

FAUCONNET

**Décomposition harmonique des fonctions aléatoires
stationnaires du second ordre**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Séminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 10, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A10_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DECOMPOSITION HARMONIQUE DES FONCTIONS ALEATOIRES

STATIONNAIRES DU SECOND ORDRE

I - Définitions et premières propriétés [1] chap X

- Une covariance qui ne dépend que de la différence de ses arguments est dite stationnaire :

$$\Gamma(t, t - \tau) = C(\tau)$$

$C(\tau)$ est appelée fonction de corrélation.

- Une fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire du 1^o ordre si $E(X(t)) = m$ où m est indépendant du temps.

- Une fonction aléatoire est stationnaire d'ordre 2, ou stationnaire au sens de Khintchine si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) Elle est stationnaire du 1^o ordre.
- (2) Elle est de covariance stationnaire.
- (3) $X(t)$ est continue en moyenne quadratique.

Remarques: la propriété (3) est équivalente à la suivante : la fonction $\Gamma(t, t')$ est continue en tout point de la diagonale Δ (d'équation $t' = t$).

Si on suppose que la covariance est stationnaire :

$$\Gamma(t, t') = C(t - t')$$

la continuité de Γ sur Δ est équivalente à la continuité de la fonction C en 0.

On peut donc remplacer les propriétés (2) et (3) par la suivante :

[la fonction aléatoire $X(t)$ est à fonction de corrélation continue en 0.

La continuité en 0 entraîne d'ailleurs la continuité sur $\mathbb{R}$ car la continuité de Γ sur Δ entraîne la continuité sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarques sur la fonction de corrélation :

$$C(u) = \Gamma(t + u, t)$$

Γ étant la covariance de $X(t)$ est une fonction de deux variables, de type non-négatif.

Rappelons ce que cela signifie.

Pour tout nombre entier n , pour toute suite $T_n \subset \mathbb{R}$ et pour toute fonction h définie sur T_n on a :

$$\sum_{u \in T_n} \sum_{v \in T_n} \Gamma(u, v) h(u) \bar{h}(v) \geq 0.$$

Donc pour la fonction de corrélation nous avons les inégalités suivantes :

$$\sum_{u \in T_n} \sum_{v \in T_n} C(u - v) h(u) \bar{h}(v) \geq 0.$$

Elles expriment que la fonction de corrélation est une fonction définie non-négative sur $\mathbb{R}$ (définition dans [3] P. 206)

Théorème de Bochner [3] chap. IV § 14.

[Une fonction g sur $\mathbb{R}$ est définie non-négative et continue si et seulement si c'est une fonction caractéristique, c'est-à-dire s'il existe une fonction G non décroissante continue à gauche et bornée telle que : $g(u) = \int e^{iux} dG(x)$

Donc si $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire du second ordre il existe une fonction de répartition $G(s)$ bornée telle que $\Gamma(t, t') = \int e^{i(t - t')s} dG(s)$.

On peut alors associer à $G(s)$ une fonction $g(s, s')$ à va-

riation bornée telle que $\Gamma(t, t') = \iint e^{i(ts - t's')} dd'g(s, s')$

Cette fonction g est particulière : c'est-à-dire une constante d'addition près la covariance d'une fonction aléatoire $x(s)$ orthogonale à ses accroissements. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

II - Fonctions aléatoires à accroissements orthogonaux [3]p. 479-481

Définition 1 : Une fonction aléatoire $x(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ est à accroissements orthogonaux si quels que soient les intervalles disjoints $[a, b)$ et $[a', b')$

$$E \ x \ [a, b) \ \bar{x} \ [a', b') = 0$$

On pose $x \ [a, b) = x(b) - x(a)$.

