SUR LES ÉQUATIONS D'HALPHEN ET LES ACTIONS DE $SL_2(\mathbf{C})$

par Adolfo GUILLOT*

RÉSUMÉ

On étudie les aspects locaux et globaux des actions holomorphes de $SL_2(\mathbf{C})$ sur les variétés complexes de dimension trois, à partir de l'étude des algèbres de Lie de champs de vecteurs qui engendrent une action uniforme. On décrit géométriquement et dynamiquement une famille de telles algèbres étudiée par Halphen vers la fin du XIXème siècle. On donne des formes normales pour les actions de $SL_2(\mathbf{C})$ au voisinage des orbites unidimensionnelles. On étudie ensuite les compactifications équivariantes des espaces homogènes de $SL_2(\mathbf{C})$. On prouve que si $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{C})$ est un sous-groupe discret non-élémentaire alors $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ admet une compactification équivariante (comme variété complexe) si et seulement si Γ est géométriquement fini et n'a pas d'éléments paraboliques. On démontre que toutes les compactifications équivariantes sont biméromorphiquement équivalentes. De plus, si Γ n'a pas de torsion, $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ admet une compactification minimale, obtenue comme quotient d'un ouvert de l'unique compactification biéquivariante de $SL_2(\mathbf{C})$.

1. Introduction

Le XIXème siècle a vu naître et se développer une multitude de théories concernant l'étude des équations différentielles dans le domaine complexe. D'une part, on a la théorie des formes normales de champs de vecteurs holomorphes au voisinage d'un point singulier. Elle s'est enrichie d'une multitude de travaux, dont ceux de Briot-Bouquet et de Poincaré, et a connu des développements qui continuent jusqu'à nos jours. De façon parallèle et motivé par les symétries des équations différentielles, Lie développe la théorie de groupes infinitésimaux de transformation et ses recherches fondent la théorie des groupes de Lie. Il est le premier à donner des formes normales pour des algèbres de Lie de champs de vecteurs. Ce domaine de recherche connaît aussi une activité constante.

Une deuxième branche de l'étude des équations différentielles, plus proche de la théorie des fonctions spéciales, doit son essor à Painlevé. Il a entrepris le vaste projet de classifier les équations différentielles rationnelles complexes dont les solutions étaient des fonctions uniformes du temps complexe. Il estimait qu'elles se présentaient sous une forme déjà intégrée et, par ce procédé, il espérait trouver des « transcendantes nouvelles ».

Ce n'est que récemment que l'esprit de Painlevé a retrouvé une place au sein de la théorie locale des champs de vecteurs holomorphes, notamment à travers les travaux de Rebelo [41–43] et de Ghys-Rebelo [15], qui étudient les germes de champs de vecteurs dont les solutions sont uniformes. Les singularités des champs

* avec l'appui du projet CONACYT G 36357-E

DOI 10.1007/s10240-007-0008-6

de vecteurs holomorphes complets ne peuvent pas – à la différence des champs de vecteurs réels – être arbitraires. Un germe de champ de vecteurs dont les solutions sont multiformes ne peut pas se prolonger en un champ de vecteurs complet.

Ces questions ont, bien sûr, des analogues dans le domaine des algèbres de Lie de champs de vecteurs. Cet article veut se trouver au carrefour des théories de Lie et de Painlevé et aborder la question suivante : étant donnée, sur une variété de dimension n, une algèbre de germes de champs de vecteurs holomorphes isomorphe à l'algèbre d'un groupe de Lie complexe G, les « solutions » ce cette algèbre, localement paramétrées par un « temps » dans G, sont-elles des fonctions uniformes ? C'est parmi les algèbres de Lie qui offrent une réponse affirmative à cette question que l'on trouvera les modèles locaux des actions holomorphes de G sur les variétés de dimension n.

L'étude de tels germes est au cœur de cet article. On s'est proposé de la mener dans le cadre des actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur les variétés de dimension trois. Cette étude locale permet de mieux comprendre les aspects globaux de ces actions, dont on s'occupera aussi dans ces pages.

Les exemples plus anciens de la théorie qui nous concerne sont les algèbres de Lie de champs de vecteurs polynomiaux introduites et étudiées par Georges-Henri Halphen vers la fin du XIXème siècle. Dans une série de Notes à l'Académie des Sciences [20, 18] il étudie la famille de champs de vecteurs

$$\begin{aligned}(\mathbf{1})\qquad \mathrm{H}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = {} & \left[\alpha_1 z_1^2 + (1-\alpha_1)(z_1z_2 + z_1z_3 - z_2z_3)\right]\frac{\partial}{\partial z_1} \\ & + \left[\alpha_2 z_2^2 + (1-\alpha_2)(z_1z_2 - z_1z_3 + z_2z_3)\right]\frac{\partial}{\partial z_2} \\ & + \left[\alpha_3 z_3^2 + (1-\alpha_3)(-z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)\right]\frac{\partial}{\partial z_3},\end{aligned}$$

dépendante des paramètres $\alpha_i \in \mathbf{C}$, où Halphen affirme trouver « le moyen de généraliser l'équation de Gauss sous la forme la plus commode ». Un champ de cette famille engendre, avec les champs $\sum_i \partial/\partial z_i$ et $\sum_i z_i\partial/\partial z_i$, une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Dans les mots d'Halphen, cette famille « jouit d'une singulière propriété d'invariance » : si $\phi_i(t)$ $(i = 1, ..., 3)$ sont les coordonnées d'une solution de $\mathrm{H}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ alors les fonctions $\widetilde{\phi}_i$ définies par

$$(\mathbf{2})\qquad \widetilde{\phi}_i(t) = \frac{1}{(ct+d)^2}\phi_i\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{c}{ct+d}$$

donnent encore les coordonnées d'une solution du même champ (dans le domaine où l'expression a un sens). Halphen conclut qu'il suffit de connaître une solution et de la propager à l'aide de cette formule pour obtenir la solution générale. Il donne ensuite une solution particulière à partir de certaines fonctions qu'il étudie dans [19]. Le cas particulier $H(0, 0, 0)$ a une histoire propre. Il fait une première apparition dans les travaux de Darboux sur les systèmes triples orthogonaux [10, Livre I, Chapitre V]. L'équation différentielle associée, qui s'exprime simplement par

$$\frac{d}{dt}(\phi_i + \phi_j) = 2\phi_i\phi_j,$$

a été simultanément résolue par Brioschi [5] et par Halphen. Elle a pour solutions les dérivées logarithmiques des fonctions thêta. Ce système d'équations différentielles est connu sous le nom d'*équation d'Halphen*, *système de Darboux-Halphen* ou encore *système de Darboux-Brioschi-Halphen*. Il s'agit d'un système qui semble apparaître « souvent » lorsqu'une équation aux dérivées partielles dégénère pour devenir une équation différentielle ordinaire. C'est le cas pour l'équation de Darboux ainsi que pour certaines équations de la physique mathématique, telles l'équation de Yang-Mills [1] et celle du monopole magnétique [2]. Si ces équations ont été bien étudiées du point de vue de l'analyse et de l'arithmétique [39], leur étude géométrique et dynamique ne semble quasiment pas avoir été abordée (malgré l'absence d'intégrale première méromorphe de $H(0, 0, 0)$ prouvée dans [33]). Le cadre présent nous semble propice pour décrire la belle géométrie qui accompagne ces équations et qui est souvent cachée par les non moins belles identités de la théorie des formes automorphes.

Halphen a prouvé que les champs (1) ont des solutions uniformes si les quantités $m_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2)/\alpha_i$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 2. On prouve que dans les cas « hyperboliques », cette uniformité coexiste avec une grande richesse dynamique :

Théorème **A.** — *Si* $\sum 1/m_i < 1$ *alors le champ* (1) *n'a pas d'intégrale première méromorphe, mais admet une intégrale première réelle continue qui est analytique en restriction à un ouvert dense. Il existe un ouvert dans* $\mathbf{C}^3$ *qui est saturé par le champ et dont l'espace des orbites est biholomorphe à* $\mathbf{C}^2$.

On étudie les aspects globaux de ces actions. On montre que les actions induites par les algèbres d'Halphen peuvent se globaliser :

Théorème **B.** — *Soit* $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *un champ n'ayant que des solutions uniformes. Alors il existe une variété complexe de dimension trois* M *munie d'une action holomorphe à droite de* $PSL_2(\mathbf{C})$ *et d'un plongement* $\imath : \mathbf{C}^3 \to M$ *tel que la restriction de l'algèbre de Lie de champs de vecteurs (associée à l'action) à l'image de* $\mathbf{C}^3$ *est engendrée par les champs* $\sum_i \partial/\partial z_i$, $\sum_i z_i\partial/\partial z_i$ *et* $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

On étudie ensuite les actions locales maximales holomorphes de $SL_2(\mathbf{C})$ au voisinage d'une orbite unidimensionnelle qui se trouve dans l'adhérence d'une orbite ouverte, dans le but de comprendre les algèbres de germes de champs de vecteurs qui modèlent les actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. De façon analogue au théorème de Seidenberg concernant les champs de vecteurs dans les surfaces complexes, on aura des orbites unidimensionnelles *réduites* et *non-réduites*. Un germe d'orbite unidimensionnelle non-réduite peut être éclaté un nombre fini de fois pour que, sur le transformé de la courbe originale, on ne rencontre que des orbites unidimensionnelles réduites.

Théorème **C.** — *Soit* M *une variété complexe de dimension* 3 *munie d'une action locale maximale holomorphe à droite de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. *Soit* $p \in \mathrm{M}$ *un point dans l'adhérence des points où l'action est localement libre et qui appartient à une orbite unidimensionnelle réduite. Alors, dans des coordonnées convenables autour de* p, *l'action est engendrée par l'une des algèbres suivantes :*

$$\mathsf{A}_1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{2}z_2\frac{\partial}{\partial z_2}, z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_2^2\frac{\partial}{\partial z_3} \right\rangle,$$
$$\mathsf{A}_2 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}, z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_2\frac{\partial}{\partial z_3} \right\rangle,$$
$$\mathsf{B} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{2}z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{1}{2}z_3\frac{\partial}{\partial z_3}, z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_1z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + (z_2 - z_1z_3)\frac{\partial}{\partial z_3} \right\rangle,$$

ou bien par l'algèbre $\mathsf{Z}(\lambda_2, \lambda_3, q_2, q_3, m)$ *engendrée par les champs* $\partial/\partial z_1$, $z_1\partial/\partial z_1 + \lambda_2 z_2\partial/\partial z_2 + \lambda_3 z_3\partial/\partial z_3$ *et le champ*

$$\left(z_1^2 + \frac{1}{m^2}z_2^{2q_2}z_3^{2q_3}\right)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\left(2\lambda_2 z_1 - q_3 z_2^{q_2}z_3^{q_3}\right)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\left(2\lambda_3 z_1 + q_2 z_2^{q_2}z_3^{q_3}\right)\frac{\partial}{\partial z_3}, \tag{3}$$

où $(\lambda_2, \lambda_3, q_2, q_3, m) \in (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z}^2 \times (\mathbf{Z}^* \cup \{\infty\})$ *avec les conditions* $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 \leq 0$, $q_2 > 0$, $q_3 \geq 0$, $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$ *et si* $m \neq \infty$,

– *si* m *est pair alors* $\{\lambda_2, \lambda_3\} \subset \mathbf{Z}$ *et*
– *si* m *est impair alors* $\{\lambda_2, \lambda_3\} \not\subset \mathbf{Z}$, $2\lambda_3 \equiv q_2 \mod 2$ *et* $2\lambda_2 \equiv q_3 \mod 2$.

À l'aide de ces résultats locaux et de la connaissance des actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur les courbes et les surfaces, on aborde l'étude des actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur les variétés complexes compactes de dimension 3 qui ont une orbite ouverte. On prouvera les résultats suivants :

Théorème **D.** — *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ *un sous-groupe discret. Soit* $\Omega \subset \mathbf{CP}^1$ *le domaine de discontinuité de l'action à gauche de* Γ *sur* $\mathbf{CP}^1$. *Il existe une compactification équivariante* *de* $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ *si et seulement si le nombre de composantes connexes compactes de* $\Gamma\backslash\Omega$ *et le nombre de bouts de* $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ *sont égaux (si* Γ *est géométriquement fini et n'a pas d'éléments paraboliques).*

Théorème **E.** — *Soit* $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{C})$ *un sous-groupe discret et non-élémentaire. Toute compactification équivariante de* $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ *est une variété (non-kaehlerienne) de dimension algébrique nulle et toutes les compactifications équivariantes sont biméromorphiquement isomorphes. En plus, si* Γ *n'a pas de torsion (en dehors du centre) alors il existe une unique compactification équivariante* Z_Γ *telle que pour toute autre compactification équivariante* M *il existe une fonction* $f : M \to Z_\Gamma$ *équivariante surjective.*

C'est avec un grand plaisir que l'auteur remercie Étienne Ghys pour sa générosité et son encouragement constant. On exprime ici notre gratitude à B. Deroin, J. V. Pereira, B. Sévennec et A. Verjovsky pour des conversations qui ont aidé l'auteur à mener à bien cette recherche. On est également reconnaissant à l'IMPA, à Rio de Janiero, où cet article a trouvé sa forme finale et où on a eu l'opportunité d'exposer nos résultats en juin 2005.

Cet article est dédié à Georges-Henri Halphen.

2. Préliminaires

Dans ce qui suit, G est un groupe de Lie complexe de dimension d avec l'élément neutre e et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie complexe de ses champs de vecteurs holomorphes invariants à gauche. On notera $\mathfrak{X}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes de la variété complexe M (toutes les variétés que l'on considère sont Hausdorff sauf mention contraire). La notion que l'on utilisera tout au long de ce travail, celle d'*action holomorphe locale maximale* d'un groupe de Lie complexe, est due à Palais [40]. Elle a été réintroduite, pour le groupe $\mathbf{C}$, sous le nom de *flot semi-global*, par Rebelo [41].

Définition **1.** — *Une* action holomorphe locale à droite *de* G *sur la variété complexe* M *est une application holomorphe* $\Phi : \mathscr{U} \to M$ *définie dans un ouvert* $\mathscr{U} \subset M \times G$, *voisinage de* $M \times \{e\}$, *qui satisfait les conditions :*

1. $\Phi(p, e) = p$ *pour tout* $p \in M$ *et*
2. $\Phi(\Phi(p, g_1), g_2) = \Phi(p, g_1 g_2)$ *si les deux membres de cette équation sont définis.*

L'action Φ *est dite* maximale *si*

3. pour tout $p \in M$ *et toute suite* $\{q_i\} \subset G$ *contenue dans l'ouvert* $\mathscr{U}_p = \{g \in G; (p, g) \in \mathscr{U}\}$ *telle que* $\lim_{i\to\infty} q_i$ *existe mais n'est pas dans* $\mathscr{U}_p$, *la suite* $\Phi(p, q_i)$ *quitte tout compact de* M.

On retrouve la définition d'action holomorphe à droite d'un groupe G sur une variété M quand $\mathscr{U} = \mathrm{M} \times \mathrm{G}$. Cette action est maximale, car, dans ce cas, $\mathscr{U}_p = \mathrm{G}$. Pour une action locale Φ et une sous-variété ouverte $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$, la restriction $\Phi|_{\mathrm{N}} : \Phi^{-1}(\mathrm{N}) \to \mathrm{N}$ est encore une action locale. Cette restriction sera maximale s'il en est de même pour l'action originale.

Une action holomorphe locale Φ de G sur M induit un morphisme d'algèbres de Lie $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ donné, au point $p \in \mathrm{M}$, par la dérivée de $\Phi(p, \cdot) : \mathrm{G} \to \mathrm{M}$ au point $e \in \mathrm{G}$. Dans le sens inverse, on a le

Théorème **1** *(Deuxième théorème de Lie). — Soit* $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ *un morphisme injectif d'algèbres de Lie et soit* $p \in \mathrm{M}$. *Alors il existe* $\mathrm{U} \subset \mathrm{G}$, *voisinage de l'identité et une fonction* $\Phi : (\mathrm{U}, e) \to (\mathrm{M}, p)$ *telle que* $\Phi_* = \Psi|_{\Phi(\mathrm{U})}$. *Le germe de* Φ *au voisinage de l'identité est unique.*

On dira que Φ est une *solution de* Ψ *avec condition initiale* p. Un résultat de Palais [40, Chapter II, Theorem XI], prouve que l'on peut recoller des solutions pour obtenir une action locale de G sur M. Néanmoins, l'existence d'une action locale maximale n'est nullement garantie. Ceci motive la définition suivante :

Définition **2** *(Palais). — Soit* G *un groupe de Lie connexe. Soit* $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ *un morphisme d'algèbres de Lie. On dira que l'algèbre de Lie de champs de vecteurs* $\Psi(\mathfrak{g})$ *sur* M *est* uniforme *s'il existe une action locale maximale (à droite)* Φ *de* G *sur* M *telle que* $\Phi_* = \Psi$.

L'uniformité d'une algèbre de Lie de champs de vecteurs dépend de l'isomorphisme qui l'identifie à $\mathfrak{g}$ (cette remarque n'est de mise que dans la mesure où le groupe admet des automorphismes holomorphes extérieurs). Par exemple, le champ de vecteurs $z\partial/\partial z$, dont les solutions sont uniformes, est uniforme par rapport à $(\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}, \partial/\partial z)$ mais ne l'est pas par rapport à $(\mathbf{C}/i\pi\mathbf{Z}, \partial/\partial z)$. On dira, suivant Rebelo, qu'un champ de vecteurs uniforme est *semi-complet*. Signalons que l'uniformité est une notion qui est globale sur le groupe mais locale dans l'espace, au sens où la restriction d'une algèbre uniforme à un ouvert l'est encore. Ceci nous permet de parler de d'algèbres de Lie de germes de champs de vecteurs uniformes.

Le Théorème de Lie nous permet de séparer M en orbites, les classes de la relation d'équivalence engendrée par la relation

$$p \sim q \text{ s'il existe une solution } \Phi : \mathrm{U} \to \mathrm{M} \text{ telle que } \{p, q\} \subset \Phi(\mathrm{U}).$$

On note $\mathscr{O}_p \subset \mathrm{M}$ l'orbite de Ψ qui contient p, on munit $\mathscr{O}_p$ de la structure de variété donnée par les solutions de Ψ (elle n'est pas nécessairement un sous-espace topologique de M). Étant donnés une représentation injective $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ et un point $p \in M$, le noyau du morphisme linéaire $\Psi|_p : \mathfrak{g} \to T_pM$ donne une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_p \subset \mathfrak{g}$ (le crochet de deux champs de vecteurs qui s'annulent sur p s'annule sur p). Notons H_p le sous-groupe de G correspondant et supposons-le fermé. Soit N_p le normalisateur de H_p dans G. L'orbite $\mathscr{O}_p$ est localement modelée sur la variété $H_p\backslash G$ avec des changements de coordonnées donnés par l'action à gauche de N_p/H_p induite par l'action de N_p.

Si $\mathscr{G}$ est un groupe qui agit analytiquement (mais pas nécessairement transitivement) sur la variété $\mathscr{X}$ alors une $(\mathscr{G}, \mathscr{X})$-structure sur la variété M est un atlas pour M à valeurs dans $\mathscr{X}$ avec des changements de coordonnées dans $\mathscr{G}$ [45]. L'orbite $\mathscr{O}_p$ est donc naturellement munie d'une $(N_p/H_p, H_p\backslash G)$-structure. Convenons d'appeler une $(\mathscr{G}, \mathscr{X})$-structure sur une variété M *uniformisable* si M est isomorphe, en tant que $(\mathscr{G}, \mathscr{X})$-variété, au quotient d'un ouvert de $\mathscr{X}$ sous l'action d'un sous-groupe de $\mathscr{G}$ préservant l'ouvert. Les $(\mathscr{G}, \mathscr{X})$-structures *complètes* (celles obtenues commes quotient de $\mathscr{X}$ sous l'action d'un sous-groupe de $\mathscr{G}$) sont uniformisables et la restriction d'une $(\mathscr{G}, \mathscr{X})$-structure uniformisable à un ouvert l'est encore. Pour une variété M munie d'une $(\mathscr{G}, \mathscr{X})$-structure et un point $p \in M$ on a une application développante $\mathscr{D} : \widetilde{M} \to \mathscr{X}$ et un morphisme de monodromie $\mu : \pi_1(M) \to \mathscr{G}$ qui satisfont la relation $\mathscr{D}(\alpha \cdot q) = \mu(\alpha) \cdot \mathscr{D}(q)$ pour tout $\alpha \in \pi_1(M, p)$ et $q \in M$. L'uniformisabilité d'une structure s'exprime simplement en termes de l'application développante : une structure est uniformisable si et seulement si $\mathscr{D}(p_1) = \mathscr{D}(p_2)$ implique l'existence d'un $\alpha \in \ker(\pi_1(M))$ tel que $\alpha \cdot p_1 = p_2$ (si elle est injective au noyau de μ près).

Définition **3.** — *Soit* $\Psi(\mathfrak{g})$ *une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur* M *et soit* $\mathscr{O}_p$ *une orbite de* Ψ. *On dit que* la solution maximale de Ψ avec condition initiale p est uniforme *si la* $(N_p/H_p, H_p\backslash G)$*-structure de* $\mathscr{O}_p$ *est uniformisable.*

Réciproquement, une variété M munie d'une $(N_p/H_p, H_p\backslash G)$-structure est naturellement munie d'une algèbre de Lie de champs de vecteurs isomorphe à $\mathfrak{g}$, celle induite par les champs invariants à gauche de G. Si la structure est uniformisable, si $M = \Gamma\backslash X_0$ pour $X_0 \subset H_p\backslash G$ et $\Gamma \subset N_p/H_p$, la solution de l'équation différentielle associée avec condition initiale $[H_p]$ est donnée par le quotient à gauche par Γ de la restriction du fibré

$$H_p \to G \xrightarrow{\Pi} H_p\backslash G$$

à X_0. Ainsi, sur l'ouvert $\mathscr{U}_p = \Pi^{-1}(X_0)$, qui est N_p/H_p-invariant à gauche, on a une application $\phi_p : \mathscr{U}_p \to M$ (dont les fibres sont des classes à gauche de H_p) qui uniformise la structure. La proposition suivante montre l'équivalence de ces deux notions.

Proposition **1.** — *Soit* $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ *un morphisme injectif d'algèbres de Lie. Sont équivalents :*

1. *Pour tout* $p \in \mathrm{M}$, *le groupe* H_p *est fermé dans* G *et la solution maximale de* $\Psi(\mathfrak{g})$ *avec condition initiale* p *est uniforme.*
2. *L'algèbre de Lie de champs de vecteurs* $\Psi(\mathfrak{g})$ *est uniforme.*

Preuve. — Prouvons d'abord $1 \Rightarrow 2$. Pour $p \in \mathrm{M}$, soit $\phi_p : \mathscr{U}_p \to \mathrm{M}$ la solution de $\Psi(\mathfrak{g})$ l'ayant comme condition initiale. Considérons, dans l'ensemble

$$\mathscr{U} = \bigcup_{p \in \mathrm{M}} (\{p\} \times \mathscr{U}_p) \subset \mathrm{M} \times \mathrm{G},$$

la fonction $\Phi : \mathscr{U} \to \mathrm{M}$ donnée par $\Phi(p, g) = \phi_p(g)$. Cette fonction satisfait les conditions (1) et (2) dans la définition de l'action locale. Soit $p_0 \in \mathrm{M}$ et soit $\{g_i\} \subset \mathscr{U}_{p_0}$ une suite qui converge vers un point $g_\infty \subset \mathrm{G}$, pas nécessairement dans $\mathscr{U}_{p_0}$, telle que $(p_0, g_i) \in \mathrm{Int}(\mathscr{U})$ et telle que $\lim_{i\to\infty} \phi_{p_0}(g_i) = q \in \mathrm{M}$. On affirme que $(p_0, g_\infty) \in \mathrm{Int}(\mathscr{U})$. Considérons un voisinage $\mathrm{D}_0 \times \mathrm{G}_0$ de (q, e) où l'on a une action locale Φ_0. Soit $\mathrm{G}_1 \subset \mathrm{G}_0$ un voisinage de l'identité tel que $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_1 \subset \mathrm{G}_0$ et posons

$$\widetilde{\Phi}(p, g_\infty h_1; h_2) = \Phi_0\big(\Phi\big(p, g_\infty h_2^{-1}\big), h_2 h_1\big),$$

où h_2 est un élément de G_1 tel que $g_\infty h_2^{-1} \in \mathrm{Int}(\mathscr{U})$. Elle est définie pour $h_1 \in \mathrm{G}_1$ et p dans un voisinage N de p_0 tel que $\mathrm{N} \times \{g_\infty h_2^{-1}\} \subset \mathrm{Int}(\mathscr{U})$. Cette fonction coïncide avec Φ dans l'intersection de leurs domaines de définition et, ensemble, elles prolongent l'action locale, ce qui montre que $(p_0, g_\infty) \in \mathrm{Int}(\mathscr{U})$. Prouvons, à partir de cette affirmation, que $\mathscr{U}$ est ouvert. L'ouvert de $\mathscr{U}_p$ donné par l'ensemble de points g tels que (p, g) est à l'intérieur de $\mathscr{U}$ est non-vide (car on a toujours des actions locales) et, en vertu de l'affirmation, un fermé de $\mathscr{U}_p$. Ceci montre que $\mathscr{U}$ est ouvert. La même affirmation montre que si une suite de points $(p, g_i) \in \mathscr{U}$ est telle que $\Phi(p, g_i)$ s'accumule sur un point de M, alors les points d'accumulation de (p, g_i) sont à l'intérieur de $\mathscr{U}_p$. Ceci prouve que l'action est maximale. Prouvons maintenant $2 \Rightarrow 1$. Si l'algèbre de Lie $\Psi(\mathfrak{g})$ est uniforme, alors il existe une action locale maximale $\Phi : \mathscr{V} \to \mathrm{M}$. Dans ce cas, pour tout $p \in \mathrm{M}$, $\Phi(p, \cdot) : \mathscr{V}_p \to \mathscr{O}_p$ est une solution de la $\Psi(\mathfrak{g})$ avec condition initiale p. Cette solution uniformise la structure géométrique et, puisque l'action est maximale, la solution de $\Psi(\mathfrak{g})$ est uniforme dans son domaine maximal de définition. □

Remarque **1.** — On peut copier mot à mot les arguments de cette preuve pour garantir qu'une variante plus forte de la maximalité a lieu : pour toute suite (p_i, g_i) dans $\mathscr{U}$ qui converge vers un point (p, g) qui est aussi limite d'une suite (p, g_i), la suite de points $\Phi(p_i, g_i)$ quitte tout compact de M. En particulier, si pour tout p on a

$$\{p\} \times \overline{\mathscr{U}_p} = \overline{\mathscr{U}} \cap (\{p\} \times \mathrm{G}),$$

c'est-à-dire, si tout point du bord de $\mathcal{U}$ est dans l'adhérence d'un certain $\{p\} \times \mathcal{U}_p$, alors, pour toute suite $\{(p_i, q_i)\} \subset \mathcal{U}$ qui converge vers un point de $\partial\mathcal{U}$, la suite $\Phi(p_i, q_i)$ quitte tout compact de M.

