} = a / E_n = a', A_n = a) = \beta + \beta' - C\beta - \frac{\beta \beta' (1 - C)}{P(A_n = a)} (= 1 - C \\ \text{si } \beta = 1, \beta' = 0) \end{cases}$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = a') = \beta + \beta' - \beta' C + C - 1 + \frac{(1 - C)\beta' - (\beta + \beta')}{1 - P(A_n = a)}$$

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a', A_n = a) = \beta + \beta' + \beta' C - (1 + C) + \frac{(1 - \beta)[1 + C - \beta'(1 - C)]}{1 - P(A_n = a)}$$

On peut remarquer que si dans ce modèle on fait $\beta = 1$, $\beta' = 0$ et $C = 0$, on obtient les mêmes résultats que dans le modèle linéaire pour les probabilités $P(A_n = a)$, $P(A_{n+1} = a / E_n = a)$, mais des résultats différents en ce qui concerne les probabilités du type.

$$P(A_{n+1} = a / E_n = a, A_n = a).$$

Ce résultat peut se généraliser. On obtiendra les résultats identiques pour les probabilités ne faisant intervenir que les renforcements antérieurs, mais des résultats différents pour les probabilités faisant intervenir des réponses antérieures.

Il est également remarquable que, lors de réalisations expérimentales des ces deux modèles (Suppes 1963), en ce qui concerne les probabilités faisant intervenir les réponses antérieures, les résultats expérimentaux s'écartent considérablement des prédictions du modèle à un élément, alors que le modèle linéaire constitue une approximation valable.

- BIBLIOGRAPHIE -

°° °°

o

[1] BUSH, R.R. et ESTES, W.K et al. : Studies in Mathematical learning theory (Stanford, Calif. Stanford Univ. Press 1959).

[2] BUSH, LUCE, GALANTER : Handhook of mathematical psychology (New-York, Wiley, 1963, 5 volumes).

[3] ESTES. W.K. et SUPPES P.

a) Foundations of linear models (Chapitre 8 in Bush, Estes, etal.

([1])

b) Foundations of statistical learning theory :

II. Stimulus sampling Models for simple learning, Technical Report, N° 4, 1959, Institute for Math. Studies in Soc Sciences, Stanford. Calif.

[4] LOEVE Probability Theory (2^{eme} ed. Van NOSTRAND 1960)

[5] LUCE D. Individual chance Behavior (ch. 4 ; New-York. Wiley 1959).

[6] ROUANET : Les modèle stochastiques de l'apprentissage (mathématiques et Sciences humaines (EPHE) Paris n° 5 et 6 1964).

[7] SUPPES ET ATKINSON. Markov learning Models for Multiperson Interaction (Stanford Calif. Stanford Univ. Press 1960)

- Nombreux articles dans la revue PSYCHOMETRIKA.

°° °° °° °° °°