Propriété 1 :

$E |x \ [a, b)|^2$ est alors une fonction additive d'intervalles. On peut l'associer à une fonction $F(t)$ en posant, pour

$$a \text{ fixé : } F(t') = E |x \ [a, t')|^2 \quad \text{Si } t' > a$$

$$-F(t) = E |x \ [t, a)|^2 \quad \text{Si } t < a$$

En effet si $[a, b)$ et $[a', b')$ sont disjoints

$$E |x \ [a, b) \pm x \ [a', b')|^2 = E |x \ [a, b)|^2 + E |x \ [a', b')|^2$$

En particulier pour $a < b < c$

$$E |x \ [a, b)|^2 + E |x \ [b, c)|^2 = E |x \ [a, c)|^2.$$

Par suite pour $t' > t$ on a : $E |x \ [t, t')|^2 = F(t') - F(t)$

Propriété 2 :

Si la fonction aléatoire $x(t)$ à accroissements orthogonaux a ses moments du second ordre bornés on peut la prolonger à $\bar{\mathbb{R}}$ par

continuité : $x(+\infty) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \text{m. q.}}} x(t)$

On utilise le fait que la fonction $F(t)$, définie ci-dessus, non décroissante, est bornée.

Propriété 3.

Sous les mêmes hypothèses que pour la propriété 2 la fonction aléatoire $x(t)$ est décomposable en somme de 2 fonctions aléatoires à accroissements mutuellement orthogonaux :

$$x(t) = x_d(t) + x_c(t)$$

$x_d(t)$ est une somme de variables aléatoires orthogonales (convergente en m. q. quand elle est dénombrable)

$x_c(t)$ est continue en m. q.

$$t' > t : E|x_d[t, t']|^2 = F_d(t') - F_d(t) \quad E|x_c[t, t']|^2 = F_c(t') - F_c(t)$$

F_d et F_c sont les parties respectivement purement discontinues et continues de $F(t)$.

Définition 2

[Une fonction aléatoire définie sur $\mathbb{R}$, de covariance $g(t, t')$, est orthogonale à ses accroissements si :

pour $t < t'$ $E x(t)(\bar{x}(t') - \bar{x}(t)) = 0$.

ou $g(t, t') = g(t, t)$

Posons alors $g(t, t) = G(t)$. Il en résulte $G(t) \geq 0$ et par suite, pour $t \leq t'$: $g(t, t') = \overline{g(t', t)}$

$$\text{donc } g(t, t') = g(t, t) = g(t', t) = G(t)$$

$$\text{et } E|x[t, t']|^2 = G(t') - G(t)$$

La fonction $G(t)$ est positive non décroissante.

Il est immédiat que la définition 2 peut être remplacée par la suivante :

Définition 2'.

Une fonction aléatoire définie sur $\mathbb{R}$, de covariance $g(t, t')$, est orthogonale à ses accroissements, s'il existe une fonction $G(t)$ positive non décroissante telle que pour $t \leq t'$ $g(t, t') = G(t)$.

Propriété 4.

Une fonction aléatoire orthogonale à ses accroissements est à accroissements orthogonaux.

Soient $[a, b)$ et $[a', b')$ deux intervalles disjoints, par exemple $a < b \leq a' < b'$

$$\begin{aligned} E x [a, b) \bar{x} [a', b') &= E x(b) \bar{x} [a', b') - E x(a) \bar{x} [a', b') \\ &= 0 \end{aligned}$$

Propriété 5.

Une fonction aléatoire $x(t)$, à accroissements orthogonaux sur $\mathbb{R}$ et moments du second ordre bornés, peut être rendue orthogonale à ses accroissements par un changement d'origine de ses valeurs aléatoires.

D'après la propriété 2 on peut prolonger $x(t)$ à $\bar{\mathbb{R}}$. Posons

$$\xi(t) = x(t) - x(-\infty)$$

$$\begin{aligned} \text{pour } t \leq t' \quad E \xi(t) [\xi(t') - \xi(t)] &= E [x(t) - x(-\infty)] [\bar{x}(t') - \bar{x}(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

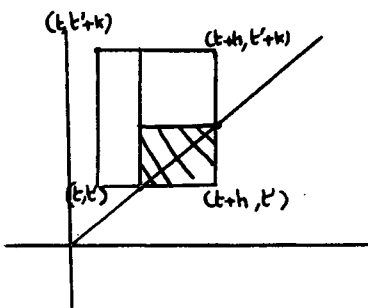
car les intervalles $[-\infty, t)$ et $[t, t')$ sont disjoints.