3. Les champs d'Halphen

Le groupe $PSL_2(\mathbf{C})$ est le quotient de $SL_2(\mathbf{C})$ par son centre $\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. La classe de $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{C})$ dans $PSL_2(\mathbf{C})$ sera notée $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Le groupe $PSL_2(\mathbf{C})$ est le groupe de biholomorphismes de $\mathbf{CP}^1$; il y agit holomorphiquement à gauche par

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4}$$

dans la coordonnée affine $[z:1]$ de $\mathbf{CP}^1$. Le stabilisateur du point $z=0$ est le groupe $\mathrm{Aff}_0(\mathbf{C})$, le sous-groupe fermé de $PSL_2(\mathbf{C})$ donné par les éléments de la forme $\begin{bmatrix}a & 0\\ c & a^{-1}\end{bmatrix}$. Celui de $z=\infty$, le groupe $\mathrm{Aff}_\infty(\mathbf{C})$, est donné par les éléments de la forme $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}$. On notera $\rho_0 : PSL_2(\mathbf{C}) \to \mathbf{CP}^1$ et $\rho_\infty : PSL_2(\mathbf{C}) \to \mathbf{CP}^1$ les quotients par les classes à droite de $\mathrm{Aff}_0(\mathbf{C})$ et $\mathrm{Aff}_\infty(\mathbf{C})$:

$$\rho_0\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right) = [b:d], \qquad \rho_\infty\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right) = [a:c].$$

On prendra la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ donnée par les éléments

$$g = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ h^+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ h^- = \begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \tag{5}$$

qui donnent, à travers l'action par homographies (4), les champs de vecteurs $z\partial/\partial z$, $\partial/\partial z$ et $z^2\partial/\partial z$ de $\mathbf{CP}^1$ (respectivement). Ces éléments de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ (champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbf{CP}^1$) satisfont les relations de commutation

$$[g, h^+] = h^+,\ [g, h^-] = -h^-,\ [h^-, h^+] = 2g.$$

Les sous-groupes à un paramètre respectifs dans $SL_2(\mathbf{C})$ sont

$$\Phi_g(t) = \begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix},\ \Phi_{h^+}(t) = \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \Phi_{h^-}(t) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -t & 1\end{pmatrix}.$$

On appellera ces flots, respectivement, le *flot géodésique*, le *flot horocyclique positif* et le *flot horocyclique négatif*, par analogie avec les flots correspondants dans le fibré tangent unitaire du plan hyperbolique (et ses quotients). Détaillons ceci. Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ est le groupe d'isométries directes du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2 = \{x + iy \in \mathbf{C}; y > 0\}$, qui est un espace homogène et isotrope pour cette action, donnée par la restriction de (4). Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ agit donc transitivement sur $\mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ et le stabilisateur de tout point sous cette action est trivial : le fibré $\mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ s'identifie de façon équivariante à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ par isométries pour le premier, par multiplication à gauche pour le deuxième. L'identification est unique, au choix d'un point de $\mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ près. Celle donnée par le point $\left(i, \partial/\partial y|_i\right) \in \mathrm{T}^1\mathbf{H}^2$ identifie les flots géodésique, horocyclique positif et horocyclique négatif de la métrique hyperbolique de $\mathbf{H}^2$ avec les flots des champs invariants à gauche engendrés respectivement par les éléments g, h^+ et h^- de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ donnés par (5). On notera $\sigma : \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ l'involution qui consiste à multiplier à droite par $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\sigma}{\longmapsto} \begin{bmatrix} -b & a \\ -d & c \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Elle permute les champs invariants à gauche h^+ et h^- et change le signe de g. Elle permute les fonctions ρ_0 et ρ_∞.

Les champs d'Halphen fournissent les exemples les plus simples des champs de vecteurs qui forment des algèbres de Lie polynomiales de champs de vecteurs.

Définition **4.** — *Soit* $\mathrm{E} = \sum z_i\partial/\partial z_i$ *le champ d'Euler et posons* $\mathrm{Y} = \sum_i \partial/\partial z_i$. *Un champ de vecteurs* H, *polynomial et homogène de degré* 2, *sur* $\mathbf{C}^3$ *est un* champ d'Halphen *si l'on a la relation* $[\mathrm{Y}, \mathrm{H}] = 2\mathrm{E}$.

Rappelons que pour un champ de vecteurs homogène Y de degré d, la relation d'Euler s'exprime par $[\mathrm{E}, \mathrm{Y}] = (d - 1)\mathrm{Y}$. Si X est un champ d'Halphen, on a, en vertu de cette relation, $[\mathrm{E}, \mathrm{Y}] = -\mathrm{Y}$, $[\mathrm{E}, \mathrm{H}] = \mathrm{H}$ et $[\mathrm{Y}, \mathrm{H}] = 2\mathrm{E}$. On a donc une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux de $\mathbf{C}^3$. Le champ d'Halphen le plus simple est le champ $\sum_i z_i^2\partial/\partial z_i$. Les champs d'Halphen forment un espace affine au-dessus de l'espace vectoriel des champs quadratiques homogènes qui commutent avec Y, car si H_0 est un champ quadratique homogène dans le noyau de la transformation linéaire $[\mathrm{Y}, \cdot]$, alors $\mathrm{H}_0 + \sum_i z_i^2\partial/\partial z_i$ est un champ d'Halphen (et vice versa).

Dans l'ouvert où ces trois champs de vecteurs sont linéairement indépendants, l'algèbre est localement modelée sur celle des champs de vecteurs invariants à gauche de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Cette affirmation se globalise de la façon suivante :

Proposition **2.** — *Soit* H *un champ de vecteurs dans* $\mathbf{C}^3$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le champ est un champ d'Halphen.*
2. *Si les fonctions* $\phi_i : \mathrm{U} \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, 3$, *sont les coordonnées d'une solution locale de* H *et* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$, *alors les fonctions* $\widetilde{\phi}_i : \widetilde{\mathrm{U}} \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}^3$ *données par la formule* (2) *donnent encore les coordonnées d'une solution locale de* H, *définie dans un domaine* $\widetilde{\mathrm{U}} \subset \mathbf{C}$ *où cette expression a un sens (propriété d'invariance).*

Preuve. — Soit H un champ d'Halphen. Notons Ξ l'ouvert où H, E et Y sont linéairement indépendants et supposons-le non-vide. Soit $p \in \Xi$ et soit $\phi(t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ la solution de H avec $\phi(0) = p$. Considérons l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{at+b}{ct+d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{ct+d} & 0 \\ 0 & ct+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{ct+d} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

On l'interprète de la façon suivante : pour construire l'orbite (paramétrée) du flot horocyclique positif issue du point $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec paramètre t (membre droit de l'égalité) à partir de l'orbite du même flot issue de l'identité avec paramètre τ, $\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il suffit de

1. changer son paramétrage projectivement, $\tau = (at+b)/(ct+d)$ (on obtient le premier facteur du membre gauche de l'égalité),
2. suivre, pour le point $t = t_0$, le flot géodésique pendant un temps $-2\log(ct_0 + d)$ (multiplier par le deuxième facteur) et finalement,
3. suivre, pour le point qui en résulte, le flot horocyclique négatif pendant un temps $-c/(ct_0 + d)$ (multiplier par le troisième facteur).

D'après le Théorème 1, il existe un biholomorphisme entre un voisinage de p dans Ξ et un voisinage de l'identité dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ qui identifie p et e et les champs H et h^+, E et g, Y et h^-. Le germe de ce biholomorphisme est unique. On peut donc interpréter l'égalité (7) sur $\mathbf{C}^3$ via ce biholomorphisme en explicitant les flots de E et Y : On peut, à partir de $\phi(t)$, construire une nouvelle solution de H en effectuant les transformations indiquées ci-dessus, à savoir,

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{(ct+d)^2}\underbrace{\phi_i\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)}_{\text{(1) reparamétriser}}}_{\text{(2) suivre le flot géodésique ...}} - \frac{c}{ct+d}}_{\text{(3) suivre le flot horocyclique négatif ...}}.$$

Ceci prouve la partie (1) de la proposition. Prouvons l'implication inverse. Supposons remplie la condition (2). Soit $p \in \Xi$ et soit $\phi(t)$ une solution locale de H avec condition initiale p. Considérons, pour $i \in \{1,2,3\}$ l'application $\Phi_i : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ définie dans un voisinage de l'identité $\mathrm{U} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\Phi_i}{\longmapsto} \frac{1}{d^2}\phi_i\left(\frac{b}{d}\right) - \frac{c}{d}. \tag{8}$$

L'application $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ identifie U à un ouvert de $\mathbf{C}^3$ contenant p. Sous cette application, les images des flots de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, horocyclique positif, géodésique et horocyclique négatif, sont, respectivement,

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\Phi_i}{\longmapsto} \frac{1}{(ct+d)^2}x_i\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{c}{ct+d}, \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \overset{\Phi_i}{\longmapsto} e^t\left[\frac{1}{d^2}x_i\left(\frac{b}{d}\right) - \frac{c}{d}\right], \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \overset{\Phi_i}{\longmapsto} \left[\frac{1}{d^2}x_i\left(\frac{b}{d}\right) - \frac{c}{d}\right] + t.
\end{gathered}$$

La première expression donne, par hypothèse, le flot du champ H, qui s'identifie donc, via Φ, au champ invariant à gauche h^+. Cette application identifie aussi les flots des champs géodésique et d'Euler et ceux des champs horocyclique négatif et Y. Les trois champs doivent donc satisfaire les relations de commutation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. La relation d'Euler nous garantit $[\mathrm{E}, \mathrm{Y}] = -\mathrm{Y}$. Puisque l'égalité $[\mathrm{E}, \mathrm{H}] = \mathrm{H}$ doit avoir lieu, H est un champ quadratique homogène. La troisième relation impose $[\mathrm{Y}, \mathrm{H}] = 2\mathrm{E}$. Le champ H est, par définition, un champ d'Halphen. □

Établissons maintenant quelques conditions sous lesquelles une algèbre de Lie associée à un champ d'Halphen $\mathrm{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est uniforme. Les champs qui engendrent l'algèbre sont linéairement indépendants dans $\Xi \subset \mathbf{C}^3$, le complémentaire du lieu d'annulation de leur determinant, donné par

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Y} & \mathrm{E} & \mathrm{H} \end{vmatrix} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2)(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1).$$

On supposera par la suite que $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2) \neq 0$ et l'on notera $\ell \subset \mathbf{C}^3$ la seule orbite commune de E et Y, la droite de direction $[1:1:1]$ qui passe par l'origine, lieu d'intersection des trois hyperplans $\{z_i = z_j\}$. En restriction à l'hyperplan invariant $\{z_2 = z_3\}$,

– si $\alpha_1 \neq 0$, dans les coordonnées $(w_1, w_2) = (\alpha_1 z_1 + [1-\alpha_1]z_2, z_2)$, les champs sont $\mathrm{Y} = \partial/\partial w_1 + \partial/\partial w_2$, $\mathrm{E} = w_1\partial/\partial w_1 + w_2\partial/\partial w_2$, $\mathrm{H} = w_1^2\partial/\partial w_1 + w_2^2\partial/\partial w_2$;

– si $\alpha_1 = 0$, dans les coordonnées $(w_1, w_2) = (z_2, z_1 - z_2)$, les champs sont $Y = \partial/\partial w_1$, $E = w_1\partial/\partial w_1 + w_2\partial/\partial w_2$, $H = w_1^2\partial/\partial w_1 + 2w_1w_2\partial/\partial w_2$.

De cette sorte, dans le premier cas, on a la restriction de l'action diagonale de $PSL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ au produit de deux cartes affines et, dans le deuxième, la restriction de l'action sur $T\mathbf{CP}^1$ (induite par l'action homographique) à une trivialisation au-dessus d'une carte affine de $\mathbf{CP}^1$. Donc, l'existence d'une action locale maximale associée aux champs d'Halphen ne concerne que l'ouvert Ξ. Notons $\mathscr{A}$ le feuilletage de $\mathbf{C}^3$ donné par les champs E et Y. Il est donné par les surfaces de niveau de la fonction $\Pi : \mathbf{C}^3\backslash\ell \to \mathbf{CP}^1$, donnée par $\Pi(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$, qui omet, en restriction à Ξ, les valeurs 0, 1 et ∞. Chacune de ses feuilles est un hyperplan contenant ℓ. Notons $\mathscr{C} \subset \mathbf{CP}^1$ l'image de Ξ sous Π.

Puisque la classe projective des solutions d'un champ d'Halphen H (naturellement munies d'une structure euclidienne complexe, celle donnée par le champ) est invariante sous l'holonomie du feuilletage $\mathscr{A}$ et l'espace de feuilles de $\mathscr{A}$ est la courbe $\mathscr{C}$, elle est naturellement munie d'une structure projective, ne dépendant que de H. Si $\phi : U \to \mathbf{C}^3$ est une solution de H alors $(\Pi \circ \phi)^{-1}$ est une carte de ladite structure. On caractérisera l'uniformité de l'algèbre à travers cette structure projective.

Proposition **3.** — *Soit, pour* $i \in \{0, 1\}$, Ξ_i *une variété complexe de dimension trois avec une représentation* $\Psi_i : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{X}(\Xi_i)$ *de sorte qu'en tout point de* Ξ_i *l'algèbre de Lie de champs de vecteurs ait rang trois. Supposons que l'algèbre de Lie de champs de vecteurs* $\Psi|_{\mathfrak{aff}_0(\mathbf{C})}$ *provient d'une action du groupe affine dont le stabilisateur de tout point s'identifie avec le centre de* $SL_2(\mathbf{C})$. *Supposons que l'espace d'orbites de cette action est une courbe holomorphe* $\mathscr{C}_i$, *et notons* $\Pi_i : \Xi_i \to \mathscr{C}_i$ *la projection. Supposons qu'il existe un biholomorphisme* $f : \mathscr{C}_0 \to \mathscr{C}_1$ *qui est, de surcroît, un isomorphisme des structures projectives naturellement induites par* (Ξ_i, Π_i). *Alors il existe un biholorphisme* $\widetilde{f} : \Xi_0 \to \Xi_1$, *tel que* $\widetilde{f}_* \circ \Psi_0 = \Psi_1$ *et* $f \circ \Pi_0 = \Pi_1 \circ \widetilde{f}$.

Preuve. — L'exemple canonique d'un tel fibré est l'application $\rho_0 : PSL_2(\mathbf{C}) \to \mathbf{CP}^1$, avec la représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ donnée par les champs invariants à gauche. La structure projective induite par le fibré est la canonique. Pour une courbe $\mathscr{C}$ munie d'une structure projective provenant d'un fibré $\Pi : \Xi \to \mathscr{C}$, on a, pour $p \in \mathscr{C}$ une application développante $\mathscr{D} : (\widetilde{\mathscr{C}}, p) \to \mathbf{CP}^1$ et un morphisme de monodromie $\mu : \pi_1(\mathscr{C}, p) \to PSL_2(\mathbf{C})$. On prouvera que le fibré $\Pi : \Xi \to \mathscr{C}$ est essentiellement le fibré sur $\mathbf{CP}^1$ donné par ρ_0 tiré en arrière par $\mathscr{D}$ et quotienté par l'action de $\pi_1(\mathscr{C})$. Soit $q \in \Xi$, $q \in \Pi^{-1}(p)$ avec $p \in \mathscr{C}$ et $\pi_{\mathscr{C}} : (\widetilde{\mathscr{C}}, \widetilde{p}) \to (\mathscr{C}, p)$ le revêtement universel de $\mathscr{C}$. Soit $\Pi' : \Xi' \to \widetilde{C}$ le tiré en arrière du fibré $(\Pi, \Xi, \mathscr{C})$ par π_C et considérons l'application $\pi_\Xi : \Xi' \to \Xi$ associée. Soit $q' \in \pi_\Xi^{-1}(q)$. D'après le Théorème de Lie, il existe un unique germe de biholomorphisme $\mathscr{D}_{\Xi}^{0} : (\Xi', q) \to (\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}), e)$ qui fait correspondre les algèbres de Lie de champs de vecteurs. Considérons maintenant l'unique application développante de la structure projective $\mathscr{D}_{\mathscr{C}} : (\widetilde{\mathrm{C}}, \widetilde{p}) \to (\mathbf{CP}^1, 0)$ qui satisfait, au niveau des germes, la relation

$$\begin{array}{ccc} (\Xi', q') & \xrightarrow{\mathscr{D}_{\Xi}^{0}} & (\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}), e) \\ \Pi' \big\downarrow & & \big\downarrow \rho \\ (\widetilde{\mathscr{C}}, \widetilde{p}) & \xrightarrow{\mathscr{D}_{\mathscr{C}}} & (\mathbf{CP}^1, 0) \end{array} .$$

Convainquons-nous du fait que l'application $\mathscr{D}_{\Xi}^{0}$ se prolonge, de façon univoque, en une application $\mathscr{D}_{\Xi}$, définie sur Ξ', qui fait toujours commuter le diagramme ci-dessus. Notons $\mathscr{A}$ la fibre du fibré Π' au-dessus de $\widetilde{p}$. Le fibré $\mathscr{A} \to \Xi' \to \widetilde{\mathscr{C}}$ induit une suite exacte longue en homotopie :

$$\cdots \to \pi_2(\widetilde{\mathscr{C}}, \widetilde{p}) \to \pi_1(\mathscr{A}, q') \to \pi_1(\Xi', q') \to \pi_1(\widetilde{\mathscr{C}}, \widetilde{p}) \to \cdots .$$

Puisque $\widetilde{\mathscr{C}}$ est simplement connexe, le groupe fondamental de Ξ' est engendré par le groupe fondamental de $\mathscr{A}$, qui est cyclique et infini. Il suffit donc, pour prouver que le germe d'application $\mathscr{D}_{\Xi}^{0}$ s'étend de façon univoque sur Ξ', de prouver que son prolongement analytique le long d'un lacet dont la classe engendre le groupe fondamental de $\mathscr{A}$ est uniforme. Mais ceci est une conséquence du fait que $\Psi|_{\mathfrak{aff}_0(\mathbf{C})}$ provient d'une action globale du groupe affine (et pas de l'un de ses revêtements). Ceci prouve la proposition. $\square$

Proposition **4.** — *Sont équivalents :*

1. *L'algèbre de Lie de champs de vecteurs sur* Ξ *engendrée par* $\mathrm{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, E *et* Y *est uniforme et l'action locale maximale se factorise à travers une action locale maximale de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.
2. *La restriction de* $\mathrm{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *à* Ξ *est un champ de vecteurs semi-complet.*
3. *La structure projective induite par* $\mathrm{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *sur* $\mathscr{C}$ *est uniformisable.*

Preuve. — On a clairement (1) $\Rightarrow$ (2). Prouvons l'implication (2) $\Rightarrow$ (3). Soit H un champ d'Halphen (pas nécessairement semi-complet pour l'instant). Soit $p \in \Xi$. Soit Σ la courbe intégrale de H qui passe par p. On a une application $\Pi|_{\Sigma} : \Sigma \to \mathscr{C}$ qui est une immersion. On construira une courbe Σ', un revêtement $\Pi' : \Sigma' \to \mathscr{C}$ et un plongement $\iota : \Sigma \to \Sigma'$ de sorte que, par rapport à ce dernier on ait $\Pi'|_{\Sigma} \equiv \Pi|_{\Sigma}$. Supposons que $\Pi|_{\Sigma}$ ne satisfait pas la propriété de relèvement de chemins, c'est-à-dire, qu'il existe une courbe $\alpha : [0, 1] \to \mathscr{C}$ et $\widetilde{\alpha} : [0, 1) \to \Sigma$ telle que pour tout $t \in [0, 1)$, $\Pi|_{\Sigma} \circ \widetilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$, mais de façon à ce que la courbe $\widetilde{\alpha}$ ne puisse pas être prolongée continûment à $t = 1$. Soit $p \in \mathscr{C}$ le point $\alpha(1)$. Soit $x : D \to \Xi$ une solution de H définie dans un disque $D \subset \mathbf{C}$ telle que $x \circ \Pi(0) = p$. Soit $\Psi : \rho^{-1}(D) \to \mathbf{C}^3$ l'application donnée par la formule (8), qui est injective (quitte à se restreindre à un disque plus petit) et dont l'image, saturée par les flots de E et de Y, s'identifie à l'ouvert $\Pi^{-1}(\Pi \circ x(D)) \subset \mathbf{C}^3$ (en restriction auquel le champ H est semi-complet). On a $\Pi \circ \Psi = x \circ \rho$. Ceci nous permet de considérer cette situation dans $\rho^{-1}(D) \subset PSL_2(\mathbf{C})$. Pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbf{C})$, on a $\rho \circ \Phi^t_{h^+}(A) = (at+b)/(ct+d)$. L'image inverse de $\widetilde{\alpha}$ sous Ψ donne une courbe dans $\rho^{-1}(D)$ contenue dans une orbite de Φ_{h^+}. La fonction $\rho \circ \Psi$ prend des valeurs arbitrairement proches de $0 \in D$ sans pouvoir s'y prolonger. Ceci n'est possible que si $a = 0$. La solution de Φ_{h^+} qui contient l'image inverse de $\widetilde{\alpha}$ est donc définie dans un voisinage de l'infini dans $\mathbf{C}$. La courbe Σ' est obtenue en ajoutant un point à l'infini pour un tel bout de Σ. Le champ de vecteurs holomorphe (et partout non-nul) $H|_\Sigma$ s'étend en un champ de vecteurs holomorphe sur Σ' qui s'annule sur l'ensemble de points à l'infini $\Sigma' \setminus \Sigma$. L'application $\Pi|_\Sigma$ s'étend naturellement à Σ' et devient un revêtement. Supposons maintenant que le champ H est semi-complet et soit $\phi : (U, 0) \to (\Sigma, q)$ une solution de H ; cette application est un revêtement galoisien qui est, en restriction à son image, un morphisme des structures projectives (par rapport à la structure projective standard de $\mathbf{C} \subset \mathbf{CP}^1$ à la source, à la structure projective induite par H au but). Puisque le champ H est semi-complet, ou bien $\Sigma' = \Sigma$, ou bien l'ensemble des points à l'infini, $\Sigma' \setminus \Sigma$, ne contient qu'un seul point, disons q_∞. Dans ce cas, on peut prolonger la solution ϕ en une application $\phi' : U \cup \{\infty\} \to \Sigma'$ telle que $\phi'(\infty) = q_\infty$ et qui est encore un revêtement. La composition des revêtements $\Pi' \circ \phi' : \Sigma' \to \mathscr{C}$ (ou bien $\Pi \circ \phi : \Sigma \to \mathscr{C}$ si $\Sigma' \setminus \Sigma = \emptyset$) donne un revêtement qui uniformise la structure projective de $\mathscr{C}$. Prouvons maintenant (3) $\Rightarrow$ (1). Puisque la structure projective est uniformisable, il existe un ouvert $U \subset \mathbf{CP}^1$ tel que le quotient de U sous l'action d'un groupe Γ d'homographies est une variété isomorphe à $\mathscr{C}$, en tant que variété munie d'une structure projective. Les fibrés $\Pi : \Xi \to \mathscr{C}$ et $\rho : \Gamma \setminus \rho^{-1}(U) \to \Gamma \setminus U$ satisfont les hypothèses de la proposition précédente. La variété Ξ s'identifie donc à $\Gamma \setminus \rho^{-1}(U)$. Ceci finit la preuve de la proposition. □

L'intérêt de la troisième condition réside dans le fait que l'on peut calculer explicitement la structure projective induite. Rappelons que la dérivée schwarzienne d'une fonction holomorphe $f(z)$ par rapport à z, notée $\{f, z\}$, est donnée par

$$\{f, z\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2,$$

et qu'elle est invariante sous l'action des homographies au but. Si $(z_1, z_2, z_3)(t)$ est une solution de (1) qui est définie dans $\mathrm{U} \subset \mathbf{C}$ et si $\omega : \mathrm{U} \to \mathbf{CP}^1$ est donnée par

$$\omega(t) = \frac{z_1(t) - z_3(t)}{z_2(t) - z_3(t)},$$

alors ω^{-1} donne l'application développante de la structure projective. Puisqu'elle est définie à une homographie près, sa dérivée schwarzienne est bien définie. Calculons-la par rapport à s, une coordonnée affine de $\mathbf{CP}^1$. On a

$$\begin{aligned}\{\omega^{-1}, s\} &= -\frac{1}{(\omega')^2}\{\omega, t\}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{1}{m_1^2}\right)[\omega(t)-1]\omega(t) - \left(1-\frac{1}{m_2^2}\right)[\omega(t)-1] + \left(1-\frac{1}{m_3^2}\right)\omega(t)}{\omega^2(t)[\omega(t)-1]^2}.\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en posant $m_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2)/\alpha_i$. Puisque toute solution à l'équation différentielle $\{f, z\} = \mathrm{P}(z)$ est donnée [24, Chapitre 10] par le rapport de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $g''(z) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(z)g(z) = 0$, l'application développante de la structure projective est donnée (comme fonction multiforme sur $\mathscr{C}$ et à une homographie près) par le rapport de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$f''(s) + \frac{\left(1-\frac{1}{m_1^2}\right)(s-1)s - \left(1-\frac{1}{m_2^2}\right)(s-1) + \left(1-\frac{1}{m_3^2}\right)s}{4s^2(s-1)^2} f(s) = 0, \tag{\textbf{9}}$$

qui appartient à la classe fuchsienne [24]. La théorie des applications conformes de Schwarz nous permet aussi de retrouver le morphisme de monodromie $\mu : \pi_1(\mathscr{C}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ comme l'image sous la projection standard $\pi : \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ du groupe de l'équation. La théorie de Schwarz montre que si la structure projective est uniformisable au voisinage d'un point singulier de l'équation (9), alors le point en question est un point singulier régulier et le discriminant de son polynôme indiciel est soit nul soit l'inverse du carré d'un entier (non-nul). Dans notre cas, ceci revient à dire, dans l'équation ci-dessus, que, pour tout i, $m_i \in \mathbf{Z}^* \cup \{\infty\}$. Si ces conditions sont satisfaites et $m_i^2 \neq 1$ pour tout i, alors la structure projective est uniformisable et trois cas apparaissent :

1. Si $\sum_i 1/|m_i| > 1$ alors la monodromie est un groupe fini, qui est dans un conjugué de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ et qui est le groupe d'isométries directes du pavage de la sphère S^2 par triangles d'angles π/m_i. On trouve ici les groupes dihédraux et les groupes des solides platoniques.
2. Si $\sum_i 1/|m_i| = 1$ alors la monodromie est contenue dans un conjugué du groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbf{C})$ et il s'agit du groupe d'isométries directes du pavage du plan euclidien par triangles d'angles π/m_i.

3. Si $\sum_i 1/|m_i| < 1$ alors la monodromie est, à conjugaison près, le groupe d'isométries directes d'un pavage du plan hyperbolique par triangles d'angles internes π/m_i, contenu dans $PSL_2(\mathbf{R})$.

Dans les trois cas le quotient de l'ouvert des points du domaine qui ont un stabilisateur trivial sous cette action donne l'uniformisation. Le groupe de monodromie est le groupe d'isométries directes d'un pavage par triangles d'angles π/m_i (de la sphère, du plan euclidien ou du plan hyperbolique, selon la valeur de $\sum_i 1/|m_i|$), le *groupe triangulaire* $T(m_1, m_2, m_3)$ [34]. Dans le premier cas ci-dessus, les solutions de l'équation d'Halphen sont rationnelles et le domaine de définition de la solution générale est le complémentaire d'un ensemble fini de points dans $\mathbf{C}$. Dans le deuxième cas, le domaine de définition de la solution est le complémentaire de l'image homographique de l'ensemble fermé $\Lambda \cup \{\infty\}$, où Λ est un sous-groupe infini et discret de $\mathbf{C}$. L'image du point à l'infini est une singularité essentielle. Dans le troisième cas, le domaine de définition est l'image homographique d'un disque moins un ensemble discret (dans la métrique hyperbolique). Les solutions sont définies soit à l'intérieur d'un cercle, soit dans un demi-plan soit à l'extérieur d'un cercle. Si, disons, $m_1^2 = 1$, alors la structure projective ne peut être uniformisable que dans les cas où $m_2^2 = m_3^2$ et, dans ce cas, la monodromie est cyclique. De cette sorte, l'algèbre est uniforme si et seulement si $m_i \in \mathbf{Z}^* \cup \{\infty\}$ avec $m_i^2 \neq 1$ pour tout i ou bien $m_1^2 = 1$ et $m_2^2 = m_3^2$ (à une permutation des indices près). On retrouve ainsi le résultat suivant :

Théorème **2** *(Halphen, 1881 [18,20]). — Si* $m_i \in \mathbf{Z}^* \cup \{\infty\}$ *avec* $m_i \geq 2$ *alors toutes les solutions de* $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *sont uniformes.*

Remarque. — Les champs d'Halphen $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $H(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ sont linéairement équivalents si et seulement si $(m'_i)^2 = m^2_{\sigma(i)}$ pour une permutation des indices σ. Supposons $\alpha_3 \neq 1$. Le changement de coordonnées

$$(z_1, z_2, z_3) = ([1 - \alpha_3]z_1 + \alpha_3 z_3, [1 - \alpha_3]z_2 + \alpha_3 z_3, z_3),$$

qui préserve les champs E et Y, envoie le champ $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sur un champ $H(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ pour lequel $m'_1 = m_1$, $m'_2 = m_2$ et $m'_3 = -m_3$. Si $\alpha_3 = 1$, alors l'action locale du triplet de champs se factorise à travers la projection $(z_1, z_2, z_3) \mapsto z_3$ et l'hyperplan $\{z_3 = 0\}$ est invariant. Dans ce cas, on a $1/m_1 + 1/m_2 - 1/m_3 = 1$ et le champ d'Halphen est, en restriction au plan invariant $\{z_3 = 0\}$, donné, à une dilatation de variables près, par l'un des champs de Ghys-Rebelo [15]

$$z_1(z_1 + [1 - m_2]z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2(z_2 + [1 - m_1]z_1)\frac{\partial}{\partial z_2},$$

correspondant au triangle d'angles internes π/m_1, π/m_2 et π/m_3.

D'autres algèbres de Lie de champs de vecteurs polynomiaux peuvent s'obtenir à partir des algèbres d'Halphen symétriques, un fait qui était bien connu d'Halphen (voir [21, Tome I, pp. 329–331] ; voir aussi [16, Section 3.1]). Certaines équations « classiques » sont aussi liées à l'équation d'Halphen, dont celle de Chazy [9] :

$$\rho''' = 12\rho''\rho - 18(\rho')^2 + \frac{864}{36-n^2}(\rho' - \rho^2)^2.$$

Ses solutions sont données par la somme des coordonnées d'une solution du champ $\mathrm{H}(\alpha,\alpha,\alpha)$ avec le paramètre $n = (3\alpha-2)/2\alpha$. Une propriété d'invariance légèrement modifiée a toujours lieu et, si $\rho(t)$ est une solution de cette équation, d'autres sont données par

$$\frac{1}{(ct+d)^2}\rho\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{3c}{ct+d}.$$

4. Dynamique des champs d'Halphen hyperboliques

Le but de cette section est de décrire les dynamiques des champs d'Halphen qui sont semi-complets et dont le stabilisateur de l'orbite ouverte est un groupe triangulaire hyperbolique (le groupe de symétries directes d'un pavage par triangles du plan hyperbolique). La dynamique des feuilletages qu'ils induisent sur $\mathbf{CP}^2$ sera décrite dans la section suivante.

Soit $\mathscr{H} = \{z \in \mathbf{CP}^1 \,|\, \Im(z) > -1\}$, $\mathscr{H}' = \{z \in \mathbf{CP}^1 \,|\, \Im(z) < -1\}$ et $\partial\mathscr{H} = \{z \in \mathbf{CP}^1 \,|\, \Im(z) = -1\}$. Le groupe de biholomorphismes de $\mathscr{H}$, qui sera noté $\mathrm{G}_{\mathscr{H}}$, est un conjugué de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Soit $\Gamma \subset \mathrm{G}_{\mathscr{H}}$ un groupe triangulaire hyperbolique et soit $\mathrm{T}(m_1, m_2, m_3) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ ($\sum \frac{1}{m_i} < 1$) son conjugué. Soit $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$ l'ensemble de points de $\mathscr{H}$ qui ont un stabilisateur trivial sous l'action de Γ et supposons que $0 \in \mathscr{H}_0$. Soit $\mathrm{M} = \rho_0^{-1}(\mathscr{H}_0)$. Le groupe Γ est discret dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est donc une variété naturellement munie d'une action holomorphe à droite de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. L'ouvert $\mathrm{M} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est Γ-invariant et $\Gamma\backslash\mathrm{M}$ est naturellement muni d'une action holomorphe locale maximale de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et, par conséquence, d'une algèbre de Lie de champs de vecteurs. Les champs de vecteurs h^- et g sont complets dans $\Gamma\backslash\mathrm{M}$ car les sous-groupes à un paramètre correspondants engendrent $\mathrm{Aff}_0(\mathbf{C})$. La classe de $\mathrm{A} \in \mathrm{M}$ dans $\Gamma\backslash\mathrm{M}$ sera notée $[\mathrm{A}]$.

Le domaine de définition de la solution de h^+ qui a $[\mathrm{A}] \in \Gamma\backslash\mathrm{M}$ comme condition initiale est $\mathrm{A}^{-1}(\mathscr{H}_0) \cap \mathbf{C}$. Prouvons ceci. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{A}^{-1}(\mathscr{H}_0) \cap \mathbf{C}$ ne dépend que de $[\mathrm{A}]$ et que, puisque M est invariant sous l'action de Γ à gauche et que cette action commute avec l'action de $\exp(th^+)$ à droite, le domaine de définition de la solution de h^+ dans $\Gamma\backslash\mathrm{M}$ avec $[\mathrm{A}]$ comme condition initiale est le même que celui de la solution de h^+ dans M avec condition initiale A. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$, alors, pour avoir $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$, il faut et il suffit que $[at+b : ct+d]$ soit dans $\mathscr{H}_0$, ce qui est équivalent à $t \in A^{-1}(\mathscr{H}_0) \cap \mathbf{C}$. En particulier, la solution de h^+ issue de l'identité est définie dans $\mathscr{H}_0$.

On peut distinguer dans $\Gamma\backslash M$ trois ensembles connexes invariants par h^+ et g :

– l'ensemble, noté $\mathscr{L}$, des points x dont la solution de h^+ ayant x comme condition initiale est définie dans un demi-plan ;
– l'ensemble, noté $\mathrm{Int}_{\mathscr{L}}$, des points x dont la solution de h^+ ayant x comme condition initiale est définie dans *l'intérieur* d'un cercle ;
– l'ensemble, noté $\mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$, des points x dont la solution de h^+ ayant x comme condition initiale est définie dans *l'extérieur* d'un cercle.

Un point $[A] \in \Gamma\backslash M$ sera dans l'un de ces trois ensembles si, respectivement, $A(\infty) \in \partial\mathscr{H}$, $A(\infty) \in \mathscr{H}'$ ou $A(\infty) \in \mathscr{H}$. L'ensemble $\mathscr{L}$ est fermé. Il s'agit d'une variété réelle analytique de dimension 5 (car ρ_0 est de rang constant) feuilletée par des surfaces complexes (tangentes à h^+ et g) qui sépare son complémentaire en deux composantes ouvertes, $\mathrm{Int}_{\mathscr{L}}$ et $\mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$.

4.1. *Dynamique dans* $\mathscr{L}$. — En restriction à $\mathscr{L}$, on a une intégrale première à valeurs dans le cercle S^1 donnée, pour chaque point $p \in \mathscr{L}$, par l'angle ϑ que fait, dans $\mathbf{C}$, l'axe réel (orienté par le demi-plan supérieur) avec la droite qui borne le domaine de la solution de h^+ ayant p pour condition initiale (avec l'orientation de la droite donnée par le domaine). Notons $\mathscr{L}_\vartheta$ l'image réciproque de $\vartheta \in S^1$ sous cette application. Chacun de ces fermés est une variété réelle analytique de dimension 4 qui est invariante par h^+. Chacune de ces variétés constitue une « unité » dynamique. Rappelons le résultat suivant :

Théorème **3** *(Hedlund [23]). — Soit* $T(m_1, m_2, m_3) \subset PSL_2(\mathbf{R})$ *un groupe triangulaire hyperbolique. Toute orbite du flot horocyclique sur*

$$T(m_1, m_2, m_3)\backslash PSL_2(\mathbf{R})$$

est soit périodique, soit dense. Les orbites périodiques sont associées aux bouts du quotient de $\mathbf{H}^2$ *par* $T(m_1, m_2, m_3)$ *et, en particulier, elles n'existent que si* $m_i = \infty$ *pour un certain* i.

Proposition **5.** — *L'ensemble* h^+*-invariant* $\mathscr{L}_0$ *contient l'adhérence d'une feuille de* h^+ *et, si* Γ *n'a pas d'éléments paraboliques (si* $m_i \neq \infty$ *pour tout* i*),* $\mathscr{L}_0$ *est un minimal de* h^+.

Preuve. — Les points de $\mathscr{L}_0$ sont ceux pour lesquels le domaine de définition de la solution de h^+ qui les a comme condition initiale est un translaté de $\mathscr{H}$ contenant 0. L'ensemble de ceux pour lesquels ce domaine est exactement $\mathscr{H}$ s'identifie à $\Gamma\backslash \mathrm{G}_{\mathscr{H}}$. Sur ce dernier, le flot réel de h^+ est complet. Il est en fait conjugué au flot horocyclique (positif) dans le fibré tangent unitaire de $\mathrm{T}(m_1, m_2, m_3)\backslash \mathbf{H}^2$. Considérons une orbite dense du flot réel de h^+ dans $\mathscr{L}_0$. Le saturé de cette orbite par le flot de h^+ doit contenir son saturé par le flot réel de h^+, et donc l'adhérence de ce saturé contient $\Gamma\backslash \mathrm{G}_{\mathscr{H}}$. Puisque le saturé de cet ensemble par h^+ est $\mathscr{L}_0$ tout entier, la proposition suit. □

Preuve du Théorème A. — Une intégrale première méromorphe de H en induirait une sur $\Gamma\backslash\mathrm{M}$, constante sur $\mathscr{L}_0$, et ce fermé deviendrait une sous-variété complexe de codimension 1. Or, $\mathscr{L}_0$ n'est pas une sous-variété complexe, car, tout en étant invariant par le flot réel de g, il ne l'est pas par son flot imaginaire. Pourtant, on a une intégrale première réelle analytique $r^{-2} : \Gamma\backslash\mathrm{M} \to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ qui est l'inverse du carré du rayon du cercle délimitant le domaine de définition de h^+ (pour la métrique euclidienne de $\mathbf{C}$). En effet, l'image du cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid z\bar{z} = 1\}$ sous l'homographie $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a pour rayon $|c\bar{c} - d\bar{d}|^{-1}$. Cette expression devient infinie si et seulement si l'image du cercle est une droite. Cette intégrale première peut être considérée aussi dans Ξ, mais elle ne s'étend pas continûment sur son complémentaire. Néanmoins, la fonction du rayon $\rho = (r^2 + r^{-2})$ le fait : La continuité du domaine de définition des solutions du champ d'Halphen et la nature rationnelle de ces solutions dans le complémentaire de Ξ font que, dans un voisinage d'un point du complémentaire, les solutions soient définies soit dans un hyperplan, soit à l'intérieur d'un grand cercle, soit à l'extérieur d'un petit cercle. Cette intégrale première se prolonge continûment sur le complémentaire de Ξ, où elle prend la valeur ∞. □

Signalons que l'inexistence d'intégrale première méromorphe du champ $\mathrm{H}(0, 0, 0)$ – celui qui correspond au triangle hyperbolique idéal – a été établie par Maciejewski et Strelcyn [33], à partir d'une étude algébrique de la dérivation induite par ce champ. H. Movasati [36] a montré l'existence d'une intégrale première réelle de $\mathrm{H}(0, 0, 0)$. Nous ignorons si ces intégrales premières sont indépendentes.

4.2. *Dynamique dans le complémentaire de $\mathscr{L}$.* — La situation dynamique dans le complémentaire de $\mathscr{L}$ est extrêmement simple mais elle n'est pas dépourvue d'intérêt. La restriction de h^+ à $\mathrm{Int}_{\mathscr{L}} \cup \mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$ admet une intégrale première holomorphe à valeurs dans la variété $\Gamma\backslash\mathrm{T}(\mathscr{H}' \cup \mathscr{H})$: Si l'on prend le champ de vecteurs $v = z^2\partial/\partial z$ sur $\mathbf{CP}^1$, cette intégrale première est donnée par

$$[\mathrm{A}] \mapsto \Gamma\backslash \left(\mathrm{A}(\infty), \mathrm{A}_* v|_{\mathrm{A}(\infty)}\right) \in \Gamma\backslash\mathrm{T}(\mathscr{H}' \cup \mathscr{H}).$$

Elle sépare les orbites de H. La projection naturelle sur $\Gamma\backslash(\mathscr{H}'\cup\mathscr{H})$ donne une intégrale première g-invariante à valeurs dans l'union disjointe de deux copies de $\mathbf{CP}^1$. Cette intégrale première est celle induite par ρ_∞ et sera notée ρ_∞^Γ.

Une deuxième approche à la dynamique de h^+ dans $\mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$ permettra de comprendre le comportement des orbites de h^+ lors du passage de Ξ à son complémentaire. Prenons le champ $\mathrm{H}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ et éclatons l'origine de $\mathbf{C}^3$ par

$$(z_1,z_2,z_3)\mapsto\left(\frac{z_1}{z_3}-1,\frac{z_2}{z_3}-1,z_3\right)=(s_1,s_2,s_3).$$

Dans les nouvelles coordonnées le champ devient le champ $\widetilde{\mathrm{H}}$ donné par

$$\begin{aligned}(\mathbf{10})\qquad \frac{1}{s_3}\widetilde{\mathrm{H}}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=s_1(1+\alpha_1s_1+[2-\alpha_1-\alpha_3]s_2+[1-\alpha_3]s_1s_2)\frac{\partial}{\partial s_1}\\&\quad+s_2(1+\alpha_2s_2+[2-\alpha_2-\alpha_3]s_1+[1-\alpha_1]s_1s_2)\frac{\partial}{\partial s_2}\\&\quad+s_3(1+[\alpha_3-1]s_1s_2)\frac{\partial}{\partial s_3}.\end{aligned}$$

Les deux autres champs deviennent $s_3\widetilde{\mathrm{Y}}=-s_1\partial/\partial s_1-s_2\partial/\partial s_2+s_3\partial/\partial s_3$ et $\widetilde{\mathrm{E}}=s_3\partial/\partial s_3$; la fonction Π devient $\widetilde{\Pi}(s_1,s_2,s_3)=s_1/s_2$. L'éclaté de l'origine est l'hypersurface $\{s_3=0\}$. Le champ holomorphe $\frac{1}{s_3}\widetilde{\mathrm{H}}$ a une singularité dicritique à l'origine des coordonnées $\mathscr{O}$ et il est linéarisable dans un voisinage de ce point : le champ $\widetilde{\mathrm{H}}$ a une intégrale première (locale) à valeurs dans $\mathbf{CP}^2$ qui sépare les orbites et qui, en restriction au diviseur exceptionnel, prend des valeurs dans une droite de $\mathbf{CP}^2$. Notons $\mathscr{B}\subset\mathbf{C}^3$ l'ouvert contenant toutes les orbites de H qui passent par $\mathscr{O}$, son bassin d'attraction. La restriction du champ $\widetilde{\mathrm{H}}$ à toute orbite de $\mathscr{B}$ a un pôle double en $\mathscr{O}$ et donc les solutions de H avec conditions initiales dans $\mathscr{B}$ contiennent un voisinage de l'infini dans leur domaine de définition. Ceci impose de fortes contraintes dynamiques si H est semi-complet : toute orbite qui passe par $\mathscr{O}$ ne peut le faire qu'une seule fois (la singularité, étant dicritique, capture toute solution voisine et une solution qui passerait deux fois par $\mathscr{O}$ ne pourrait être uniforme). De cette sorte l'intégrale première locale se prolonge en une intégrale première définie dans $\mathscr{B}$ tout entier et, en particulier, les orbites contenues dans $\mathscr{B}$ n'ont pas d'holonomie. On peut caractériser cet ensemble de la façon suivante :

Proposition **6.** — *Soit* H *un champ d'Halphen semi-complet et soit* $\Phi:\mathscr{U}\to\mathbf{C}^3$ *l'action locale de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ *associée, définie dans* $\mathscr{U}\subset\mathbf{C}^3\times\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. *Alors* $\mathscr{B}$ *s'identifie à l'ensemble de points où l'action de l'involution* σ *de la formule* (6) *est définie,* $\mathscr{B}\times\{\sigma\}=\mathscr{U}\cap(\mathbf{C}^3\times\{\sigma\})$ *et* $\sigma(\mathscr{B})=\mathscr{B}$.

Preuve. — Commençons par Ξ. Remarquons que dans $\Gamma\backslash \mathrm{M}$ la multiplication à droite par σ, l'involution de la formule (6), permute les fonctions ρ_0^Γ et ρ_∞^Γ et n'est donc définie que sur $\Gamma\backslash\rho_\infty^{-1}(\mathscr{H}_0) \subset \mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$. Soit $\mathrm{A} \in \rho_\infty^{-1}(\mathscr{H}_0)$ et soit $\phi(t) : \mathscr{U}_{\mathrm{A}} \to \Xi$ la solution de H avec condition initiale [A]. Soit $\mathscr{V} \subset \mathbf{CP}^1$ un voisinage suffisamment petit de l'infini. L'application $\Pi \circ \phi|_{\mathscr{V}}$ se prolonge holomorphiquement à l'infini et $\Pi \circ \phi(\infty)$ donne une feuille de $\mathscr{A}$ évitée par ϕ. Soit $\phi_0(t)$ une deuxième solution de H dont l'image est dans $\mathscr{B}$ et qui évite, à l'infini, cette même feuille de $\mathscr{A}$. La correspondance induite par le feuilletage $\mathscr{A}$ entre les paramètres de ces deux solutions est une homographie qui fixe l'infini, une transformation affine. Puisque $\mathscr{B}$ est H et E-invariant, $[\mathrm{A}] \in \mathscr{B}$. De cette sorte, $\Gamma\backslash\rho_\infty^{-1}(\mathscr{H}_0) \subset \mathscr{B} \cap \Xi$. Parmi les intégrales premières de H définies au voisinage de $\mathscr{O}$ on peut en distinguer une, donnée, pour le point $p \in \Xi$, par la valeur de $\widetilde{\Pi}$ lorsque la solution de H avec condition initiale p s'accumule sur le diviseur. En restriction à Ξ, cette fonction évite les valeurs $0, 1$ et ∞. Puisque les fonctions Π et ρ_∞^Γ sont confondues, $\mathscr{B} \cap \Xi \subset \rho_\infty^{-1}(\mathscr{H}_0)$, ce qui prouve la proposition dans Ξ. Dans le complémentaire de Ξ, la situation est plus simple. On verra plus loin que, d'après les formules (17) et (18), l'action de σ est donnée, en restriction à $\{z_2 - z_3 = 0\}$ et dans des coordonnées linéaires convenables, par

$$(z_1, z_2) \dashrightarrow \left(-\frac{1}{z_1}, -\frac{1}{z_2}\right) \quad \text{si } \alpha_1 \neq 0,$$
$$(z_1, z_2) \dashrightarrow \left(-\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1^2}, \right) \quad \text{si } \alpha_1 = 0.$$

Dans les deux cas, le lieu de définition de σ coïncide avec le lieu, en dehors de ℓ, où H et E sont linéairement indépendants. Les intégrales premières respectives montrent que ce lieu s'identifie à $\mathscr{B}$. □

On a deux intégrales premières E-invariantes de H sur deux ouverts de $\mathscr{B} \cup \mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$. La première, définie sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$ et donnée par ρ_∞^Γ et la deuxième, définie sur $\mathscr{B}$ et donnée par la valeur de Π à l'infini d'une solution. Constatons que ces intégrales premières coïncident sur l'intersection de leurs domaines naturels de définition. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}$ et considérons l'image de l'orbite de h^+ avec A comme condition initiale sous l'application ρ_0 (intégrale première commune de g et h^-), qui se confond localement avec Π :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{\rho_0} \frac{at+b}{ct+d}.$$

La valeur prise par ρ_0 quand $t \to \infty$ est a/c, qui est exactement la valeur de ρ_∞ sur A. Tout ceci est équivariant par rapport à l'action à gauche de Γ et donc les deux intégrales premières coïncident et donnent une intégrale première sur $\mathscr{B} \cup \mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$.