Propriété 6.

Soit $x(t)$ fonction aléatoire orthogonale à ses accroissements, $g(t, t')$ sa covariance et $G(t)$ la fonction positive non décroissante telle que $G(t) = g(t, t)$.

L'accroissement $\Delta_h \Delta'_k g(t, t')$ de la covariance, sur le rectangle $J = (t, t' ; t+h, t'+k)$, est égale à son accroissement sur le carré dont une diagonale est la partie de Δ ($t = t'$) qui appartient à J .
 En particulier : 1°) - $\Delta_h \Delta'_k g(t, t') = 0$ si $J \cap \Delta = \emptyset$
 2°) - sur le carré $(t, t ; t', t')$ l'accroissement est $G(t') - G(t)$

En effet : si $J \cap \Delta = \emptyset$ les intervalles $(t, t+h)$ et $t', t'+k$ sont disjoints



- Si $J \cap \Delta \neq \emptyset$ il n'y a qu'à décomposer J en la réunion de rectangles ne coupant pas Δ et d'un carré dont une diagonale appartient à Δ .

III - Décomposition harmonique [3] p. 482-484

Lemme 1.

Soit $x(s)$ une fonction aléatoire du second ordre orthogonale à ses accroissements et soit $G(s) = E |x(s)|^2$ (fonction supposée bornée).

La fonction aléatoire du second ordre $X(t)$ est telle que :

$$X(t) = \int e^{its} dx(s) \quad \text{i.m.q.}$$

si et seulement si sa covariance $r(t, t')$ est telle que

$$r(t, t') = \int e^{i(t - t')s} dG(s)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} - \text{ Si } X(t) = \int e^{its} dx(s), x(s) \text{ étant orthogonale à ses accroissements alors } E(X(t) \overline{X(t')}) &= E\left(\int e^{its} dx(s) \int e^{-it's'} dx(s')\right) \\ &= \iint e^{i(ts - t's')} dd' g(s, s') \end{aligned}$$

avec les notations utilisées jusqu'à présent, $g(s, s')$ étant la covariance de $x(s)$.

Cette intégrale double existe (critère d'intégration en moyenne quadratique).

Considérons seulement les subdivisions S réalisées au moyen de subdivisions égales sur les deux axes : S_s et $S_{s'}$, et cela pour tout carré J ayant une diagonale portée par $\Delta(J=(a,a;b,b))$

La limite des sommes de Riemann

relatives à ces subdivisions

(en prenant somme norme : $|S| = |S_s|$) existe et c'est l'intégrale double ci-dessus.

$$\text{Soit } S_s = (a=s_0 < s_1 < s_2 \dots < s_j < s_{j+1} \dots < s_n=b) \quad |S_s| = \sup_j |s_{j+1} - s_j|$$

$$\text{Donc } \Gamma(t, t') = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \lim_{|S_s| \rightarrow 0} \sum_j \sum_k e^{i(t\sigma_j - t'\sigma_k)} \Delta_{\delta_j} \Delta'_{\delta_k} g(s_j, s_k)$$

$$\text{on pose } \delta_j = s_{j+1} - s_j.$$

$$\text{Or si } j \neq k \quad \Delta_{\delta_j} \Delta'_{\delta_k} g(s_j, s_k) = 0$$

$$\text{et si } j = k \quad \Delta_{\delta_k} \Delta'_{\delta_k} g(s_k, s_k) = G(s_{k+1}) - G(s_k)$$

$$\text{Par suite } \Gamma(t, t') = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \lim_{|S_s| \rightarrow 0} \sum_k e^{i(t - t')\sigma_k} [G(s_{k+1}) - G(s_k)] .$$

Cette limite existe et c'est $\int e^{i(t-t')s} dG(s)$ car la fonction $e^{i(t-t')s}$ est une fonction continue et bornée de s , et $G(s)$ est une fonction monotone à variation bornée.

Supposons qu'il existe une fonction aléatoire $x(s)$ de covariance $g(s, s') = G(s)$ bornée, telle que $\Gamma(t, t') = \int e^{i(t-t')s} dG(s)$.