Exemple **1.** — Pour le champ d'Halphen le plus simple, H(1, 1, 1), la solution avec condition initiale $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ est donnée par $z_i(t) = \kappa_i/(1-\kappa_i t)$. La fonction Π évaluée sur cette solution est, lorsque $t \to \infty$, la fonction homogène

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{(\kappa_1 - \kappa_3)}{(\kappa_2 - \kappa_3)},$$

qui est une intégrale première. Cette fonction s'annule sur un point générique de l'hyperplan H-invariant $\{z_2 = 0\}$ et cet hyperplan ne peut donc pas être contenu dans $\mathscr{B}$. Son lieu d'indétermination est donné par les points $[1:0:0]$, $[0:0:1]$, $[0:0:1]$ et $[1:1:1]$ (les singularités dicritiques du feuilletage induit sur $\mathbf{CP}^2$). La surface de niveau générique est un cône ayant pour base une conique qui passe par ces quatre points. Ici, $\mathscr{B} = \mathbf{C}^3 \backslash \{z_1 z_2 z_3 = 0\}$ et l'involution est donnée par

$$(z_1, z_2, z_3) \overset{\sigma_{\mathscr{B}}}{\longmapsto} \left(-\frac{1}{z_3}, -\frac{1}{z_2}, -\frac{1}{z_3}\right),$$

qui induit une involution de Cremona sur $\mathbf{CP}^2$.

L'action de l'involution $\sigma : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ permute les champs H et Y et change le signe de E. Pour un champ d'Halphen semi-complet non-symétrique c'est le seul biholomorphisme satisfaisant ceci :

Proposition **7.** — *Soit* H *un champ d'Halphen semi-complet tel que le groupe triangulaire associé ne soit ni cyclique ni trivial. Les biholomorphismes* $\zeta : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ *tels que* $\zeta_*(\mathrm{H}) = \mathrm{Y}$, $\zeta_*(\mathrm{Y}) = \mathrm{H}$ *et* $\zeta_*(\mathrm{E}) = -\mathrm{E}$ *sont de la forme* $\mathrm{J} \circ \sigma$ *où* $\mathrm{J} \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})^{\mathrm{H}}$, *le groupe des automorphismes linéaires de* $\mathbf{C}^3$ *qui laissent* H *invariant.*

Preuve. — Dans une carte locale de $\Gamma\backslash\rho_\infty^{-1}(\mathscr{H}_0)$, toute application qui opère sur les trois champs de vecteurs de la forme désirée est nécessairement, d'après le Théorème de Lie, de la forme $\mathrm{A} \mapsto \vartheta \mathrm{A}\sigma$, pour $\vartheta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Pour que cette application soit globalement bien définie sur $\Gamma\backslash\rho_\infty^{-1}(\mathscr{H}_0)$, il faut que pour tout $\gamma_1 \in \Gamma$, il existe $\gamma_2 \in \Gamma$ tel que $\vartheta\gamma_1\mathrm{A}\sigma = \gamma_2\vartheta\mathrm{A}\sigma$, c'est-à-dire, que ϑ soit dans $\mathrm{N}(\Gamma)$, le normalisateur de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. L'application ainsi construite ne dépend que de la classe de ϑ dans $\mathrm{N}(\Gamma)/\Gamma$. L'ensemble des applications admissibles est donc en correspondance naturelle avec le groupe $\mathrm{N}(\Gamma)/\Gamma$. Ce groupe agit naturellement (à gauche) sur $\Gamma\backslash\rho_0^{-1}(\mathscr{H})$ et cette action en induit une sur $\Gamma\backslash\mathscr{H}$ qui préserve la structure projective. D'après la Proposition 3, un automorphisme de $\Gamma\backslash\rho_0^{-1}(\mathscr{H})$ qui agit trivialement sur $\Gamma\backslash\mathscr{H}$ est nécessairement l'identité. Le groupe $\mathrm{N}(\Gamma)/\Gamma$ est donc isomorphe au groupe des automorphismes de $\mathbf{CP}^1$ qui préservent la structure projective en question. Si cette structure projective est singulière sur les points 0, 1 et ∞ (si le groupe triangulaire n'est ni trivial ni cyclique), alors ce groupe est un groupe discret qui permute les points singuliers de la structure. Ces symétries sont réalisées par des automorphismes linéaires de $\mathbf{C}^3$ permutant les fonctions z_1, z_2 et z_3 qui laissent H invariant. □

4.3. *Dynamique des feuilletages associés.* — Puisque les champs $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et Y sont homogènes, leur courbes intégrales sont permutées par l'action des homothéties de $\mathbf{C}^3$ (le flot de E). De ce fait, ces champs définissent deux feuilletages dans $\mathbf{CP}^2$ dont les feuilles sont les projections des orbites du champ correspondant par la projection standard $\pi : \mathbf{C}^3\backslash\{0\} \to \mathbf{CP}^2$. Tous les ensembles E-invariants décrits précédemment ($\mathscr{L}$, $\mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$, ...) se projettent sur ce quotient (et donnent lieu à des objets qu'on notera $\mathbf{P}\mathscr{L}$, $\mathbf{P}\mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$, ...). Les feuilletages provenant de H et Y, qui seront notés $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}}$, coïncident avec ceux qui sont induits sur le diviseur exceptionnel lorsqu'on éclate l'origine de $\mathbf{C}^3$. D'après la formule (10), les feuilletages $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}}$ sont donnés, dans une carte affine, par les noyaux des formes

$$\begin{aligned}(\mathbf{11}) \qquad & s_3(1+\alpha_3 s_3+[2-\alpha_1-\alpha_3]s_2+[1-\alpha_1]s_2s_3)ds_2 \\ & \quad - s_2(1+\alpha_2 s_2+[2-\alpha_1-\alpha_2]s_3+[1-\alpha_1]s_2s_3)ds_3\end{aligned}$$

et $s_2ds_3 - s_3ds_2$. Dans la carte affine donnée par $y = 1/s_2, \tau = s_1/s_2$, ces formes deviennent, après multiplication par un facteur convenable,

$$(\mathbf{12}) \qquad \kappa\tau(\tau-1)dy + \left\{y^2 + (\alpha_2 + [\alpha_1 - \kappa]\tau)y + \tau(1-\alpha_3)\right\} d\tau$$

et $d\tau$. Si le champ d'Halphen est primitif ($\alpha_3 = 1$), alors cette équation de Riccati a une droite invariante en $y = 0$. Sur la droite $\tau = 0$ on a deux singularités en $y = 0$ et $y = -\alpha_2$ qui se confondent quand $m_2 = \infty$. Un changement de variables à l'origine (global sur la variable y) de la forme $\tau = f(t), \widetilde{y} = [a(t)y + b(t)][c(t)y + d(t)]^{-1}$ ramène l'équation sur une forme normale :

1. Si $\alpha_2 \neq 0$ ($m_2 \neq \infty$), on peut linéariser cette forme à l'origine tout en restant dans la classe des équations de Riccati, $m_2td\widetilde{y} - \widetilde{y}dt = 0$ (l'holonomie est périodique). Si $m_2 > 0$, alors la singularité est un nœud qui a localement une intégrale première holomorphe, qui sera à l'origine du phénomène non-Hausdorff de l'espace de feuilles. Si $m_2 > 0$ la singularité est un col. La fonction $t^{m_2}/\widetilde{y}$ est une intégrale première. Dans ces nouvelles coordonnés, pour un t_0 proche de l'origine, l'intersection de $\mathbf{P}\mathscr{L}$ avec $\{t = t_0\}$ est un cercle centré à l'origine, $|\widetilde{y}| = r$. De cette sorte, l'ensemble $\mathbf{P}\mathscr{L}$ est donné, dans un voisinage de la singularité, par l'hypersurface où la fonction $|t^{m_2}/\widetilde{y}|$ prend la valeur $|t_0^{m_2}|/r$. Cette surface n'est pas lisse à l'origine et, en fait, elle n'est pas une variété topologique. Un tel nœud peut disparaître au bout de m_2 éclatements (ne laissant que des cols sur l'arbre d'éclatement). De cette sorte, si $m_i \neq \infty$ pour tout i alors, en éclatant $m_1 + m_2 + m_3$ fois $\mathbf{CP}^2$, on obtient une variété munie d'un feuilletage possédant un minimal exceptionnel, le transformé strict de $\mathbf{P}\mathscr{L}$. Il faut éclater un minimum de dix fois, ce qui arrive pour $(m_1, m_2, m_3) = (3, 3, 4)$.

2. Si $\alpha_2 = 0$ ($m_2 = \infty$), alors la singularité est un col-nœud (la discussion qui suit s'appuie sur celle de [8]). La séparatrice dite « faible » est en fait la droite $\tau = 0$ et elle est donc convergente. L'holonomie de la séparatrice forte est conjuguée à $z \mapsto z/(z-1)$ et donc la forme se redresse, moyennant une transformation analogue à la précédente, sur la forme normale $td\widetilde{y} - \widetilde{y}^2 dt = 0$. Cette dernière a une intégrale première $\widetilde{y}\exp(1/t)$ et, sur $\{\widetilde{y} = \widetilde{y}_0\}$, le cercle $\Re(1/t) = c_0$ est invariant par l'holonomie globale. De cette sorte, $\mathbf{P}\mathscr{L}$ est donné, dans un voisinage de la singularité, par $\Re(\bar{y}_0 y \exp[1/t]) = c_0|y_0|^2$.

On peut décrire globalement le feuilletage sur $\mathbf{P}\Xi$. Soit $\mathrm{U} \subset \mathbf{CP}^1$ et posons

$$\Sigma_{\mathrm{U}} = \left\{(z, w) \in (\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1) \setminus \Delta \,|\, w \in \mathrm{U},\ z \in \mathscr{H}_0\right\}. \tag{13}$$

Puisque Ξ est donné par $\Gamma\backslash\rho_0^{-1}(\mathscr{H}_0)$, le feuilletage $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ sur $\mathbf{P}\Xi$ peut être obtenu de la façon suivante : dans l'ouvert $\Sigma_{\mathbf{CP}^1}$ on a deux feuilletages qui sont partout transverses : ceux donnés, respectivement, par les surfaces de niveau de z et w. Tous les deux sont invariants par l'action à gauche de Γ. Au quotient on obtient naturellement les feuilletages $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}}$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ (respectivement). On peut décomposer ce dernier dans ses « composantes » de Fatou et Julia :

– Dans l'ouvert $\mathbf{P}\mathrm{Int}_{\mathscr{L}}$, donné par $\Sigma_{\mathscr{H}'}$, le feuilletage $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ a l'intégrale première $\rho_\infty^\Gamma : \mathbf{P}\mathrm{Int}_{\mathscr{L}} \to \Gamma\backslash\mathscr{H}'$, donnée par la projection sur le deuxième facteur. L'espace de feuilles de $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ sur $\mathbf{P}\mathrm{Int}_{\mathscr{L}}$ est $\mathbf{CP}^1$. Les feuilles avec holonomie sont celles qui proviennent des points dans $\mathscr{H}' - \mathscr{H}_0'$. Leur nombre coïncide avec le nombre de générateurs du groupe triangulaire associé à H qui ne sont ni paraboliques ni triviaux.
– L'ensemble $\mathbf{P}\mathscr{L}$ est donné par le quotient de $\Sigma_{\partial\mathscr{H}}$. Remarquons que dans $\mathscr{L}$ une orbite du champ g n'intersecte $\mathrm{G}_{\mathscr{H}}$ (le groupe qui préserve $\mathscr{H}$) qu'une seule fois. La projection $\pi|_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to \mathbf{P}\mathscr{L}$ est donc injective en restriction à $\mathrm{G}_{\mathscr{H}} \subset \mathscr{L}$. Pourtant, le feuilletage $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ sur $\mathbf{P}\mathscr{L}$ n'est pas l'image du feuilletage de h^+ sur $\mathrm{G}_{\mathscr{H}}$, puisque une orbite de H n'intersecte $\mathscr{G}_{\mathscr{H}}$ que sur une orbite réelle.
– La situation est différente dans l'ouvert qui constitue le complémentaire de ces deux ensembles. Ceci est dû au fait que $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ possède deux sections transverses de nature très différente. D'une part, on a une section provenant de $\Sigma_{\mathscr{H}}$ avec $z = z_0$. Cette transversale coupe toutes les feuilles de $\mathbf{P}\mathrm{Ext}_{\mathscr{L}}$ mais ne rencontre pas les trois droites du complémentaire de $\mathbf{P}\Xi$. Le quotient de cette section par le feuilletage est l'intégrale première donnée localement par ρ_∞^Γ, la projection sur le deuxième facteur de $\Sigma_{\mathscr{H}}$. L'espace des feuilles qui intersectent cette section est $\Gamma\backslash\mathscr{H} \approx \mathbf{CP}^1$. On a trois points marqués, en correspondance avec les feuilles avec holonomie, qui proviennent du complémentaire de $\mathscr{H}_0$. D'autre part, sur $\widetilde{\mathbf{CP}}^2$

on a une section provenant de l'éclatement de la singularité dicritique. Les feuilles qui traversent cette section sont exactement celles de $\mathbf{P}\mathscr{B}$. L'espace des feuilles qui intersectent cette section est $\mathbf{CP}^1$ et cette section a trois points marqués, provenant des feuilles communes de $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}}$. De cette sorte on sait exactement quelles sont les feuilles qui ne s'accumulent pas sur la singularité dicritique : les feuilles de $\mathrm{Int}\mathscr{L}$, celles de $\mathscr{L}$ et les feuilles (en nombre fini) de Ext qui ont de l'holonomie. L'espace de feuilles est une variété non-Hausdorff avec autant de points doubles que de générateurs non-paraboliques du groupe triangulaire correspondant.

Dans l'ouvert $\mathbf{P}\mathscr{B} \subset \mathbf{CP}^2$ on a l'involution $\sigma : \mathbf{P}\mathscr{B} \to \mathbf{P}\mathscr{B}$ qui permute les feuilletages $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}\big|_{\mathbf{P}\mathscr{B}}$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}}\big|_{\mathbf{P}\mathscr{B}}$. Chacun de ces feuilletages est naturellement muni d'une structure affine le long des feuilles (induite par le champ de vecteurs correspondant). La classe projective de cette structure affine induit une structure transversalement projective sur l'autre feuilletage. L'involution permute les deux feuilletages en préservant la structure affine le long des feuilles. Cette involution a (si $m_i^2 \neq \infty$) quatre points fixes à l'intérieur de $\mathscr{B}$. Si le groupe Γ est fini alors cette involution se prolonge en une involution birationnelle de $\mathbf{CP}^2$. Cette involution est celle de Cremona quand le groupe est trivial.

5. Complétions des algèbres d'Halphen

On construit maintenant les variétés annoncés dans le Théorème B : Les actions locales associées aux algèbres d'Halphen sont en fait des restrictions des actions globales (ce qui n'est pas, à priori, garanti). En vertu des résultats de la dernière section, les cas les plus intéressants sont ceux où les groupes triangulaires ont des éléments paraboliques.

On commence avec le lemme de collage suivant :

Lemme **1.** — *Soient* M_1 *et* M_2 *deux variétés. Considérons deux ouverts* $\mathrm{N}_i \subset \mathrm{M}_i$. *Soit* $f : \mathrm{N}_1 \to \mathrm{N}_2$ *un biholomorphisme. L'espace obtenu en recollant* M_1 *et* M_2 *le long de* N_1 *et* N_2 *suivant* f *est une variété Hausdorff si et seulement si pour toute suite de points* $\{p_i\} \subset \mathrm{N}_1$ *telle que* $\lim_{i\to\infty} p_i \in \partial\mathrm{N}_1$, *la suite* $f(p_i)$ *quitte tout compact de* M_2 *et pour toute suite de points* $\{p_i\} \subset \mathrm{N}_2$ *telle que* $\lim_{i\to\infty} p_i \in \partial\mathrm{N}_2$, *la suite* $f^{-1}(p_i)$ *quitte tout compact de* M_1.

Preuve. — L'espace construit est naturellement une variété (non-Hausdorff) où les cartes au voisinage d'un point sont les cartes de M_1 et/ou M_2. Soit $q \in \mathrm{M}_1$ tel que la classe de q dans le collage ne soit pas séparée. Alors il existe une suite de points $\{p_i\} \subset \mathrm{N}_1$ telle que $\lim_{i\to\infty} p_i = q$ mais telle que $\lim_{i\to\infty} f(p_i)$ existe sans être $f(q)$ (en particulier $q \in \partial\mathrm{N}_1$). Réciproquement, l'existence d'une telle suite implique l'existence d'un point non-séparé pour le collage. $\square$

On commence la construction de nos variétés :

Premier pas. — Considérons l'action locale maximale sur $\mathbf{C}^3$ induite par les champs E, Z et un champ d'Halphen semi-complet $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Considérons deux copies de $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{C}^3_0$ et $\mathbf{C}^3_1$, et deux ouverts $\mathscr{B}_i \subset \mathbf{C}^3_i$. Considérons l'application $\sigma : \mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}_1$. La nature des domaines de définition de l'action et la Remarque 1 garantissent, à travers le lemme précédent, que la variété qui résulte du collage est une variété Hausdorff. Elle sera notée $M^\dagger(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Cette variété a une algèbre de Lie de champs de vecteurs holomorphes, donnée par les champs $X^\dagger$, obtenus par le collage de $(\mathbf{C}^3_0, X)$ et $(\mathbf{C}^3_1, \sigma_* X)$ pour tout $X \in \Psi(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$. Le champ $E^\dagger$ est complet. Les solutions des champs $H^\dagger$ et $Z^\dagger$ avec conditions initiales dans $\mathscr{B}$ sont définies pour tout temps. On a une involution holomorphe $\sigma^\dagger : M^\dagger \to M^\dagger$ donnée par σ sur les deux copies de $\mathscr{B}$ et par la permutation des deux copies de $\mathbf{C}^3$ ailleurs. À partir de cette involution on peut expliciter l'action locale sur $M^\dagger$. Elle est définie sur l'ouvert $\mathscr{U}^\dagger$ donné par le collage de $\mathscr{U}$ avec l'ouvert $\mathscr{U}' = \{(p, \sigma g \sigma); (p, g) \in \mathscr{U}\}$ via la fonction $f(p, g) = (\sigma p, \sigma g \sigma)$. Ce collage est une variété Hausdorff qui se plonge naturellement dans $M^\dagger \times PSL_2(\mathbf{C})$. L'action $\Phi^\dagger : \mathscr{U}^\dagger \to M^\dagger$ y est définie par

$$\Phi^\dagger(p, A) = \begin{cases} \Phi(p, A) \sqcup \sigma^\dagger \Phi(\sigma p, \sigma A \sigma), & \text{si } p \in \mathbf{C}^3_0 \ ; \\ \Phi(p, \sigma A \sigma) \sqcup \sigma^\dagger \Phi(\sigma p, A), & \text{si } p \in \mathbf{C}^3_1 \end{cases}$$

(où $f_1 \sqcup f_2$ est la fonction qui prolonge les fonctions f_1 et f_2, qui coïncident dans l'intersection de leurs domaines de définition).

Dans $M^\dagger$ on a les orbites suivantes pour l'action :

1. Une courbe, isomorphe à $\mathbf{CP}^1$, obtenue par le collage de ℓ avec $\sigma\ell$. L'action est globalement définie en restriction à cette courbe.
2. Trois surfaces lisses invariantes qui s'intersectent le long de $\ell^\dagger$. Les surfaces correspondantes à des générateurs d'ordre fini du groupe triangulaire associé s'identifient de façon équivariante à l'ouvert de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ qui est le complémentaire des points $(0, \infty)$ et $(\infty, 0)$. Le domaine de définition de l'action $\Phi^\dagger$ est le complémentaire dans $PSL_2(\mathbf{C})$ de deux courbes, orbites du groupe à un paramètre géodésique. Les surfaces qui correspondent à des générateurs paraboliques s'identifient de façon équivariante à $T\mathbf{CP}^1$. L'action y est globalement définie.
3. Une orbite ouverte qui s'identifie à l'ouvert

$$\Gamma \backslash \{A \in PSL_2(\mathbf{C}); A(0) \in \mathscr{H}_0 \ \text{ ou } \ A(\infty) \in \mathscr{H}_0\}.$$

Deuxième pas. — Sur la variété $M^\dagger$ on a une action locale de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ donnée par l'action de $\eta = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbf{C})$ à travers l'action $\Phi^\dagger$. Cet élément est d'ordre 2 et commute avec σ. On peut recopier les arguments du premier pas en remplaçant $\mathbf{C}^3$ par $\mathrm{M}^\dagger$ et σ par η pour obtenir une nouvelle variété $\mathrm{M}^\ddagger$, un ouvert $\mathscr{U}^\ddagger$ et une action locale maximale $\Phi^\ddagger : \mathscr{U}^\ddagger \to \mathrm{M}^\ddagger$. Cette nouvelle action est globale en restriction aux orbites de dimension 1 et 2, car l'image de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ sous η et σ recouvre $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$. Les surfaces qui correspondent à des générateurs d'ordre fini deviennent compactes et sont contenues à l'intérieur de la nouvelle variété. L'orbite ouverte s'identifie de façon équivariante à l'ouvert

$$\Gamma\backslash\{\mathrm{A} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}); \mathrm{A}(\{0, 1, \infty, -1\}) \cap \mathscr{H}_0 \neq \emptyset\}.$$

Troisième et dernier pas. — Prenons une identification de l'orbite ouverte de $\mathrm{M}^\ddagger$ avec un ouvert de $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et recollons ces deux variétés à l'aide de cette identification. Une fois de plus, le lemme de collage nous garantit que le résultat est une variété Hausdorff, qui sera notée $\mathrm{M}_1(m_1, m_2, m_3)$ et qui est munie d'une action globale de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. On a la suite d'immersions équivariantes

$$\mathbf{C}_0^3 \hookrightarrow \mathrm{M}_0^\dagger \hookrightarrow \mathrm{M}^\ddagger \hookrightarrow \mathrm{M}(m_1, m_2, m_3).$$

L'action locale sur $\mathbf{C}^3$ associée au champ d'Halphen $\mathrm{H}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est la restriction de l'action globale sur $\mathrm{M}_1(m_1, m_2, m_3)$. Ceci prouve le Théorème B.

6. Algèbres uniformes au voisinage d'un point fixé par un tore multiplicatif

Dans une variété de dimension 3, le stabilisateur d'un point sous une action holomorphe locale maximale de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ qui n'est pas localement libre contient forcément des sous-groupes à un paramètre. Or, à conjugaison près, ce groupe n'a que deux tels sous-groupes, le groupe Φ_{h^+} et le groupe Φ_g. On dira qu'un sous-groupe à un paramètre est un *sous-groupe unipotent* s'il est conjugué au premier et un *tore multiplicatif* s'il est conjugué au deuxième. À conjugaison près, il n'existe que trois sous-groupes de Lie complexes connexes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ qui contiennent un tore multiplicatif :

– le groupe tout entier,
– le groupe affine et
– le tore multiplicatif.

Le but de cette section est de donner des formes normales pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur une variété au voisinage d'un point fixé par l'un de ces sous-groupes. Pour le premier cas (une action avec des points fixes), on montrera qu'une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur une variété connexe ne peut pas avoir simultanément un point fixe et une orbite de dimension 3. Dans le deuxième, on prouvera le Théorème C (qui décrit les actions au voisinage des orbites unidimensionnelles). Finalement, la proposition suivante tiendra compte du troisième cas.

Proposition **8.** — *Soit* M *une variété de dimension* 3 *munie d'une action locale maximale de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. *Soit* p *un point dont le stabilisateur est de dimension* 1 *et contient un tore multiplicatif. Si* p *est dans l'adhérence des points où l'action est localement libre alors l'algèbre qui engendre l'action est, dans des coordonnées convenables centrées au point* p *et pour un certain* $\lambda \in \mathbf{Z}/2$, *donnée par l'algèbre*

$$\mathsf{S}(\lambda) = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - z_3\frac{\partial}{\partial z_3}, z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + 2\lambda z_1 z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + (1-2z_1z_3)\frac{\partial}{\partial z_3} \right\rangle. \tag{14}$$

La preuve de ces résultats occupera cette section. Traitons tout d'abord les actions locales ayant des points fixes (où le stabilisateur est le groupe entier). Considérons une représentation injective $\Psi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{X}(\mathrm{B})$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de champs de vecteurs de la boule unité de $\mathbf{C}^3$. Si pour tout $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ $\Psi(x)(0) = 0$, alors l'origine est un point fixe de l'action et l'on peut appliquer le théorème de Kushnirenko, qui affirme que l'action est, au voisinage de l'origine, holomorphiquement conjuguée à une action linéaire et donc donnée par une représentation linéaire de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ ([29], voir aussi [6]). La représentation induite par Ψ se décompose en une somme directe de représentations irréductibles [14]. L'inexistence de telles représentations en dimension 1 implique que cette représentation linéaire est ou bien la représentation adjointe (la seule représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ en dimension 3), l'action sur $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}$ qui est linéaire dans le premier facteur et triviale dans le deuxième, ou l'action triviale sur $\mathbf{C}^3$. Puisque l'action adjointe préserve une forme quadratique non-dégénérée, l'orbite générique de l'action est, dans les deux premiers cas, de dimension 2 et de dimension 0 dans le troisième. En particulier, une action holomorphe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur une variété de dimension trois (connexe) ne peut pas avoir simultanément une orbite ouverte et un point fixe. En l'absence de points fixes on confondra les expressions *orbite unidimensionelle* et *courbe invariante.*

Considérons une action holomorphe locale de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^3$ associée à une représentation $\Psi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{X}(\mathrm{B})$ telle que $\Psi(g)(0) = 0$. Remarquons que le sous-groupe à un paramètre engendré par g est $4i\pi$-périodique. Ceci impose des très fortes restrictions pour les actions locales, car le champ de vecteurs $\Psi(g)$ ne doit pas seulement être semi-complet mais doit être uniforme par rapport à $\mathbf{C}/4\pi i\mathbf{Z}$ (tout en fixant l'origine). Puisque l'on a écarté de notre étude les actions ayant des points fixes, on supposera, quitte à précomposer Ψ par un automorphisme de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, que $\Psi(h^-)(0) \neq 0$. Considérons le lemme suivant. Une preuve détaillée se trouve dans [16].

Lemme **2.** — *Soient* L *et* Y *des champs de vecteurs dans un voisinage de* $0 \in \mathbf{C}^n$ *tels que* $Y(0) \neq 0$, $L(0) = 0$ *et* $[L, Y] = -Y$. *Soit* $\mu \in \mathbf{N}$. *Si* L *est semi-complet dans un voisinage de l'origine et ses solutions sont* $2i\pi\mu$*-périodiques alors, par un changement des coordonnées qui fixe l'origine, on peut ramener simultanément* Y *sur* $\partial/\partial z_1$ *et* L *sur un champ de la forme* $z_1\partial/\partial z_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \partial/\partial z_i$ *avec* $\lambda_i \in \mathbf{Z}/\mu$.

Esquisse de preuve. — On peut supposer, sans perte de généralité, que $Y = \partial/\partial z_1$. Le champ L est nécessairement de la forme $z_1\partial/\partial z_1 + \sum_{i=1}^n f_i(z_2, ..., z_n)\partial/\partial z_i$. Le champ $L^\flat = \sum_{i=2}^n f_i \partial/\partial z_i$, image de L sous la projection sur l'hyperplan $\{z_1 = 0\}$ (sur l'espace des orbites de Y), est uniforme par rapport à $\mathbf{C}/2i\pi\mu\mathbf{Z}$. La restriction de l'action au sous-groupe de Lie réel compact $i\mathbf{R}/2i\pi\mu\mathbf{Z}$ donne une action par biholomorphismes fixant l'origine de $\mathbf{C}^{n-1}$. D'après le Théorème de Bochner-Cartan [6], cette action est holomorphiquement linéarisable. Il existe donc un biholomorphisme $F = (F_2, ..., F_n)$ de $(\mathbf{C}^{n-1}, 0)$ qui redresse $L^\flat$ sur un champ de vecteurs holomorphe dont le flot imaginaire est linéaire et $2\mu\pi$-périodique, c'est-à-dire, sur un champ de la forme $\sum \lambda_i z_i \partial/\partial z_i$ avec $\mu\lambda_i \in \mathbf{Z}$. Le biholomorphisme $(z_1, F_2, ..., F_n)$ préserve le champ $\partial/\partial z_1$ et redresse L sur un champ de la forme $[z_1 + h(z_2, ..., z_n)]\partial/\partial z_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \partial/\partial z_i$. Moyennant un changement de coordonnées de la forme $(z_1, z_2, ..., z_n) \mapsto (z_1 + g(z_2, ..., z_n), z_2, ..., z_n)$, on peut supposer que de développement de Taylor de h n'a que des monômes résonants, des monômes $z_2^{p_2} \cdots z_n^{p_n}$ tels que $\sum_{p=2}^n p_i\lambda_i = 1$. Ces monômes sont la seule obstruction pour que les solutions de L soient périodiques, et doivent s'annuler. □

Soit $L(\lambda_2, ..., \lambda_n)$ le champ de vecteurs dans $\mathbf{C}^n$ donné par $z_1\partial/\partial z_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \partial/\partial z_i$. Sous une représentation $\Psi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{X}(\mathbf{C}^n, 0)$ dont l'image est uniforme dans un voisinage de l'origine on peut supposer, d'après le lemme ci-dessus, que $\Psi(h^-) = \partial/\partial z_1$ et $\Psi(g) = L(\lambda_2, ..., \lambda_n)$ pour $(\lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbf{Z}/2)^{n-1}$. On notera $\mathfrak{aff}(\lambda_2, ..., \lambda_n)$ l'algèbre engendrée par ces deux champs. Dans ces coordonnées, l'image de h^+ sous Ψ est un champ de vecteurs X tel que $[\partial/\partial z_1, X] = 2L$ et $[L, X] = X$. On dira que X *étend l'algèbre* $\mathfrak{aff}(\lambda_2, ..., \lambda_n)$. La condition $[L, X] = X$ affirme que X est un champ quasi-homogène pour L. D'après l'égalité

$$\left[\sum_i \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, z_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n} \frac{\partial}{\partial z_k}\right] = \left(\sum_i p_i\lambda_i - \lambda_k\right) z_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n} \frac{\partial}{\partial z_k}, \tag{15}$$

le champ de vecteurs monomial $z_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n}\partial/\partial z_k$ est un vecteur propre de l'application linéaire $\left[\sum \lambda_i z_i \partial/\partial z_i, \cdot\right]$ associé à la valeur propre $\left(\sum_i p_i\lambda_i - \lambda_k\right)$. On dira que le champ de vecteurs monomial $z_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n}\partial/\partial z_k$ est un *monôme fixe* de $\sum \lambda_i z_i \partial/\partial z_i$ si $\sum_i p_i\lambda_i - \lambda_k = 1$. Tous les monômes qui figurent dans l'expression d'un champ qui étend l'algèbre sont des monômes fixes. On peut dire aussi que $[L, \cdot]$ est une antidérivation si l'on donne aux variables z_1, z_2, ..., z_n les poids $1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Les champs X cherchés forment un espace affine au-dessus des champs qui commutent avec $\partial/\partial z_1$. Le champ

$$X_0(\lambda_2, ..., \lambda_n) = z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2 z_1 \sum_{i=2}^{n} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

est le champ le plus simple qui étend l'algèbre. Si $X = X_0 + X_1$ en est un autre, alors X_1 satisfait les relations linéaires $[\partial/\partial z_1, X_1] = 0$ et $[L, X_1] = X_1$, c'est-à-dire, X_1 est une série convergente de monômes fixes de L qui ne contiennent pas la variable z_1. Dans les coordonnées choisies, l'action a une forme particulièrement simple : si $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ est une solution de X avec condition initiale p alors la fonction Φ définie dans un voisinage de l'identité de $SL_2(\mathbf{C})$ donnée par

$$\Phi_1 = \frac{1}{d^2}\phi_1\left(\frac{b}{d}\right) - \frac{c}{ct+d}, \qquad \Phi_i = \frac{1}{d^{2\lambda_i}}\phi_i\left(\frac{b}{d}\right) \text{ pour } i \geqslant 2, \tag{16}$$

est une solution de Ψ avec condition initiale p.

En dimension 1, la seule algèbre de Lie de champs de vecteurs isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, celle engendrée par $\partial/\partial z$, $z\partial/\partial z$ et $z^2\partial/\partial z$, est du type que l'on vient de décrire. Dans ce cas, l'action locale à droite est donnée par

$$\Phi\left(z, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{az-c}{-bz+d}, \tag{17}$$

qui est la restriction à une carte affine de d'une action de $PSL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{CP}^1$. En dimension 2, l'action locale donnée par l'extension $X_0(\lambda)$ de $\mathfrak{aff}(\lambda)$ est

$$\Phi\left((z_1, z_2), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{az_1 - c}{-bz_1 + d}, \frac{z_2}{[-bz_1+d]^{2\lambda}}\right). \tag{18}$$

Il s'agit d'une restriction de l'action globale sur le fibré $O(2\lambda) \to \mathbf{CP}^1$ induite par l'action (17) sur $\mathbf{CP}^1$, qui se factorise à travers $PSL_2(\mathbf{C})$ si et seulement $\lambda \in \mathbf{Z}$. Le stabilisateur du point $(0, 1)$ est le groupe donné par $c = 0$ et $d^{2\lambda} = 1$. L'action est « intégrable » au sens où tous les champs qui l'engendrent commutent avec le champ $z_2\partial/\partial z_2$. Ces actions locales maximales peuvent se globaliser sur des variétés compactes. Si $\lambda \neq 0$ alors en recollant quatre copies de $\mathbf{C}^2$ selon le diagramme

$$\begin{tikzcd} (z_1, z_2) \arrow[r, "{(-z_1^{-1}, z_1^{-2\lambda} z_2)}"] \arrow[d, "{(z_1, z_2^{-1})}"'] & (w_1, w_2) \arrow[d, "{(w_1, w_2^{-1})}"] \\ (Z_1, Z_2) \arrow[r, "{(-Z_1^{-1}, Z_1^{2\lambda} Z_2)}"] & (W_1, W_2) \end{tikzcd} \tag{19}$$

on obtient une compactification de $\mathbf{C}^2$ sur laquelle les champs $\partial/\partial z_1$, $L(\lambda)$ et $X_0(\lambda)$ se compactifient holomorphiquement. La variété qui en résulte est la surface de Hirzebruch F_n pour $n = |2\lambda|$. Il s'agit d'une fibration rationnelle (équivariante) de base rationnelle, compactification équivariante du fibré $O(n)$, obtenue en ajoutant une « section à l'infini » [3]. On a deux courbes invariantes : la première, provenante de la section nulle, donnée par $\{z_2 = 0\}$, d'auto-intersection 2λ ; la deuxième, la section à l'infini, donnée par $\{Z_2 = 0\}$, d'auto-intersection -2λ. L'action de $SL_2(\mathbf{C})$ sur le produit d'une courbe quelconque et $\mathbf{CP}^1$ (triviale sur le premier facteur) est localement donné par l'extension X_0 de $\mathfrak{aff}(0)$.

Le champ $X_0(\lambda)$ est le seul à étendre $\mathfrak{aff}(\lambda)$ si $\lambda \notin \{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Dans les autres cas :

- Le champ le plus général qui étend $\mathfrak{aff}(-1)$ est $X_0(-1) + \alpha\partial/\partial z_2$ (en dilatant la variable z_2 on peut rendre $\alpha = 1$ si $\alpha \neq 0$). Dans ce cas, le stabilisateur de l'origine est le groupe à un paramètre $\exp(g)$ et l'action est localement libre. Il s'agit du modèle local pour l'action de $SL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ dans le complémentaire de la diagonale.
- Les champs qui étendent $\mathfrak{aff}(\frac{1}{2})$ sont ceux de la forme $X_0(\frac{1}{2}) + \alpha_1 z_2^4\partial/\partial z_1 + \alpha_2 z_2^3\partial/\partial z_2$. Dans les coordonnées $(w_1, w_2) = (z_1 + \rho z_2, z_2)$, pour une racine de $\rho^2 - 2\alpha_2\rho - \alpha_1$, les trois champs se redressent sur $\partial/\partial w_1$, $w_1\partial/\partial w_1 + \frac{1}{2}w_2\partial/\partial w_2$ et $w_1^2\partial/\partial w_1 + w_2(w_1 + \alpha_2' w_2^2)\partial/\partial w_2$. Ce dernier champ n'est semi-complet que si $\alpha_2' = 0$, c'est à dire, si l'extension est équivalente à celle donnée par $X_0(\frac{1}{2})$.
- Les champs qui étendent $\mathfrak{aff}(1)$ sont de la forme $X_0(1) + \alpha_1 z_2^2\partial/\partial z_1 + \alpha_2 z_2^2\partial/\partial z_2$. Si le discriminant du polynôme $\rho^2 - \alpha_2\rho - \alpha_1$ n'est pas nul et si l'on note ρ_1 et ρ_2 les racines de ce dernier, alors dans les variables $w_i = z_1 + \rho_i z_2$, les trois champs se redressent respectivement sur

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial w_i}, \quad \sum_i w_i\frac{\partial}{\partial w_i}, \quad \sum_i w_i^2\frac{\partial}{\partial w_i}. \tag{20}$$

  L'action locale associée est l'action diagonale de $PSL_2(\mathbf{C})$ provenant de (17), qui laisse invariante la diagonale. Cette action se compactifie sur $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$. Si le discriminant s'annule, alors dans les variables $w_1 = z_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 z_2$ et $w_2 = z_2$, les champs se redressent sur $\partial/\partial w_1$, $L(1)$ et $X_0(1)$.
- Finalement, les champs qui étendent $\mathfrak{aff}(2)$ sont ceux de la forme $X_0(2) + \alpha z_2\partial/\partial z_1$ (et l'on peut supposer $\alpha = 1$ si $\alpha \neq 0$). Cette algèbre est obtenue en prenant le quotient de l'algèbre (20) sous l'involution qui échange w_1 et w_2 (qui commute avec l'action) et qui définit $\mathbf{C}^2$ comme revêtement à deux feuillets ramifié le long de la diagonale sur lui même. On obtient l'algèbre dans les coordonnées $z_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ et $z_2 = \frac{1}{4}(w_1 - w_2)^2$. Cette action se globalise dans l'action de $PSL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathrm{Sym}^2\mathbf{CP}^1 = \mathbf{CP}^2$

au voisinage de la conique invariante, qui est aussi l'action projective de $\mathrm{PSO}_3(\mathbf{C}) \approx \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathrm{Sym}^2\mathbf{CP}^2$.

Ceci conclut la classification en dimension 2. À l'exception de $\mathfrak{aff}(\frac{1}{2})$, les algèbres obtenues en étendant $\mathfrak{aff}(\lambda)$ sont uniformes. Au voisinage de l'origine, l'action a une orbite de dimension 2 sauf dans l'extension $X_0(0)$ de $\mathfrak{aff}(0)$, où toutes les orbites sont de dimension 1. Toutes les algèbres uniformes peuvent se globaliser sur des surfaces compactes.

On commence notre étude des algèbres uniformes en dimension trois. Soit X un champ de vecteurs holomorphe défini dans U, voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^3$ qui étend une algèbre $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$. Notons $\Psi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{X}(\mathrm{U})$ le morphisme d'algèbres de Lie correspondant. Soit $\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ le générateur du centre de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. D'après notre preuve de la formule d'invariance d'Halphen (Proposition 2), l'action de ν est, dans les coordonnées choisies et indépendamment de X, donnée par

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \big(z_1, (-1)^{2\lambda_2} z_2, (-1)^{2\lambda_3} z_3\big).$$

Cette action est triviale si $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ pour tout i et elle est effective autrement. Notons $\pi : (\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathrm{S}, \overline{0})$ le quotient de $\mathbf{C}^3$ sous cette involution (S est une variété si $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ pour un certain i et elle est un espace analytique autrement). Les champs de Ψ sont invariants sous cette involution et sont bien définis dans S, où ils définissent une algèbre de Lie $\pi_*\Psi$. Si Ψ est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$-uniforme dans un voisinage de l'origine alors $\pi_*\Psi$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-uniforme dans un voisinage de $\overline{0}$. Les flots de $\pi_*\partial/\partial z_1$ et de $\pi_*\mathrm{L}$ sont complets et le dernier est $2i\pi$-périodique. Soit $\Xi \subset \mathrm{U}$ l'ouvert où le rang de l'algèbre de Lie est trois, que l'on peut supposer, en élargissant le domaine de définition de X, saturé par l'action de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$. Dans l'ouvert $\pi(\Xi)$, le champ $\pi_*\mathrm{X}$ induit une structure projective sur l'espace des feuilles de $\pi_*\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ qui rencontrent $\pi(\Xi)$. Par la Proposition 4, l'algèbre de Lie de champs de vecteurs dans $\pi(\Xi)$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-uniforme si et seulement si cette structure projective est uniformisable. Puisque l'action de ν dans $\mathbf{C}^3$ préserve toutes les orbites de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$, on arrive au critère suivant : *pour que l'algèbre de Lie dans* Ξ *soit uniforme il est nécessaire que la structure projective que* X *induit sur l'espace de feuilles de* $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ *soit uniformisable.*

Cette condition n'est pourtant pas suffisante. Considérons une action locale maximale localement libre de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur une variété M et supposons que l'action du centre est effective et définie pour tout point. Soit $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ le quotient sous cette action. Soit $p \in \mathrm{M}$ et soit p' son image dans M′. Ce dernier se trouve muni d'une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Soit $s : \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ l'inclusion du stabilisateur de p' pour cette action. Le stabilisateur de p est alors un relevé $\widetilde{s} : \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ tel que $s = \Pi \circ \widetilde{s}$. Dans notre cas, si l'algèbre $\pi_*\Psi$ est uniforme et Γ est le stabilisateur (local) d'un point de Ξ, *il faut, pour que l'algèbre* Ψ *soit uniforme, qu'il existe un relèvement de* Γ *dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Chaque élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ provient de deux éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ qui diffèrent par le facteur ν. Une obstruction au relèvement d'un groupe est donné par l'existence d'éléments de d'ordre 2. Un tel élément est conjugué à $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, dont les deux relèvements sont d'ordre 4. Cette obstruction est, pour les groupes discrets, la seule : un groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ a un relèvement si et seulement si aucun de ses éléments n'est d'ordre 2 (voir, par exemple [28]). Ce relèvement n'est pas unique. Par exemple, un groupe libre (discret) à n générateurs se relève de 2^n façons (on peut choisir les relèvements des générateurs au gré). Parfois, la géométrie de l'algèbre de Lie détermine l'existence un tel relèvement :

Proposition **9.** — *Soit* M *une variété munie d'une action locale maximale de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. *Soit* $q \in \mathrm{M}$ *un point fixé par un sous-groupe unipotent. Soit* Σ *l'orbite de* q, *invariante pour l'action avec multiplicité* $p+1$ *(dans un système quelconque des coordonnées, le déterminant d'une base de l'algèbre de champs de vecteurs qui engendrent l'action définit localement* Σ *avec multiplicité* $p+1$*). Supposons que cette action a une orbite ouverte au voisinage de* q. *Soit* f *une intégrale première locale pour l'action d'un conjugué du groupe affine qui est ramifié d'ordre* n *au voisinage de* Σ. *Si la monodromie de la structure projective dans l'espace où* f *prends des valeurs est d'ordre impair, alors, pour que le stabilisateur de l'action locale de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ *autour de* Σ *soit d'ordre impair il faut et il suffit que* $p \equiv n \mod 2$.

La preuve de cette proposition sera faite dans la section suivante.

Avec ceci en vue, on commence l'étude des algèbres en dimension 3. D'abord, il faut repérer les algèbres $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ qui admettent des extensions non-triviales. Pour que le champ $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_3)$ ait des monômes fixes de la forme $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_2$ (resp. $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_3$), il faut que $(p_2 - 1)\lambda_2 + p_3\lambda_3 = 1$ (resp. $p_2\lambda_2 + (p_3 - 1)\lambda_3 = 1$). L'existence de monômes fixes de ce type est nécessaire pour que le rang de $\partial/\partial z_1$, $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_2)$ et X soit trois dans un ouvert. On fera toujours cette hypothèse. Un monôme fixe de $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_3)$ de la forme $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_2$ (resp. $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_3$) donne un élément de $\mathrm{SL}_2(\frac{1}{2}\mathbf{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} q_2 & -\lambda_3 \\ q_3 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec $\{q_2, q_3\} \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$, en posant $q_2 = p_2 - 1$ et $q_3 = p_3$ (resp. $q_2 = p_2$ et $q_3 = p_3 - 1$). Tous les éléments de $\mathrm{SL}_2(\frac{1}{2}\mathbf{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} q_2 & -\lambda_3 \\ q_3 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\{q_2, q_3\} \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$ peuvent s'obtenir à partir d'un seul en multipliant à droite par des puissances de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} q_2 & -\lambda_3 \\ q_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 - \lambda_3\tau & -\lambda_3 \\ q_3 + \lambda_2\tau & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Pour λ_2 et λ_3 fixés, les couples $\{q_2, q_3\} \subset \{-1, 0, 1, \ldots\}$ qui apparaissent dans de telles matrices sont en nombre fini si $\lambda_2\lambda_3 > 0$, infini si $\lambda_2\lambda_3 \leqslant 0$. On dira qu'une extension de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$

est dans le *domaine de Poincaré* si $\lambda_2\lambda_3 > 0$, dans le *domaine de Siegel* si $\lambda_2\lambda_3 < 0$ et qu'elle est *dégénérée* si $\lambda_2\lambda_3 = 0$.

6.1. *Domaine de Poincaré.* — L'extension d'une algèbre $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ dans le domaine de Poincaré au voisinage d'une orbite unidimensionnelle est

$$\left[z_1^2 + P_1(z_2, z_3)\right] \frac{\partial}{\partial z_1} + [2\lambda_2 z_1 z_2 + P_2(z_2, z_3)] \frac{\partial}{\partial z_2} + [2\lambda_3 z_1 z_3 + P_3(z_2, z_3)] \frac{\partial}{\partial z_3}$$

avec P_i des polynômes qui s'annulent à l'origine. Posons $\beta = \partial P_2/\partial z_3|_0$. En éclatant la courbe $\{z_2 = 0, z_3 = 0\}$ on obtient, dans la carte $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (z_1, z_2, z_3/z_2)$, l'algèbre engendrée par $\xi_1\partial/\partial\xi_1$, $\xi_1\partial/\partial\xi_1 + \lambda_2\xi_2\partial/\partial\xi_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\xi_3\partial/\partial\xi_3$ et

$$\left[\xi_1^2 + P_1(\xi_2, \xi_2\xi_3)\right] \frac{\partial}{\partial \xi_1} + [2\lambda_2\xi_1\xi_2 + P_2(\xi_2, \xi_2\xi_3)] \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \left[2(\lambda_3 - \lambda_2)\xi_1\xi_3 + \frac{1}{\xi_2}P_3(\xi_2, \xi_2\xi_3) - \frac{\xi_3}{\xi_2}P_2(\xi_2, \xi_2\xi_3)\right] \frac{\partial}{\partial \xi_3}.$$

Puisque $P_2(0,0) = 0$, ce champ est polynomial. La surface $\{\xi_2 = 0\}$, transformé strict de l'orbite unidimensionnelle, est invariante. Si l'on suppose $\lambda_2 < \lambda_3$ alors, en restriction à cette surface, on a l'algèbre engendrée par $\partial/\partial\xi_1$, $\xi_1\partial/\partial\xi_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\xi_3\partial/\partial\xi_3$ et

$$\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \left[2(\lambda_3 - \lambda_2)\xi_1\xi_3 - \beta\xi_3^2\right] \frac{\partial}{\partial \xi_3}.$$

Dans la carte du diviseur donnée par $(\zeta_1, \zeta_3) = (\xi_1, \xi_3^{-1})$, l'algèbre est engendrée par $\partial/\partial\zeta_1$, $\zeta_1\partial/\partial z_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\zeta_3\partial/\partial\zeta_3$ et

$$\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + [2(\lambda_2 - \lambda_3)\zeta_1\zeta_3 + \beta] \frac{\partial}{\partial \xi_3}.$$

On remarquera que β s'annule si $\lambda_3 \neq \lambda_2 + 1$. Si $\beta = 0$ alors en restriction au diviseur on a une algèbre uniforme (qui se compactifie sur une surface de Hirzebruch). Si $\beta \neq 0$ alors, sur le diviseur, l'algèbre est la restriction d'une algèbre qui se compactifie sur $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$. Dans tous les cas, la restriction de l'algèbre à un voisinage de la transformée stricte de l'origine est uniforme.

Définition **5.** — *Soit* M *une variété munie d'une action locale maximale à droite de* $SL_2(\mathbf{C})$. *Soit* C *une orbite unidimensionnelle pour l'action. La courbe est dite* non-réduite *s'il existe un système de coordonnées autour d'un point de* C *où l'action est engendrée par une algèbre dans le domaine de Poincaré. Elle est dite* réduite *autrement.*

On peut de la sorte éclater successivement les germes de courbes invariantes dans le domaine de Poincaré pour arriver à un diviseur où l'on ne trouve que des courbes invariantes réduites. Chez l'ensemble des algèbres qui modèlent les courbes non-réduites on trouve les exemples d'Halphen et leurs quotients par leurs symétries linéaires [16]. La classification de ces algèbres fera l'objet d'une prochaine publication [17].