L'intégrale double $\iint e^{i(ts-t's')} dd' g(s, s')$ existe car $e^{i(ts-t's')}$ est une fonction continue et bornée de (s, s') et $g(s, s')$ est une fonction à variation bornée.

Le calcul précédent montre que $\Gamma(t, t') = \iint e^{i(ts-t's')} dd' g(ss')$
Donc $X(t) = \int e^{its} dx(s)$ d'après le théorème du paragraphe III
(décomposition harmonique des fonctions aléatoires).

Lemme 2.

Etant donnée une fonction positive non décroissante $G(s)$
il existe une covariance $g(s, s')$ telle que pour $s \leq s'$ $g(s, s') = G(s)$
En effet il suffit de démontrer la propriété caractéristique des covariances : pour tout entier n

pour toute suite T_n de n nombres réels et pour toute fonction h définie sur T_n

$$\sum_{u \in T_n} \sum_{v \in T_n} g(u, v) h(u) \bar{h}(v) \geq 0.$$

Dans le cas présent on démontre ceci par récurrence.

Pour $n = 2$: Soit $T_n = \{u, v\}$ avec $u < v$

$$\begin{aligned} & g(u, u) h(u) \bar{h}(u) + g(u, v) h(u) \bar{h}(v) + g(v, u) h(v) \bar{h}(u) + g(v, v) |h(v)|^2 \\ &= G(u) |h(u) + h(v)|^2 + [G(v) - G(u)] |h(v)|^2 \\ &\geq G(u) |h(u) + h(v)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si pour $n-1$ et $T_{n-1} = \{t_1, t_2 \dots t_{n-1}\}$ $t_i < t_{i+1}$

$$\sum_{u \in T_{n-1}} \sum_{v \in T_{n-1}} g(u, v) h(u) h(v) \geq G(t_1) \left| \sum_{u \in T_{n-1}} h(u) \right|^2$$

alors pour n et $T_n = \{t_0, t_1, t_2 \dots t_{n-1}\}$ $t_0 < t_1 \dots$

$$\sum_{u \in T_n} \sum_{v \in T_n} g(u, v) h(u) \bar{h}(v) \geq G(t_0) \left| \sum_{u \in T_n} h(u) \right|^2$$

Lemme 3.

Une covariance $\Gamma(t, t')$ est telle que
 $\Gamma(t, t') = \int e^{i(t - t')s} dG(s)$ où G est une fonction positive non
 décroissante à variation bornée si et seulement si elle ne dépend
 que de $t - t'$ et si elle est de plus continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cela résulte immédiatement du théorème de Bochner rap-
 pelé ci-dessus (paragraphe I)

Théorème de décomposition harmonique.

Une fonction aléatoire du second ordre sur $\mathbb{R}$, $X(t)$, a une
 décomposition harmonique orthogonale $X(t) = \int e^{its} dx(s)$
 où $E(x(s) x(s')) = g(s, s') = G(s)$ pour $s \leq s'$ avec $\text{var. } G < +\infty$
 Si et seulement si elle est continue en moyenne quadratique et
 stationnaire du second ordre.

La covariance se réduit alors à une fonction de corréla-
 tion $\Gamma(t + u, t) = C(u) = \int e^{ius} dG(s)$

Corollaire

Une fonction aléatoire $X(t)$ stationnaire du second ordre
 et continue en moyenne quadratique est décomposable en deux par-
 ties stationnaires du second ordre et mutuellement orthogonales

$$X(t) = X_d(t) + X_c(t)$$

$$\text{et } X_d(t) = \int e^{its} dx_d(s) \quad X_c(t) = \int e^{its} dx_c(s).$$

(La première intégrale se réduit d'ailleurs à une somme convergent en moyenne quadratique).

Ceci résulte de la propriété 3 paragraphe II.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Blanc-Lapierre et Fortet : Théorie des fonctions aléatoires
Masson édition 1953.

- [2] Hildebrandt : Introduction to the Theory of
Integration.
Academic Press 1963.

- [3] Loève : Probability Theory ; 3^e édition.
D. Van Nostrand Company-Line