Pour finir avec les algèbres de Lie de germes dans le domaine de Poincaré on étudie celles qui ne possèdent pas d'orbite unidimensionnelle (mais toujours dans l'adhérence d'une orbite ouverte). Ceci n'est possible que si l'un des λ_i (disons, λ_3) est -1. Le champ

$$\left[z_1^2 + \mathrm{P}_1(z_2, z_3)\right] \frac{\partial}{\partial z_1} + \left[2\lambda z_1 z_2 + \alpha z_3^{-\lambda-1}\right] \frac{\partial}{\partial z_2} + [-2z_1 z_3 + \beta] \frac{\partial}{\partial z_3}$$

avec $\alpha \in \mathbf{C}$, $\beta \in \mathbf{C}^*$ est l'extension la plus générale de $\mathfrak{aff}(\lambda, -1)$ pour $\lambda < 0$ (si $\lambda \notin \mathbf{Z}$ alors $\alpha = 0$). Le changement de coordonnées

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(z_1, z_2 + [\alpha\lambda^{-1}\beta^{-1}]z_3^{-\lambda}, \beta^{-1} z_3\right)$$

ramène l'algèbre sur l'algèbre $\mathsf{S}(\lambda)$ de la Proposition 8, et ceci prouve cette proposition pour les algèbres dans le domaine de Poincaré.

6.2. *Domaine de Siegel et algèbres dégénérées.* — Étudions maintenant les champs X qui étendent l'algèbre $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ dans les cas où $\lambda_2\lambda_3 \leqslant 0$. On supposera $\lambda_2 \geqslant 0$ et $\lambda_3 \leqslant 0$. Les algèbres ainsi obtenues sont, du point de vue dynamique, beaucoup plus simples que celles du domaine de Poincaré, puisque la feuille générique du feuilletage de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ ne s'accumule pas sur l'origine. Ceci implique, si l'algèbre est uniforme, que le stabilisateur (local) de l'orbite ouverte est cyclique. Néanmoins, du point de vue des formes normales, les champs qui étendent $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ sont beaucoup plus compliqués du fait que le champ $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_3)$ a une infinité de monômes fixes. On aura maintes fois recours au critère suivant, qui n'est énoncé que dans la généralité dont on aura besoin :

Proposition **10** *(Critère de Briot-Bouquet). — Considérons le système d'équations différentielles donné, pour* $i, \ldots, n$, *par*

$$t z_i' = f_i(z_1, \ldots, z_n; t).$$

Supposons qu'il existe $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{C}^n$ *tel que* f_i *est holomorphe au voisinage de* $(q; 0)$ *et s'y annule. Alors, pour que le système ait une solution holomorphe* $(z_1, \ldots, z_n)(t)$ *avec* $z_i(0) = q_i$, *il suffit que le spectre de la transformation linéaire* $\mathrm{J} = (\partial f_i/\partial z_j)|_{(q;0)}$ *n'ait pas des entiers supérieurs ou égales à* 2 *et que le vecteur* $\tau = (\partial f_1/\partial t, \ldots, \partial f_n/\partial t)|_{(q;0)}$ *soit dans l'image de* $\mathrm{J} - \mathrm{I}$.

On remarquera que la dernière condition est automatiquement satisfaite si J n'a pas 1 parmi ses valeurs propres ou si $\tau = 0$. Les hypothèses garantissent l'existence de solutions formelles ; le théorème établit leur convergence. On pourra consulter à ce sujet les traités de Ince [26, §12.6] et Forsyth [11, Part II, Vol. III, §187].

Soient $\lambda_2, \lambda_3 \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ avec $\lambda_2 \geqslant 0$ et $\lambda_3 \leqslant 0$. Si $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, leur plus grand diviseur commun, noté $(2\lambda_2, -2\lambda_3)$, est dans $\{1, 2\}$. Soit $j = 2/(2\lambda_2, -2\lambda_3)$. L'algèbre $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ a une intégrale première *holomorphe* donnée par $\omega(z_1, z_2, z_3) = z_3^{j\lambda_2} z_2^{-j\lambda_3}$. Les monômes fixes de $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_3)$ de la forme $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_2$ sont tous de la forme $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3} z_2^{-\tau\lambda_3} z_3^{\tau\lambda_2} \partial/\partial z_2$ pour un couple d'entiers (q_2, q_3), soumis à la relation $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$, et un entier τ. Les monômes fixes de $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_3)$ de la forme $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_3$ se construisent de façon analogue. Si $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ alors, si λ_2 et λ_3 sont entiers, $(\lambda_2, \lambda_3) = 1$ et ω sépare les orbites de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_2)$. Si $\lambda_i \notin \mathbf{Z}$, ω est encore une intégrale première primitive. Si $\lambda_2\lambda_3 = 0$, la relation $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$ force $(\lambda_2, \lambda_3) \in \{(0, -\frac{1}{2})(0, -1), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0)\}$ et l'intégrale première sépare encore les orbites de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$. Finalement, les monômes fixes de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ de la forme $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_1$ s'écrivent tous comme $z_2^{2q_2} z_3^{2q_3} z_2^{-\tau\lambda_3} z_3^{\tau\lambda_2} \partial/\partial z_1$ avec $\tau \in \mathbf{Z}$: pour un monôme fixe $z_2^{p_2} z_3^{p_3} \partial/\partial z_1$, on a $p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 = 2$. Il est de la forme cherchée avec $\tau = q_2 p_3 - q_3 p_2$. Le champ le plus général qui forme une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ avec $\partial/\partial z_1$ et $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_3)$ est donc le champ :

$$\mathrm{X} = \left[z_1^2 + z_2^{2q_2} z_3^{2q_3} f_1(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\left[2\lambda_2 z_1 + z_2^{q_2} z_3^{q_3} f_2(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\left[2\lambda_3 z_1 + z_2^{q_2} z_3^{q_3} f_3(\omega)\right]\frac{\partial}{\partial z_3}, \tag{21}$$

où f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions définies dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$, éventuellement méromorphes, mais de sorte que X soit holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^3$. Le déterminant des champs est $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3+1}(\lambda_2 f_3 - \lambda_3 f_2)$, qui sera supposé non-identiquement nul. Quitte à remplacer q_2 et q_3 respectivement par $q_2 - \lambda_3\tau_0$ et $q_3 + \lambda_2\tau_0$ pour un $\tau_0 \in \mathbf{Z}$ convenablement choisi, on supposera que $(\lambda_2 f_3 - \lambda_3 f_2)(0) \neq 0$. Puisque ce déterminant s'annule à l'origine de $\mathbf{C}^3$, $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3+1}$ est holomorphe et s'annule à l'origine, ce qui implique $q_i \geqslant -1$ et $q_2 + q_3 \geqslant -1$. Posons

$$\Delta = \lambda_2 f_3 - \lambda_3 f_2, \qquad \Upsilon = q_2 f_2 + q_3 f_3.$$

Soient η, ψ et ρ des fonctions méromorphes d'une variable définies dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$. Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z_1 + z_2^{q_2} z_3^{q_3} \psi(\omega), \\ \zeta_2 &= z_2 \rho^{j\lambda_2}(\omega) \exp[-q_3\eta(\omega)], \\ \zeta_3 &= z_3 \rho^{j\lambda_3}(\omega) \exp[+q_2\eta(\omega)]. \end{aligned} \tag{22}$$

Dans ces nouvelles variables le champ de vecteurs est donné par le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_1}{dt} &= \zeta_1^2 + \zeta_2^{2q_2}\zeta_3^{2q_3}\left\{\frac{f_1 + j\psi'\Delta\omega + \psi\Upsilon - \psi^2}{\rho^{2j}}\right\}\\
\frac{d\zeta_2}{dt} &= 2\lambda_2\zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^{q_2+1}\zeta_3^{q_3}\left\{\frac{1}{\rho^j}\left(f_2 - 2\lambda_2\psi + j\left[j\lambda_2\frac{\rho'}{\rho} - q_3\eta'\right]\Delta\omega\right)\right\}\\
\frac{d\zeta_3}{dt} &= 2\lambda_3\zeta_1\zeta_3 + \zeta_2^{q_2}\zeta_3^{q_3+1}\left\{\frac{1}{\rho^j}\left(f_3 - 2\lambda_3\psi + j\left[j\lambda_3\frac{\rho'}{\rho} + q_2\eta'\right]\Delta\omega\right)\right\},
\end{aligned} \tag{23}$$

comme le montre un calcul direct basé sur le fait que

$$\frac{d\omega}{dt} = j\omega z_2^{q_2} z_3^{q_3}\Delta(\omega). \tag{24}$$

Voyons comment, en choisissant les fonctions ψ, η et ρ convenablement, on peut, d'une part, rendre constantes les expressions entre crochets (qui ne font intervenir que des fonctions de ω) et, d'autre part, faire du changement de coordonnées un biholomorphisme à l'origine de $\mathbf{C}^3$. Il est nécessaire, pour que cette dernière condition soit satisfaite, que η soit holomorphe en 0, que ρ soit holomorphe et non-nulle en 0 et que $z_2^{q_2} z_3^{q_3}\psi(\omega)$ soit holomorphe et nulle à l'origine de $\mathbf{C}^3$. Les fonctions Δ et Υ sont transformées de la façon suivante (on note f' la dérivée de f par rapport à ω) :

$$\begin{aligned}
\Delta &\mapsto \left(\frac{1 + j\omega\eta'}{\rho^j}\right)\Delta,\\
\Upsilon &\mapsto \frac{1}{\rho^j}\left(\Upsilon - 2\psi + j^2\omega\Delta\frac{\rho'}{\rho}\right).
\end{aligned}$$

En prenant $\eta \equiv 0$, $\rho = \Delta^{\frac{1}{j}}$ et $\psi \equiv 0$, on rend $\Delta \equiv 1$ par un biholomorphisme (car Δ non identiquement nul au voisinage de 0). On sépare la preuve en deux cas :

Premier cas. — On suppose que $z_2^{q_2} z_3^{q_3}\Upsilon$ n'est pas une fonction holomorphe qui s'annule à l'origine. On prouve que ceci n'arrive que si $q_3 = -1$ et $f_3(0) \neq 0$:

1. Si $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, les fonctions $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3} f_2(\omega)$ et $z_2^{q_2} z_3^{q_3+1} f_3(\omega)$ sont holomorphes, puisque le champ de vecteurs X l'est. D'autre part, $\Delta \equiv 1$ et, puisque $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, les parties polaires de f_2 et f_3 ne diffèrent que par une constante multiplicative. Si $q_i \geqslant 0$, les parties polaires de $z_2^{q_2} z_3^{q_3} f_2$ et $z_2^{q_2} z_3^{q_3} f_3$ sont proportionnelles. La première a au plus un pôle en $\{z_2 = 0\}$ et la deuxième a au plus un pôle sur $\{z_3 = 0\}$. Les fonctions $z_2^{q_2} z_3^{q_3} f_2$ et $z_2^{q_2} z_3^{q_3} f_3$ sont

donc holomorphes, ce qui entraîne l'holomorphie de $z_2^{q_2} z_3^{q_3} \Upsilon$. Si $\kappa \in \mathbf{Z}$ est l'exposant le plus petit dans le développement de Laurent de Υ, alors, si $z_2^{q_2} z_3^{q_3} \Upsilon(0) \neq 0$, l'expression

$$z_2^{q_2} z_3^{q_3} \left(z_3^{j\lambda_2} z_2^{-j\lambda_3}\right)^{\kappa} = z_2^{q_2 - j\kappa\lambda_3} z_3^{q_3 + j\kappa\lambda_2}$$

est constante, c'est-à-dire les expressions $q_2 - j\kappa\lambda_3$ et $q_3 + j\kappa\lambda_2$ s'annulent simultanément, ce qui est incompatible avec l'identité $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$. On vient de démontrer que $z_2^{q_2} z_3^{q_3} \Upsilon$ est holomorphe et s'annule à l'origine. Si $q_3 = -1$, la relation $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$ implique $q_2\lambda_2 = \lambda_3 + 1$, d'où, ou bien $\lambda_3 = -1$ et $q_2 = 0$ ou bien $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dans le premier cas, Puisque $f_3(\omega) = z_2^{q_2} z_3^{q_3+1} f_3(\omega)$ est holomorphe et $\Upsilon = -f_3$, la fonction

$$z_2^{q_2} z_3^{q_3} \Upsilon = -z_3^{-1} \left[f_3(0) + c\left(z_2^{j} z_3^{j\lambda_2}\right)^1 + \cdots\right]$$

est holomorphe à l'origine si $f_3(0) = 0$ et, dans ce cas, elle s'y annule. Dans le deuxième, $\omega = z_2 z_3$, $z_2^{q_2} z_3^{q_3} \Upsilon = z_2 z_3^{-1}(f_2 - f_3)$. Puisque les parties polaires de f_2 et f_3 ne diffèrent que par une constante multiplicative et $z_2^{q_2} z_3^{q_3+1} f_3 = z_2 f_3$ est holomorphe, f_2 et f_3 sont holomorphes. Puisque $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3} f_2 = z_2^2 z_3^{-1} f_2$ est holomorphe, f_2 s'annule à l'origine et, pour avoir $(\lambda_2 f_3 - \lambda_3 f_2)(0) \neq 0$, il faut que $f_3(0) \neq 0$. Si $q_2 = -1$, la relation $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$ implique $-\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$, ce qui est impossible.

2. Si $\lambda_3 = 0$, alors $(q_2, \lambda_2) \in \{(1, 1), (2, \frac{1}{2})\}$. Dans les deux cas, $\omega = z_3$. On a $\Delta = \lambda_2 f_3$ (et donc f_3 ne s'annule pas à l'origine). Soit κ l'exposant le plus petit dans le développement de Laurent de f_2. Puisque $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3} f_2(z_3)$ est holomorphe, $\kappa + q_3 \geqslant 0$. On a

$$z_2^{q_2} z_3^{q_3} \Upsilon = z_2^{q_2}\left(q_2 c z_3^{q_3+\kappa} + \cdots\right) + z_2^{q_2}\left(q_3 z_3^{q_3} f_3(0) + \cdots\right).$$

   Cette expression a des pôles si et seulement si $q_3 = -1$ et $f_3(0) \neq 0$. Autrement, elle est holomorphe et s'annule à l'origine.

3. Si $\lambda_2 = 0$, alors $q_3 = -1$, $\lambda_3 = -1$ et $\omega = z_2$. On a $\Delta = f_2$. Puisque $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3} f_2(z_2)$ est holomorphe, ou bien $q_3 \geqslant 0$, ou bien $f_2 \equiv 0$ et l'on arrive à une contradiction.

Cette discussion réduit notre étude aux cas suivants :

1. Ou bien $q_2 = 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 = -1$ $(\omega = z_2^{j} z_3^{j\lambda_2})$;
2. ou bien $(\lambda_2, \lambda_3) = (\frac{1}{2}, 0)$, $q_2 = 2$ $(\omega = z_3)$;
3. ou bien $(\lambda_2, \lambda_3) = (1, 0)$, $q_2 = 1$ $(\omega = z_3)$;
4. ou bien $(\lambda_2, \lambda_3) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et $q_2 = 1$ $(\omega = z_2 z_3)$.

Dans tous les cas $q_3 = -1$ et, dans les trois derniers, $j\lambda_2 = 1$. Puisque $z_2^{2q_2} z_3^{2q_3} f_1$ est holomorphe, f_1 s'annule à l'origine, doublement si $j\lambda_2 = 1$. Par ailleurs, puisque $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3} f_2$ est holomorphe, f_2 s'annule à l'origine. Les équations qui, dans le système (22) rendent $f_1 \equiv 0$, $\Delta \equiv \lambda_2$ et $\Upsilon \equiv -1$ (et donc $f_2 \equiv 0$ et $f_3 \equiv 1$) sont équivalentes au système

$$\begin{aligned} \omega\eta' &= \frac{1}{j}\big(\lambda_2\rho^j - 1\big) \\ \omega\rho' &= \frac{\rho}{j^2}(2\psi - \rho^j - \Upsilon) \\ \omega\psi' &= \frac{1}{j}\big(\psi^2 - \psi\Upsilon - f_1\big) \end{aligned}$$

au point $q = (\eta, \rho, \psi; \omega) = (0, \lambda_2^{-1/j}, 0; 0)$ – les membres droits s'annulent puisque $\Delta \equiv 1$ et $f_2(0) = 0$ impliquent $\Upsilon(0) = -1/\lambda_2$. D'après le critère de Briot-Bouquet, ce système a comme données

$$\mathrm{J}|_q = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & -\frac{1}{j}\lambda_2^{-1} & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{j}\lambda_2^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \tau|_q = \left(0, *, -\frac{1}{j}f_1'(0)\right).$$

Il admet donc des solutions holomorphes. Dans tous les cas le champ X se ramène sur le champ

$$z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2\lambda_2 z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \big(2\lambda_3 z_1 z_3 + z_2^{q_2}\big)\frac{\partial}{\partial z_3}. \tag{25}$$

Ceci donne, si $q_2 = 0$ et $\lambda_3 = -1$, les algèbres du type $\mathsf{S}(\lambda_2)$ avec $\lambda_2 > 0$ (ceci fini la preuve de la Proposition 8). Dans les autres cas, on obtient les trois algèbres exceptionnelles A_1, A_2 et B du Théorème C.

Deuxième cas. — On suppose que $z_2^{q_2} z_3^{q_3}\Upsilon$ est une fonction holomorphe qui s'annule à l'origine. Le changement de coordonnées (22) avec $\eta \equiv 0$, $\rho \equiv 1$ et $\psi = \frac{1}{2}\Upsilon$ est holomorphe, préserve la condition $\Delta \equiv 1$ et rend $\Upsilon \equiv 0$ ($f_2 \equiv -q_3$ et $f_3 \equiv q_2$). Puisque les f_i sont constantes, $z_2^{q_2+1} z_3^{q_3}$ et $z_2^{q_2} z_3^{q_3+1}$ sont holomorphes et donc $q_i \geqslant 0$. Pour ce qui est de la structure projective, on a

$$-\frac{1}{\dot\omega^2}\{\omega, t\} = \frac{1 - \frac{4}{j^2}f_1(s)}{2s^2}.$$

Pour qu'elle soit uniformisable au voisinage de $s = 0$, if faut que f_1 soit holomorphe en 0 et que l'une des trois conditions suivantes soit satisfaite : soit $f_1(0) = 0$, soit

$\frac{4}{j^2}f_1(0) = 1$ et $f_1'(0) = 0$, soit il existe $m \in \mathbf{N}^*$, $m \neq 1$ tel que $\frac{4}{j^2}f_1(0) = 1/m^2$. La monodromie au voisinage de $s = 0$ est respectivement parabolique, triviale ou cyclique d'ordre m. Voyons comment un nouveau changement de coordonnées ramène f_1 sur la constante $f_1(0)$. Considérons le changement de coordonnées (22) pour $\eta = \frac{1}{j}\int[(\rho^j - 1)/\omega]$. Si ρ et ψ sont des solutions holomorphes du système d'équations différentielles

$$\omega\rho' = \frac{2}{j^2}\psi\rho, \qquad \omega\psi' = \frac{1}{j}(f_1(0)\rho^{2j} - f_1 + \psi^2)$$

au point $(\rho, \psi; \omega) = (1, 0; 0)$, alors le changement de coordonnées (22) est holomorphe. Il préserve les conditions $\Delta \equiv 1$ et $\Upsilon \equiv 0$ et redresse f_1 sur sa valeur à l'origine. Le critère de Briot-Bouquet nous donne

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 2j^{-2} \\ 2f_1(0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2j^{-2} \\ \frac{1}{2m^2}j^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \left(0, -\frac{1}{j}f_1'(0)\right).$$

Les hypothèses du critère sont satisfaites : les valeurs propres de J sont $1/m$ et $-1/m$. Le vecteur τ est toujours dans l'image de $\mathrm{J} - \mathrm{I}$: l'uniformisabilité de la structure projective implique $f_1'(0) = 0$ si $m^2 = 1$. On vient de prouver que si le germe à l'origine d'une extension de $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$ est uniforme en restriction au complémentaire de $\{z_2^{q_2+1}z_3^{q_3+1} \neq 0\}$, alors le champ X se redresse, par un biholomorphisme qui fixe les deux champs qui engendrent $\mathfrak{aff}(\lambda_2, \lambda_3)$, sur le champ (3). Cette forme normale est entièrement caractérisée par le couple d'entiers positifs ou nuls (q_2, q_3), soumis à la condition $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$ et par $m \in \mathbf{Z}^+ \cup \{\infty\}$. Si l'un des λ_i n'est pas entier, alors m est impair et $j = 2$. Une solution explicite de ce champ (quand $m \neq \infty$) est

$$\left(\frac{t}{m^2 - t^2}, u_+^{-\lambda_2 - \frac{m}{2}q_3} u_-^{-\lambda_2 + \frac{m}{2}q_3}, u_+^{-\lambda_3 + \frac{m}{2}q_3} u_-^{-\lambda_3 - \frac{m}{2}q_3}\right),$$

pour $u_+ = 1 + t/m$ et $u_- = 1 - t/m$, qui est uniforme si $2\lambda_2$ et q_3 ont la même parité et si $2\lambda_3$ et q_2 ont la même parité, en accord avec la Proposition 9. Si $q_2\lambda_2 = 0$ alors la relation $q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 1$ force $q_3\lambda_3 = 1$, ce qui est impossible. On peut donc supposer $\lambda_2 > 0$ et $q_2 > 0$. Ceci fini la preuve du Théorème C.

6.3. *Quelques propriétés des algèbres réduites.* — À l'aide des formes normales que l'on vient de trouver, on donne quelques précisions sur la nature des actions. Ces données nous seront utiles dans notre étude des actions sur des variétés compactes.

On sait que, chez les algèbres Z du Théorème C, le stabilisateur de l'orbite ouverte est d'ordre m. On veut calculer explicitement le stabilisateur autour de chacune des surfaces $\{z_2 = 0\}$ et $\{z_3 = 0\}$. Dans ce but, on considère les deux courbes $\gamma_i : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^3$:

$$t \overset{\gamma_1}{\mapsto} (0, e^{2\lambda_2\tau}, e^{2\lambda_3\tau}), \quad t \overset{\gamma_2}{\mapsto} (0, e^{-q_3\tau}, e^{q_2\tau}).$$

En posant $\tau = it$ pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient deux lacets dans le groupe fondamental de $\mathbf{C}^3 \setminus \{z_2 z_3 = 0\}$, isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. On peut calculer explicitement les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ que l'on obtient en intégrant l'action sur ces deux lacets. On a une représentation $\mu : \pi_1(\mathbf{C}^3 \setminus \{z_2 z_3 = 0\}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. La courbe γ_1 est une solution de $\mathrm{L}(\lambda_2, \lambda_3)$ parcourue à double vitesse et donc $\mu([\gamma_1]) = 0$. Pour la courbe γ_2 on a $\gamma_2'(t) = (\Psi(h^+) - \frac{1}{m^2}\Psi(h^-))|_{\gamma_2(t)}$. On a donc

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cosh[t/m] & m\sinh[t/m] \\ \frac{1}{m}\sinh[t/m] & \cosh[t/m] \end{pmatrix}, \text{ si } m \neq \infty$$

et $\Phi_t(h^+)$ si $m = \infty$. Soit $\mathrm{A} = \gamma_2(2i\pi)$. Sa trace est $2\cos(2\pi/m)$ – il s'agit d'un élément d'ordre m. Si l'on note α_3 et α_2 deux générateurs du groupe fondamental (des lacets autour des plans $\{z_2 = 0\}$ et $\{z_3 = 0\}$), on a $2[\alpha_3] = q_2[\gamma_1] - 2\lambda_3[\gamma_2]$ et $2[\alpha_2] = q_3[\gamma_1] + 2\lambda_2[\gamma_2]$ et donc $2[\alpha_3] \overset{\mu}{\mapsto} \mathrm{A}^{-2\lambda_3}$ et $2[\alpha_2] \overset{\mu}{\mapsto} \mathrm{A}^{2\lambda_2}$. Si $m \neq \infty$, $\mu([\alpha_i])$ est dans le centre si et seulement si $2\lambda_i \equiv 0 \mod m$. Si $m = \infty$, $\mu([\alpha_2]) \neq 0$ et $\mu([\alpha_1])$ est dans le centre si et seulement si $\lambda_3 = 0$.

On montre l'existence de certaines surfaces spéciales chez les algèbres Z. Ces algèbres sont « intégrables » au sens où tous les champs qui en font partie commutent avec le champ

$$(\mathbf{26}) \qquad \mathrm{N}_a = q_3 z_2 \partial/\partial z_2 - q_2 z_3 \partial/\partial z_3.$$

Les champs de vecteurs qui commutent avec tous les champs de l'algèbre doivent commuter avec le stabilisateur d'un point de l'orbite ouverte : si ce stabilisateur n'est pas dans le centre (si $m^2 \notin \{1, 2^2\}$) alors le champ précédent est le seul qui commute avec les champs de Z. Dans le lieu où les champs de l'algèbre Z sont linéairement indépendants (dans le complémentaire de $\{z_2 z_3 = 0\}$) le champ N_a s'exprime comme combinaison linéaire des champs de vecteurs de l'image de Ψ :

$$\mathrm{N}_a = -\frac{1}{z_2^{q_2} z_3^{q_3}}\Psi(h^+) + 2\frac{z_1}{z_2^{q_2} z_3^{q_3}}\Psi(g) + \left(\frac{1}{m^2} z_2^{q_2} z_3^{q_3} - \frac{z_1^2}{z_2^{q_2} z_3^{q_3}}\right)\Psi(h^-).$$

De cette sorte ce champ n'est une combinaison linéaire de $\Psi(h^+)$ et $\Psi(g)$ qu'en restriction aux surfaces

$$(\mathbf{27}) \qquad \mathscr{S}_\pm = \left\{ z_1 = \pm\frac{1}{m} z_2^{q_2} z_3^{q_3} \right\}.$$

Les surfaces sont lisses et intersectent transversalement les plans $\{z_2 = 0\}$ et $\{z_3 = 0\}$. En restriction à ces surfaces le champ $\Psi(g)$ est donnée par $\lambda_2 z_2 \partial/\partial z_2 + \lambda_3 \partial/\partial z_3$. Les surfaces se confondent dans la surface $\{z_1 = 0\}$ si $m = \infty$.

Les champs de Z avec $m \neq \infty$ commutent aussi avec les champs (méromorphes, multivalués)

$$\text{(28)} \qquad \mathrm{N}_b = \left(z_2^{-\lambda_3} z_3^{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{m}} \left[\frac{1}{m} z_2^{q_2} z_3^{q_3} \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\lambda_2 - \frac{m}{2} q_3\right) z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \left(\lambda_3 + \frac{m}{2} q_2\right) z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}\right],$$

$$\text{(29)} \qquad \left(z_2^{-\lambda_3} z_3^{\lambda_2}\right)^{-\frac{2}{m}} \left[-\frac{1}{m} z_2^{q_2} z_3^{q_3} \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(\lambda_2 + \frac{m}{2} q_3\right) z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \left(\lambda_3 - \frac{m}{2} q_2\right) z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}\right],$$

avec $m > 0$. Si $m \in \{1, 2\}$ le stabilisateur de l'orbite ouverte est dans le centre et l'algèbre de Lie des champs holomorphes qui commutent avec Z est engendrée par N_a et N_b. On a une intégrale première (primitive) commune aux champs $\Psi(g)$ et $\Psi(h^+)$ donnée par

$$\mathrm{F} = \frac{\left(z_1 - \frac{1}{m} z_2^{q_2} z_3^{q_3}\right)}{\left(z_2^{-\lambda_3} z_3^{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{m}} \left(z_1 + \frac{1}{m} z_2^{q_2} z_3^{q_3}\right)}.$$

On a $\mathrm{N}_a \cdot \mathrm{F} = \frac{2}{m} \mathrm{F}$ et $\mathrm{N}_b \cdot \mathrm{F} = -1$. Le champ $\frac{m}{2} \mathrm{N}_a + c\mathrm{N}_b$ (et ses multiples) préservent les surfaces $\mathrm{F}^{-1}(\infty)$ et $\mathscr{S}_c = \mathrm{F}^{-1}(c)$. La dernière peut se paramétriser par

$$\text{(30)} \qquad \left\{ z_1 = \frac{1}{m} z_2^{q_2} z_3^{q_3} \left[\frac{1 + c\left(z_2^{-\lambda_3} z_3^{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{m}}}{1 - c\left(z_2^{-\lambda_3} z_3^{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{m}}}\right] \right\}; \quad c \in \mathbf{C}.$$

Elle est transverse aux plans $\{z_2 = 0\}$ et $\{z_3 = 0\}$ à l'origine et, y restreint, le champ $\frac{m}{2} \mathrm{N}_a + c\mathrm{N}_b$ est une combinaison linéaire de $\Psi(g)$ et $\Psi(h^+)$.

De façon analogue, l'algèbre B a des surfaces distinguées. Les champs de l'algèbre commutent avec les champs

$$\text{(31)} \qquad \mathrm{N}_a = z_2 \partial/\partial z_2 + z_3 \partial/\partial z_3, \ \mathrm{N}_b = z_2^2 \partial/\partial z_1 + z_2^2 z_3 \partial/\partial z_2, \ z_2^{-1} \partial/\partial z_3.$$

L'algèbre des champs holomorphes qui commutent avec B est engendrée par N_a et N_b. On a une intégrale première commune aux champs $\Psi(g)$ et $\Psi(h^+)$ donnée par

$$\mathrm{F} = \frac{z_1}{(z_1 z_3 - z_2) z_2}$$

et l'on a $N_a \cdot F = -2F$, $N_b \cdot F = -1$. Le champ $-\frac{1}{2}N_a + cN_b$ préserve la surface $\mathscr{S}_c = F^{-1}(c)$, qui peut se paramétriser par

$$\left\{ z_1 = \frac{cz_2^2}{cz_2z_3 - 1} \right\}. \tag{32}$$

Elle est transverse à la surface $\{z_2 = 0\}$ – mais les composantes de $F^{-1}(\infty)$ ne le sont pas.

Les algèbres du Théorème C décrivent complètement les actions locales maximales de $SL_2(\mathbf{C})$ au voisinage d'une orbite unidimensionnelle (dans l'adhérence d'une orbite de dimension 3). Le tableau 1 contient les algèbres B et les algèbres de la famille Z séparées en familles. On y trouve toutes les algèbres comme ci dessus telles qu'une orbite bidimensionnelle s'accumule sur l'orbite de dimension 1. La famille Z avec $m \neq \infty$ donne lieu aux types suivants :

– Les algèbres du type $\mathsf{C}_1(q_3; m)$, celles où $(\lambda_2, \lambda_3; q_2, q_3; m) = (\frac{1}{2}, 0; 2, q_3; m)$ avec m et q_3 impairs et celles du type $\mathsf{C}_2(q_3; m)$, où $(\lambda_2, \lambda_3; q_2, q_3; m) = (1, 0; 1, q_3; m)$ avec m pair, $q_3 > 0$. La surface $\{z_2 = 0\}$ est feuilletée par des courbes invariantes et le stabilisateur d'un point de la surface $\{z_3 = 0\}$ contient un sous-groupe unipotent.
– Les algèbres du type $\mathsf{D}(\mu; m)$, celles où $(\lambda_2, \lambda_3; q_2, q_3; m) = (1, \mu; 1, 0; m)$, avec $2\mu \equiv m \mod 2$. Les points sur la surface invariante $\{z_3 = 0\}$ ont dans leur stabilisateur un tore multiplicatif ; les points sur la surface invariante $\{z_2 = 0\}$, un groupe unipotent.
– Les algèbres du type $\mathsf{E}(m)$ $(\lambda_2, \lambda_3; q_2, q_3; m) = (1, 0; 1, 0; m)$. Les points sur la surface invariante $\{z_3 = 0\}$ ont dans leur stabilisateur un tore multiplicatif. L'autre surface invariante est feuilleté par des orbites unidimensionnelles.

TABLEAU 1. — Propriétés des formes normales. La composante neutre du stabilisateur d'un point sur la surface $\{z_i = 0\}$ est un groupe (A) affine (U) unipotent ou (T) un tore multiplicatif

Famille	λ_2	λ_3	q_2	q_3	stab. $\{z_2 = 0\}$	stab. $\{z_3 = 0\}$	conditions mod 2	m
B	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	U	$\times$		
$\mathsf{C}_1(q_3; m)$	$\frac{1}{2}$	0	2	$\neq 0$	A	U	$m \equiv 1,\ q_3 \equiv 1$	$< \infty$
$\mathsf{C}_2(q_3; m)$	1	0	1	$\neq 0$	A	U	$m \equiv 0$	$< \infty$
$\mathsf{D}(\lambda_3; m)$	1	$\neq 0$	1	0	U	T	$m \equiv 2\lambda_3$	$< \infty$
$\mathsf{E}(m)$	1	0	1	0	A	T	$m \equiv 0$	$< \infty$
$\mathsf{F}(\lambda_2, \lambda_3; q_2, q_3; m)$		$\neq 0$		$\neq 0$	U	U	Théorème C	$< \infty$
$\mathsf{G}(\lambda_2, \lambda_3; q_2, q_3)$	$\neq 0$	$\neq 0$			U	U		∞
$\mathsf{H}(\lambda_2; q_2, q_3)$	$\neq 0$	0			A	U		∞

– Les autres algèbres constituent la famille F $(q_3\lambda_3 \neq 0)$. Deux surfaces s'intersectent transversalement le long de l'orbite unidimensionnelle. Le stabilisateur d'un point de ces surfaces en dehors de la courbe contient un sous-groupe unipotent.

Les cas $m = \infty$ de la famille Z donnent lieu aux algèbres G et H. Pour obtenir ces résultats, on calcule les combinaisons linéaires des champs de l'algèbres qui s'annulent sur un point donné et on utilise le fait qu'un élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ engendre un sous-groupe unipotent si et seulement si son déterminant s'annule.

Remarque **2.** — L'éclatement d'une orbite unidimensionnelle réduite donne un diviseur où les orbites unidimensionnelles sont encore réduites. Par exemple :

– en éclatant une courbe invariante de l'algèbre A_1 on obtient, dans une carte, une algèbre de type $\mathsf{C}_1(1; 1)$ et, dans l'autre, une algèbre B ;
– en éclatant l'orbite unidimensionnelle d'une algèbre B on obtient des algèbres du type $\mathsf{D}(-\frac{1}{2}; 1)$ et $\mathsf{S}(\frac{1}{2})$.

7. Algèbres uniformes. Cas parabolique

Dans cette section on s'occupera des algèbres de champs de vecteurs au voisinage d'un point qui est fixé par un sous-groupe à un paramètre unipotent de $SL_2(\mathbf{C})$ mais qui n'est fixé par *aucun* tore multiplicatif et qui se trouve dans l'adhérence d'une orbite tridimensionnelle. Nos résultats n'ont pas la généralité des précédents, mais suffiront pour l'étude des variétés quasihomogènes. On borne notre étude à deux cas hautement symétriques.

On considère une représentation $\Psi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{X}(U)$ pour U un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^3$. On suppose que $\Phi(g)$ et $\Phi(h^-)$ sont linéairement indépendants à l'origine et l'on supposera, sans perte de généralité, que

$$\Psi(g) = \partial/\partial z_1, \ \ \Psi(h^-) = -e^{-z_1}\partial/\partial z_2. \tag{33}$$

Ceci fixe la restriction de la représentation à une sous-algèbre affine. Cette sous-algèbre engendre un feuilletage dont les feuilles sont les surfaces de niveau de z_3. Le champ le plus générale $\Psi(h^+)$ qui complète la représentation est nécessairement de la forme $e^{z_1}\sum_i f_i(z_2, z_3)\partial/\partial z_i$ avec les conditions $\partial f_1/\partial z_2 = -2$, $\partial f_2/\partial z_2 = -f_1$ et $\partial f_3/\partial z_2 = 0$, c'est-à-dire,

$$\Psi(h^+) = e^{z_1}\left\{2(g_1 - z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + \left([g_1 - z_2]^2 + g_2\right)\frac{\partial}{\partial z_2} + g_3\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}, \tag{34}$$

pour trois fonctions holomorphes $g_i(z_3)$ qui s'annulent à l'origine. Les champs de cette algèbre sont naturellement définis sur un ouvert de la forme $\mathbf{C}^2 \times U_3 \subset \mathbf{C}^3$.

On suppose que $g_3 = \lambda z_3^{p+1} + \cdots$. Remarquons que la courbe $\ell = \{z_2 = 0\} \cup \{z_3 = 0\}$ est tangente aux champs $\Phi(h^+)$ et $\Phi(g)$. On verra que, dans les cas qui nous intéressent, on pourra redresser cette l'algèbre sur une algèbre engendrée par les champs (33) et le champ

$$\Psi(h^+) = e^{z_1}\left\{-2z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + \left(z_2^2 + \frac{1}{4}(p^2 - \beta^2)z_3^{2p}\right)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^{p+1}\frac{\partial}{\partial z_3}\right\} \tag{35}$$

avec $p \in \mathbf{N}$ et $\beta \in \mathbf{C}$. Ces algèbres sont préservées par la transformation

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1 + 2i\pi, z_2, z_3) \tag{36}$$

et tous leurs éléments commutent avec le champ

$$\mathrm{N}_a = -p\frac{\partial}{\partial z_1} + pz_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}. \tag{37}$$

De surcroît, si $\beta \in \mathbf{Z}$, ils commutent aussi avec le champ

$$\mathrm{N}_b = -z_3^{\beta}(p-\beta)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3^{\beta}(p-\beta)\left(z_2 + \frac{\beta}{2}z_3^{p}\right)\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^{\beta+1}\frac{\partial}{\partial z_3}. \tag{38}$$

Ces champs satisfont la relation $[\mathrm{N}_a, \mathrm{N}_b] = \beta \mathrm{N}_b$ (les champs se confondent si $\beta = 0$).

Les changements de coordonnées les plus généraux qui, dans l'algèbre (33) préservent les champs $\Phi(g)$ et $\Phi(h^-)$ et qui fixent les feuilles du feuilletage dz_3 (engendré par ces champs) sont ceux de la forme

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1 + \psi(z_3), z_2 e^{-\psi(z_3)} + \phi(z_3), z_3). \tag{39}$$

L'image de l'origine est le point $(\psi(0), \phi(0), 0)$. Ils transforment les fonctions qui figurent dans l'expression de $\Psi(h^+)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
g_1 &\mapsto \phi + e^{-\psi}\left(g_1 + \frac{1}{2}\psi' g_3\right),\\
g_2 &\mapsto e^{-2\psi}\left(g_2 - \psi' g_1 g_3 - \frac{1}{4}[\psi_1' g_3]^2\right) + e^{\psi}\phi' g_3,\\
g_3 &\mapsto e^{-\psi} g_3.
\end{aligned}$$

En prenant $\psi \equiv 0$ et $\phi(z_3) = -g_1(z_3)$, on rend g_1 identiquement nulle en fixant l'origine. Les changements de coordonnées de la forme (39) avec

$$\phi = -\frac{1}{2}e^{-\psi}\psi' g_3, \tag{40}$$

préservent la condition $g_1 \equiv 0$. Sous ce changement de coordonnées, on a

$$g_2 \mapsto e^{-2\psi} g_3^2 \left(\frac{g_2}{g_3^2} - \frac{1}{2}\psi'' - \frac{1}{2}\psi' \frac{g_3'}{g_3} + \frac{1}{4}[\psi']^2 \right). \tag{41}$$

Avec un changement de coordonnées (39) avec (40) pour $\psi = -\log(\lambda z_3^{p+1}/g_3)$, on obtient, en fixant l'origine, un nouveau champ de la forme (35) avec $g_3 = \lambda z_3^{p+1}$ et $g_1 \equiv 0$. La valeur de λ peut être supposée égale à 1, en considérant la représentation Ψ' obtenue en faisant le changement $z_2 \mapsto \lambda z_2$ et en composant par l'automorphisme de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ donné par $(h^+, g, h^-) \mapsto (\lambda^{-1}h^+, g, \lambda h^-)$. Cette opération préserve les champs $\Psi(g)$ et $\Psi'(h^-)$. On supposera donc que $g_3 = z_3^{p+1}$.

7.1. *Courbes elliptiques.* — On prouve le résultat suivant :

Proposition **11.** — *Si une algèbre* (34) *admet un groupe de symétries isomorphe à* $\mathbf{Z}^2$ *tel que le quotient de* ℓ *est une courbe elliptique et que l'algèbre est uniforme au voisinage de la courbe au quotient alors l'algèbre se redresse sur une algèbre* (35). *Les symétries qui réalisent le quotient sont (à un changement de coordonnées près) engendrées par le flot du champ* N_a *et par la symétrie* (36).

Soit f une fonction holomorphe qui s'annule à l'origine et supposons que les fonctions ψ, ω et μ donnent une solution holomorphe du système

$$\begin{aligned} z_3\psi' &= \omega, \\ z_3\omega' &= \frac{1}{2}\omega^2 - p\omega + 2z_3^{-2p}[g_2(z_3) - e^{2\psi} f(\mu z_3)], \\ z_3\mu' &= \mu(e^{\psi}\mu^p - 1), \end{aligned} \tag{42}$$

au point $(\psi, \omega, \mu) = (\psi_0, 0, \mu_0)$. En faisant un changement de coordonnées de la forme (39) avec la condition (40) et en posant $\xi(z_3) = z_3\mu(z_3)$ on obtient un nouveau champ de la forme (35) avec $g_1 \equiv 0$, $g_3 = \xi^{p+1}$ et $g_2 = f(\xi)$ dans les variables (z_1, z_2, ξ).

On cherche les automorphismes de l'algèbre dont l'image de l'origine est contenue dans la droite ℓ et telles que $\Re(\psi_0) \neq 0$. On suppose que $g(z_3) = az_3^m + \cdots$ avec $a \neq 0$ et que $f = g$. On a nécessairement $e^{\psi_0}\mu_0^p = 1$. Puisque le membre gauche de la deuxième équation est régulier à l'origine, il en est de même du membre droit et l'expression $g_2(z_3) - e^{2\psi} f(\mu z_3)$ s'annule à l'origine. Si $p > 0$ et $m < 2p$ alors, de cette équation on obtient $a(e^{2\psi_0}\mu_0^m - 1) = 0$ et donc $\mu_0^{2p-m} = 1$. On doit conclure que μ_0 et e^{ψ_0} sont des racines de l'unité, ce qui est impossible. Il faut donc supposer que $m \geq 2p$ (ce qu'on a trivialement si $p = 0$). On définit implicitement la fonction $r(z_3)$ et $\beta \in \mathbf{C}$ par l'égalité

$$g_2 = \frac{1}{4}(p^2 - \beta^2) z_3^{2p} + z_3^{2p+k} r(z_3) \tag{43}$$

et la condition $r(0) \neq 0$ ou $r \equiv 0$. Si l'on veut redresser g_2 sur sa première composante homogène – en posant $f(\mu z_3) = \frac{1}{4}(p^2 - \beta^2) z_3^{2p} \mu^{2p}$ dans le système (42) – on obtient

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \beta^2 - p^2 & -p & \mu_0^{-1} p(\beta^2 - p^2) \\ \mu_0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $0, \beta, -\beta$. De cette sorte, suivant le critère de Briot-Bouquet, on peut supposer que $r \equiv 0$ si $\beta \notin \mathbf{Z}^*$. On affirme que, dans les cas qui nous intéressent, il en est de même si $\beta \in \mathbf{Z}^*$.

Pour la structure projective induite par $\Psi(h^+)$ dans l'espace de feuilles de dz_3 on a, dans la coordonnée $s = z_3$, la différentielle quadratique

$$\left[\frac{1}{2s^2}(1 - \beta^2) + 2s^{k-2} r(s) \right] ds^2. \tag{\textbf{44}}$$

On prouve d'abord qu'une structure projective dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ donnée par une telle différentielle quadratique avec $\beta = n \in \mathbf{Z}^*$ est celle induite par un champ de vecteurs holomorphe de la forme

$$s^{n+1} h(s) \frac{\partial}{\partial s}, \quad h(0) \neq 0, n \geq 1. \tag{\textbf{45}}$$

Si $\rho(t)$ est une solution de ce champ alors, pour que l'expression

$$-\frac{1}{(\rho')^2}\{\rho(t), t\} = \frac{1}{2s^2}(1 - n^2) - \frac{1}{s}(n+1)\frac{h'}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{h'}{h}\right)^2 - \frac{h''}{h}$$

soit égal au coefficient de ds^2 dans (44), il suffit que h soit une solution holomorphe du système

$$sh' = \omega, \; s\omega' = \frac{\omega^2}{2h} - n\omega - 2hs^k r(s),$$

au point $(h, \omega; s) = (h_0, 0; 0)$. Le critère de Briot-Bouquet garantit l'existence d'une telle solution. En conséquence, la classification des structures projectives de ce type n'est pas plus fine que celle des champs de la forme (45). Dans une coordonnée convenable, un tel champ est de la forme

$$\mathrm{Y}_\alpha = \frac{s^{n+1}}{1 + \alpha s^n} \frac{\partial}{\partial s}$$

pour un unique $\alpha \in \mathbf{C}$ [32]. Soit $\xi(s)$ un automorphisme de la structure projective (un germe de biholomorphisme fixant l'origine). L'image de Y_α sous ξ est un champ de vecteurs qui s'annule au même ordre et qui induit la même structure projective ; en particulier, Y_α et $\xi_* Y_\alpha$ engendrent une algèbre de Lie de dimension finie et donc $\xi_* Y_\alpha$ est un multiple de Y_α. D'autre part, les champs Y_α et cY_α ne sont équivalents que si $c = 1$ ou $\alpha = 0$ (autrement, les résidus des formes méromorphes qui prennent la valeur 1 sur ces champs sont distincts). De cette sorte, un automorphisme de la structure projective est :

– un biholomorphisme qui préserve le champ Y_α si $\alpha \neq 0$ ou,
– si $\alpha = 0$, un biholomorphisme qui envoi Y_0 sur l'un de ses multiples.

Si $\alpha \neq 0$ et $\xi(s) = s\mu(s)$ est un automorphisme du champ Y_α alors $\xi'(0) = \mu(0)$ est une racine de l'unité d'ordre n. De cette sorte, e^{ψ_0} est lui-même une racine primitive de l'unité et donc $\Re(\psi_0) = 0$: les algèbres de Lie correspondantes n'ont pas les symétries cherchées. La structure projective est donc induite par le champ Y_0 et, en conséquence, on peut supposer $r \equiv 0$ dans (43), indépendamment de la valeur de β.

Dans ces cas, les symétries sont données – à un automorphisme de la forme (36) près, par les solutions du système (42) avec

$$g_2(s) = f(s) = \frac{1}{4}(p^2 - \beta^2)s^{2p}. \tag{\textbf{46}}$$

On continue l'étude des symétries.

Premier cas, $p = 0$. — Si $p = 0$ alors $\beta = 0$ (puisque le champ s'annule à l'origine) et le système (42) avec (46) se réduit à

$$z_3\psi' = \omega,\ \ z_3\omega' = \frac{1}{2}\omega^2,\ \ z_3\mu' = \mu(e^{\psi} - 1).$$

Puisque l'on cherche une solution avec $\mu(0) \neq 0$, on doit avoir $e^{\psi}(0) = 1$. Les algèbres qui correspondent n'ont pas les symétries cherchées.

Deuxième cas, $p \neq 0, \beta \in \mathbf{Z}^*$. — Un automorphisme de la structure projective qui fixe les feuilles de dz_3 ne peut provenir que d'un changement de coordonnées de la forme (42) avec $\mu \equiv 1$ et il s'agit donc d'un automorphisme de la forme (36) puisque de la troisième équation on obtient $e^{\psi} \equiv 1$ et donc $\omega \equiv 0$. Dans l'espace où s prend ses valeurs, les symétries de la structure projective proviennent de l'action des champs $s\partial/\partial s$ et $s^{n+1}\partial/\partial s$. Ces champs de vecteurs proviennent des champs N_a et N_b. Dans l'espace de feuilles ils engendrent une action (multivaluée) d'un relèvement d'ordre n du groupe affine donnée par les transformations

$$\xi_{\alpha,\beta}(s) = \alpha s(1 - n\beta\alpha^n s^n)^{-1/n},$$

avec $1^{-1/n} = 1$. Au niveau des germes, on a

$$\xi_{\alpha_2,\beta_2} \circ \xi_{\alpha_1,\beta_1}(s) = \xi_{\alpha_1\alpha_2,\beta_2+\alpha_2^{-n}\beta_1}(s).$$

Parmi les symétries on a nécessairement une $\xi_{\alpha,\beta}$ pour laquelle $\Re(\alpha) \neq 0$. Après conjugaison par $\xi_{1,c}$ avec $c = \beta/(1-\alpha^n)$, elle se ramène sur $\xi_{\alpha,0}$. Cette dernière ne commute qu'avec celles de la forme $\xi_{\alpha_2,0}$.

Troisième cas, $p \neq 0$, $\beta \notin \mathbf{Z}^*$. — Si, dans le système (42) avec (46) on pose $\eta = \mu^p e^\psi$, on obtient comme sous-système

$$z_3\omega' = \frac{1}{2}\omega^2 - p\omega + \frac{1}{2}(p^2-\beta^2)(1-\eta^2), \tag{47}$$

$$z_3\eta' = \eta(p[\eta-1]+\omega), \tag{48}$$

au voisinage du point $(\omega,\eta) = (0,1)$. On remarque que si (ω,η) est une solution et $\eta \equiv 1$, alors $\omega \equiv 0$ et viceversa. On cherche une solution formelle non-constante $\omega = \sum_{i=k}^{\infty} a_i z_3^i$ $(k \geqslant 1)$, $\eta = 1 + \sum_{i=l}^{\infty} b_i z_3^i$ avec $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$. De l'équation (47), on obtient, si $l > k$, $k = -p$, ce qui est impossible. De la même équation on a $l \geq k$, d'où $l = k$. Du système ci-dessus on obtient le système d'équations linéaires $a_k = (k-p)b_k$, $(k+p)a_k = (\beta^2 - p^2)b_k$, mais ces équations ne sont pas compatibles que si $\beta^2 = k^2$. De cette sorte, la seule solution est donnée par $\omega \equiv 0$ et $\eta \equiv 1$, et donc les solutions (ψ,ω,μ) du système (42) qui donnent une symétrie de l'algèbre sont constantes $(\psi_0, 0, \mu_0)$ avec $\mu_0^p e^{\psi_0} = 1$. Ces symétries sont celles induites par le champ (37) et la symétrie (36). Ceci prouve la proposition. □

Étudions maintenant l'action de ces symétries. On vient de voir qu'on peut borner notre étude à celle des algèbres (35) sous l'action des symétries (37) et (36). Les automorphismes de l'algèbre sont l'image homomorphe de $\mathbf{Z} \times \mathbf{C}$:

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{(n,\tau)} \left(z_1 + 2i\pi n - p\tau, e^{p\tau} z_2, e^\tau z_3\right),$$

dont le noyau est engendré par $(p, 2i\pi)$. Un élément de $\mathbf{Z}^2$ (disons, v_1) doit avoir une puissance (disons, r) telle que, sous v_1^r on ait $(\delta_1,\delta_2,\delta_3) \mapsto (\delta_1 + 4i\pi, \delta_2, \delta_3)$, car l'algèbre doit être uniforme au quotient. On a donc $v_1 = (m_1, 2i\pi q/r)$ avec $rm_1 = 2 + pq$. On a $v_2 = (m_2, \alpha) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{C}$ avec $\Re(\alpha) \neq 0$. Les actions de v_1 et v_2 sont alors données par

$$\nu^{m_1}\phi(2i\pi q/r), \nu^{m_2}\phi(\alpha_2), \text{ avec } m_1 r = 2 + pq, \tag{49}$$

où ϕ est le flot de N_a. Le quotient de l'algèbre sous l'action du sous-groupe rv_1 est donnée par les fonctions $(w_1, w_2, w_3) = (e^{\frac{1}{2}z_1}, z_2, z_3)$. L'image de l'algèbre est donnée par les champs $\frac{1}{2}w_1\partial/\partial w_1$, $-w_1^{-2}\partial/\partial w_2$ et

$$-w_1^3 w_2 \frac{\partial}{\partial w_1} + w_1^2\left(w_2^2 + \frac{1}{4}[p^2-\beta^2]w_3^p\right)\frac{\partial}{\partial w_2} + w_1^2 w_3^{p+1}\frac{\partial}{\partial w_3},$$

tandis que le champ N_a est donné par $-\frac{p}{2}\partial/\partial w_1 + pw_2\partial/\partial w_2 + w_3\partial/\partial w_3$ et la symétrie ν par l'involution $(w_1, w_2, w_3) \mapsto (-w_1, w_2, w_3)$.

Si $\beta = 0$ alors le l'algèbre possède le facteur

$$(w_1, w_2, w_3) = \left(w_1^2\left[\frac{p}{2}w_3^p - w_2\right], w_1^2 w_3^p, w_1\right) = (y_1, y_2, y_3),$$

qui est injectif en restriction à $\{w_3 = 0\}$. Si $w_3 \neq 0$ et on fixe y_1 et y_2, la pré-image de la courbe est une revêtement d'ordre p. Dans les nouvelles variables, les champs qui engendrent l'algèbre sont $\partial/\partial y_1$, $y_1\partial/\partial y_1 + y_2\partial/\partial y_2 + \frac{1}{2}y_3\partial/\partial y_3$ et $y_1^2\partial/\partial y_1 + 2y_1y_2\partial/\partial y_2 + y_3(y_1 - \frac{p}{2}y_2)\partial/\partial y_3$ tandis que $\nu(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, -y_3)$ et $N_a = -\frac{p}{2}y_3\partial/\partial y_3$. L'action de $\mathbf{Z}^2$ préserve les variables y_1 et y_2 at agit sur y_3 par

$$(\mathbf{50}) \qquad y_3 \xrightarrow{v_1} y_3 \exp(2i\pi/r), \ y_3 \xrightarrow{v_2} (-1)^{m_2}\exp(-p\alpha/2)y_3.$$

L'action de $SL_2(\mathbf{C})$ est donnée par

$$\left(\frac{-ay_1 + c}{by_1 - d}, \frac{y_2}{(by_1 - d)^2}, -\frac{y_3}{by_1 - d}\exp\left[\frac{pby_2}{2(by_1 - d)}\right]\right),$$

la projection sur les deux premières variables est l'action sur une carte du fibré tangent de $\mathbf{CP}^1$. L'ensemble des éléments du groupe qui envoient le point $(0, \delta, \epsilon)$ sur les points de la forme $(0, \delta, \epsilon\exp(2i\pi k/r + m\alpha))$ est le groupe

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & n_1\alpha_2 + n_2 2i\pi/r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ (n_1, n_2) \in \frac{2}{p}\mathbf{Z}^2\right\}$$

ou le contient avec indice 2. Ces actions locales peuvent se globaliser. Par exemple, si $p = 1$ le facteur dynamique est injectif et l'action de l'élément $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est

$$(y_1, y_2, y_3) \mapsto \left(-\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1^2}, \frac{y_3}{y_1}\exp\left[\frac{y_2}{2y_1}\right]\right) = (x_1, x_2, x_3).$$

Dans ces variables les champs deviennent, respectivement, $x_1^2\partial/\partial x_1 - 2x_1x_2\partial/\partial x_2 + x_3(x_1 - \frac{1}{2}x_2)\partial/\partial x_3$, $-(x_1\partial/\partial x_1 + x_2\partial/\partial x_2 + \frac{1}{2}x_3\partial/\partial x_3)$ et $\partial/\partial y_1$. Le champ N_a est $-\frac{1}{2}x_3\partial/\partial x_3$. Le recollement de ces deux copies de $\mathbf{C}^3$ donne un fibré en droites au dessus de $T\mathbf{CP}^1$ où l'action maximale est globale. En ôtant la section nulle et en prenant le quotient par l'action de $\mathbf{Z}^2$ de la formule (50), on obtient une variété tridimensionnelle (non-compacte) munie d'une action à droite de $SL_2(\mathbf{C})$ et d'une fibration équivariante par courbes elliptiques sur $T\mathbf{CP}^1$ avec deux orbites :

- une orbite compacte et bidimensionnelle, qui est la fibre au dessus de la section 0 de $T\mathbf{CP}^1$ et où la composante neutre du stabilisateur est un sous-groupe unipotent ;
- son complémentaire, une orbite ouverte où le stabilisateur de l'action est virtuellement contenu dans un sous-groupe unipotent.

Si $\beta \neq 0$ alors le champ a comme facteur l'application

$$(w_1, w_2, w_3) \mapsto \left(w_1^2 \left[\frac{1}{2}(p+\beta) w_3^p - w_2 \right], w_1^2 \left[\frac{1}{2}(p-\beta) w_3^p - w_2 \right], w_1 \right) = (y_1, y_2, y_3),$$

qui est injective en restriction à $\{w_3 = 0\}$. Si $w_3 \neq 0$ et on fixe y_1 et y_2, la préimage de la courbe est une revêtement d'ordre p, qui peut se paramétriser par $y_3 = \zeta^p$ (si p est impair) ou, si $p = 2q$, par $y_3 = \zeta^q$. Dans les variables y_i les champs deviennent $\partial/\partial y_1 + \partial/\partial y_2$, $y_1 \partial/\partial y_1 + y_2 \partial/\partial y_2 + \frac{1}{2} y_3 \partial/\partial y_3$ et $y_1^2 \partial/\partial y_1 + y_2^2 \partial/\partial y_2 - \frac{1}{2\beta} y_3([p-\beta]y_1 - [p+\beta]y_2)\partial/\partial y_3$. Le champ N_a est $-\frac{p}{2} y_3 \partial/\partial y_3$. L'action de $\mathbf{Z}^2$ est encore donnée par (50). L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ (multivaluée dans la plupart de cas) est donnée par

$$\left(\frac{-ay_1 + c}{by_1 - d}, \frac{-ay_2 + c}{by_2 - d}, y_3 (d - by_1)^{\frac{p-\beta}{2\beta}} (d - by_2)^{-\frac{p+\beta}{2\beta}} \right). \tag{51}$$

Elle fibre sur l'action (locale maximale) diagonale de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sur (une carte de) l'action diagonale sur $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$. Il s'agit d'une action locale maximale en restriction à $\{w_3 = 0\}$. Dans le complémentaire, toute la multivaluation réside dans l'action du groupe à un paramètre

$$\begin{pmatrix} \rho & \rho^{-1} - \rho \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

qui préserve la courbes $y_3 \mapsto (0, 1, y_3)$. L'action est donnée par $(0, 1, y_3) \mapsto (0, 1, \rho^{-p/\beta} y_3)$, soit $\zeta \mapsto \zeta \rho^{-1/\beta}$ (si p est impair) ou $\zeta \mapsto \zeta^{-2/\beta}$ (si p est pair). On remarque que ceci est en accord avec la formule (44). On dispose de v_1 et v_2 pour anéantir cette multivaluation au quotient. En guise d'exemple, si v_1 et trivial et m_2 est pair alors l'algèbre ne peut devenir uniforme après quotient que dans les deux situations suivantes :

- $\beta \notin \mathbf{R}$. Dans ce cas il faut que $\alpha = 4i\pi/(\kappa\beta)$ pour $\kappa \in \mathbf{Z}^*$. Le stabilisateur de la classe du point $(0, 1, 1)$ dans le quotient est dans le groupe (52) pour $\rho = \omega^n \exp(2i\pi\beta/p)^m$ pour ω une racine primitive de l'unité d'ordre k.
- Si $1/\beta \in \mathbf{Z}$ (si p impair) ou $2/\beta \in \mathbf{Z}$ (si p pair) alors l'action (51) est uniforme. La valeur de α est arbitraire.

Dans tous les cas, la structure projective de la formule (44) devient uniformisable au quotient (la transformation qui annule la multivaluation rend uniformisable la structure projective sur une courbe elliptique).

On peut compléter ces actions locales comme des actions globales sur des variétés compactes. Par exemple, si $p=1$, l'action de σ via (52) est donnée par

$$(y_1, y_2, y_3) \mapsto \left(-\frac{1}{y_1}, -\frac{1}{y_2}, y_3 y_1^{\frac{1-\beta}{2\beta}} y_2^{-\frac{1+\beta}{2\beta}}\right) = (x_1, x_2, x_3)$$

et dans ces nouvelles « variables » les champs sont, respectivement, $x_1^2\partial/\partial x_1 + x_2^2\partial/\partial x_2 - \frac{1}{2\beta}x_3([1-\beta]y_1 - [1+\beta]y_2)$, $-(x_1\partial/\partial x_1 + x_2\partial/\partial x_2 + \frac{1}{2}x_3\partial/\partial x_3)$ et $\partial/\partial x_1 + \partial/\partial x_2$. Le champ N_a est $-\frac{1}{2}x_3\partial/\partial x_3$. L'algèbre est la même qu'auparavant et l'action se retrouve en conjuguant l'action précédente par σ. On peut prendre le même quotient dans cette carte pour obtenir une variété avec une action locale maximale de $SL_2(\mathbf{C})$. De la même façon que l'on a montré que les champs d'Halphen se globalisaient, on peut recoller ces deux variétés via σ pour obtenir une variété munie d'une action qui contient dans son intérieur une orbite bidimensionnelle compacte, à savoir, la fibre au dessus de la diagonale de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$. On peut ensuite ajouter ce qui manque à l'orbite de dimension trois pour obtenir une variété compacte avec une fibration équivariante sur $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ et où les fibres sont des courbes elliptiques. Comme on le verra plus tard, ces variétés sont les seules variétés compactes munies d'une action de $SL_2(\mathbf{C})$ qui n'ont pas d'orbites unidimensionnelles. Remarquons aussi que ces variétés peuvent se déformer de façon non-triviale au sein des variétés munies des actions de $SL_2(\mathbf{C})$.

7.2. *Quotients cycliques.* — On prouve maintenant la Proposition 9 et, dans ce but, on se place dans le cadre suivant. On considère una algèbre du type (34) et l'on suppose, moyennant un changement de coordonnées qui fixe les feuilles du feuilletage dz_3, que $g_1 \equiv 0$ et que $g_3 = z_3^{p+1}$. On suppose que dans la variable $s = z_3^n$ la structure projective est donnée par $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m^2})s^{-2}ds^2$ avec $m \in \mathbf{Z}^*$. Cette expression doit être égale à

$$\frac{1}{2s^2}\left(1 - \frac{p^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}g_2(s)s^{-2p}\right).$$

De cette sorte, l'algèbre est nécessairement de la forme (35) avec $\beta = n/m$ (et $p>0$).

On peut calculer explicitement la classe de conjugaison du stabilisateur de l'action locale d'une algèbre (35) autour du plan $\{z_3 = 0\}$. On considère la courbe réelle $t \mapsto (0, 0, \delta e^{it})$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Cette courbe est homotope à la juxtaposition de deux courbes :

– la courbe $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}^3$ donnée par $t \mapsto \phi_1(it)$, où ϕ_1 est la courbe intégrale du champ N_a avec condition initiale $(0, 0, \delta)$ et

– la courbe $\gamma_2 : [0, 2\pi p] \to \mathbf{C}^3$ donnée par $t \mapsto \phi_2(it)$, où ϕ_2 est la courbe intégrale du champ $\Phi(g) = \partial/\partial z_1$ avec condition initiale $(-2i\pi p, 0, \delta)$.

Pour chaque $t_0 \in \mathbf{C}$, le vecteur $\phi_1'(t_0) \in \mathrm{T}_{\phi_1(t_0)}\mathbf{C}^3$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des champs de l'image de Ψ. On obtient de cette façon la courbe (constante) $\widetilde{\phi_1} : \mathbf{C} \to \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ donnée par

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p & \delta^{-p} \\ -\frac{1}{4}\delta^p[p^2 - \beta^2] & \frac{1}{2}p \end{pmatrix}.$$

En intégrant cette équation différentielle linéaire on obtient une courbe $\int \widetilde{\phi_1} : \mathbf{C} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ dont la dérivée est la courbe $\widetilde{\phi_1}$ (avec la trivialisation du fibré tangent du groupe donnée par les champs invariants à gauche) avec la condition initiale $\int \widetilde{\phi_1}(0) = e$. On vérifie aisément que la courbe en question est donnée par,

$$\begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{1}{2}\tau\beta\right) - \frac{p}{\beta}\sinh\left(\frac{1}{2}\tau\beta\right) & \frac{2}{\beta\delta^p}\sinh\left(\frac{1}{2}\tau\beta\right) \\ -\frac{\delta^p}{2\beta}\left[p^2 - \beta^2\right]\sinh\left(\frac{1}{2}\tau\beta\right) & \cosh\left(\frac{1}{2}\tau\beta\right) + \frac{p}{\beta}\sinh\left(\frac{1}{2}\tau\beta\right) \end{pmatrix},$$

si $\beta \neq 0$ ou par

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}p\tau & \tau\delta^{-p} \\ -\frac{1}{4}\delta^p p^2\tau & 1 + \frac{1}{2}p\tau \end{pmatrix},$$

si $\beta = 0$. Dans les deux cas, la trace évaluée au point $\tau = 2i\pi$ est $2\cos(\pi\beta)$. De façon analogue, l'intégrale au long de γ_2 est ν^p où ν est le générateur du centre de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

Dans notre cas, $\beta = n/m$ et la trace du stabilisateur locale de l'action autour du plan $\{z_3 = 0\}$ est $2\cos\big(\pi[p + n/m]\big)$. Puisque la trace d'un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ d'ordre k est $2\cos(2\pi r/k)$ avec $(r, k) = 1$ alors, si m est impair, le stabilisateur autour de α est d'ordre impair si et seulement si $p \equiv n \mod 2$. Ceci prouve la Proposition 9.

7.3. *Quelques surfaces remarquables.* — Chez les algèbres (35) le champ N_a peut s'exprimer, en dehors du plan $\{z_3 = 0\}$, comme combinaison linéaire des autres :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_a = {} & e^{-z_1}z_3^{-p}\Psi(h^+) + \big(2z_2z_3^{-p} - p\big)\Psi(g) \\ & - e^{z_1}z_3^{-p}\left(z_2 - \frac{1}{2}[p+\beta]z_3^p\right)\left(z_2 - \frac{1}{2}[p-\beta]z_3^p\right)\Psi(h^-) \end{aligned}$$

et, de cette sorte, il n'est dans l'espace vectoriel engendré par $\Psi(h^+)$ et $\Psi(g)$ qu'en restriction aux surfaces

$$\mathscr{S}_\pm = \left\{z_2 = \tfrac{1}{2}[p \pm \beta]z_3^p\right\}, \tag{53}$$

qui intersectent transversalement la surface $\{z_3 = 0\}$. Si $\beta \in \mathbf{Z}$, les champs $\Psi(g)$ et $\Psi(h^+)$ ont une intégrale première commune dans la fonction

$$F = z_3^{-\beta} \frac{z_2 - \frac{1}{2}[p+\beta]z_3^p}{z_2 - \frac{1}{2}[p-\beta]z_3^p}$$

qui satisfait $N_a \cdot F = -\beta F$ et $N_b \cdot F = -\beta$. La surface de niveau $F^{-1}(c)$ est invariante sous l'action du champ $N_a - cN_b$ et intersecte transversalement le plan $\{z_3 = 0\}$. Elle peut se paramétriser par

$$z_2 = \frac{1}{2} z_3^p \left(p + \beta \frac{1 + cz_3^\beta}{1 - cz_3^\beta} \right). \tag{54}$$

8. Variétés quasihomogènes

L'étude que l'on vient de présenter rend compte de la théorie locale des actions de $SL_2(\mathbf{C})$ sur les variétés de dimension trois. À partir de ces modèles locaux, que peut-on dire sur les actions holomorphes globales de $SL_2(\mathbf{C})$? Dans un cadre général, on peut se poser la question suivante : *Étant donné un groupe de Lie* G *et un espace homogène* $M = \Gamma \backslash G$, *sur lequel* G *agit holomorphiquement à droite, existe-t-il un espace analytique* Z, *muni d'une action holomorphe à droite de* G, *et d'un plongement équivariant de* M *dans* Z *?* Les travaux de Huckleberry et Oeljeklaus [25] abordent cette problématique dans les cas où $Z \backslash M$ est un point isolé et dans les cas où Z est une variété compacte et où $Z \backslash M$ est une courbe. Leurs résultats ont été généralisés par Lescure [30] dans le cas où Z est un espace analytique et $Z \backslash M$ est de dimension 1. On étudie ici ce problème dans le cas où Γ est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbf{C})$ et où Z est une variété. Citons les travaux de Nakano et Kebekus [38,27], qui étudient les variétés projectives de dimension 3 munies d'une action algébrique de $SL_2(\mathbf{C})$. Signalons que F. Lescure a prouvé que pour certains groupes discrets $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{C})$ dont $SL_2(\mathbf{Z})$, l'espace homogène $\Gamma \backslash SL_2(\mathbf{C})$ n'admet pas de compactification équivariante [31].

On commence par les cas où la dimension de Z est petite. En dimension 1, la droite projective est la seule courbe sur laquelle $SL_2(\mathbf{C})$ agit non-trivialement. De façon équivalente, le groupe affine est, à conjugaison près, le seul sous-groupe fermé de $SL_2(\mathbf{C})$ de dimension 2 (son normalisateur est trivial). En dimension 2 on retrouve le résultat suivant (voir [3], voir aussi [25,30]) :

Proposition **12.** — *Les seules surfaces complexes compactes où* $SL_2(\mathbf{C})$ *agit sans points fixes sont, à un biholomorphisme équivariant près,*

- $\mathbf{CP}^2$ *avec l'action de* $PSO_3(\mathbf{C})$ *provenant de l'action de* $SO_3(\mathbf{C})$ *sur* $\mathbf{C}^3$, *avec une conique invariante d'auto-intersection* 4 *;*

– $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ *avec l'action diagonale, avec la diagonale comme courbe invariante d'auto-intersection* 2 *;*
– *les surfaces de Hirzebruch* F_k *($k > 0$), comme compactifications équivariantes des fibrés* $\mathrm{O}(k) \to \mathbf{CP}^1$*, avec la section nulle et la section à l'infini comme courbes invariantes, d'auto-intersections* k *et* $-k$ *;*
– *pour une courbe compacte* Σ*, l'action sur* $\Sigma \times \mathbf{CP}^1$*, triviale sur le premier facteur et homographique sur le deuxième (tout point de la surface est sur une courbe invariante d'auto-intersection nulle) ;*
– *une* surface de Hopf homogène*, le quotient de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ *par le sous-groupe fermé*

$$\mathrm{C}_\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} ; \;\; \lambda \in \Lambda, s \in \mathbf{C} \right\},$$

où $\Lambda \subset \mathbf{C}^*$ *est un sous-groupe discret cocompact. La surface est une fibration elliptique équivariante* $\Sigma \to \mathbf{CP}^1$ *(sans singularités) de base rationnelle et l'action est transitive.*

Preuve. — Soit S une telle surface. On a trois cas à traiter, selon la nature de la composante neutre du groupe qui fixe un point de la surface (dans une orbite de dimension maximale) :

Affine. Soit $p \in \mathrm{S}$ un point fixé par le groupe affine. L'action est localement modelé sur celle induite par l'algèbre engendrée par $\mathrm{X}_0(0)$ et $\mathfrak{aff}(0)$. Soit $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$ le lieu de points fixés par le groupe affine. Il s'agit d'une sous-variété compacte qui est transverse aux orbites de l'action et qui intersecte les orbites sur un seul point, de sorte que S est une fibration rationnelle de base T. L'image de T sous l'action des éléments du groupe donne un deuxième feuilletage sur S qui est transverse à la fibration et donne une connexion plate pour la fibration et donc S est isomorphe de manière équivariante à $\mathrm{T} \times \mathbf{CP}^1$. *Stabilisateur parabolique.* Le quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ par le groupe $\Phi(h^+)$ est le fibré $\mathrm{O}(1)$ privé de la section nulle, qu'on notera $\mathrm{O}^*(1)$. Le normalisateur de $\Phi(h^+)$ est le groupe affine. Le conormalisateur est isomorphe à $\mathbf{C}^*$, agissant sur $\mathrm{O}^*(1)$ en préservant les fibres et dilatant les vecteurs – ceci commute naturellement avec la fibration et avec l'action sur $\mathrm{O}^*(1)$. Les variétés homogènes de dimension 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ où le stabilisateur d'un point contient $\Phi(h^+)$ s'identifient aux quotients de $\mathrm{O}^*(1)$ sous l'action d'un groupe discret $\Lambda \subset \mathbf{C}^*$. Si Λ est infini alors Λ est le groupe engendré par une racine de l'unité et un $\alpha \in \mathbf{C}^*$ avec $|\alpha| < 1$. Le quotient de chaque fibre est un courbe elliptique et donc $\Lambda\backslash\mathrm{O}^*(1)$ est une fibration elliptique équivariante. Si Λ est fini d'ordre n alors c'est le groupe de racines de l'unité d'ordre n et le quotient s'identifie à $\mathrm{O}^*(n)$. Chacune des fibres est isomorphe à $\mathbf{C}^*$ et les fibres sont caractérisées par le fait qu'ils sont les points fixes de l'action d'un groupe à un paramètre parabolique. Le fibré $\mathrm{O}^*(n)$ a deux bouts car il se compactifie de façon équivariante sur F_n. Il faut montrer qu'il s'agit de la seule compactification possible. Soit M une compactification équivariante sans points fixes. Étant lisses, les composantes connexes du complémentaire de l'orbite ouverte dans M sont isomorphes à $\mathbf{CP}^1$. D'après les résultats locaux du début de la Section 6, au voisinage d'un point p de l'une de ces composantes, l'action est de la forme (18) pour un certain $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Dans ces coordonnées, un conjuguée du groupe affine fixe ponctuellement une droite $\{z_1 = c\}$ et la compactification de M est obtenue en rajoutant un point sur chaque bout de chaque fibre. Il existe donc un homeomorphisme équivariant $f : F_n \to M$ qui est un biholomorphisme en restriction à l'orbite de dimension 2. Puisqu'il est holomorphe en restriction à l'espace (locale) des fibres et en restriction à chaque fibre, c'est un biholomorphisme. *Tore multiplicatif.* Le conormalisateur d'un tore multiplicatif es isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On a deux surfaces qui n'ont qu'un seul bout, puisqu'elles se compactifient sur $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ ou sur $\mathbf{CP}^2$ (le dernier cas est obtenu en prenant le quotient de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ sous l'involution – équivariante – qui permute les deux facteurs). Dans l'orbite ouverte de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ les feuilletages horizontal et vertical sont définis dynamiquement. Ces feuilletages se confondent en un seul dans le quotient $\mathbf{CP}^2$. Un répétition des arguments précédents prouve, à travers ces feuilletages, que les compactifications sont uniques. $\square$

On passe maintenant à la dimension trois. Ayant le Théorème D en vue, on commence par prouver l'existence d'une compactification biéquivariante de $SL_2(\mathbf{C})$. Considérons, dans $\mathbf{CP}^4$ la quadrique $K = \{x_1x_4 - x_2x_3 - x_0^2 = 0\}$. Il s'agit d'une variété algébrique lisse, avec un plongement de $SL_2(\mathbf{C})$ donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [1 : a : b : c : d].$$

Les actions multiplicatives à droite et à gauche de $SL_2(\mathbf{C})$ sur lui même s'étendent algébriquement sur K, qui est donc une compactification biéquivariante de $SL_2(\mathbf{C})$ – on verra plus loin qu'elle est la seule, au delà des symétries évidentes. Les deux actions de $SL_2(\mathbf{C})$ sur K seront respectivement notées Φ_d (à droite) et Φ_g (à gauche). L'image de $SL_2(\mathbf{C})$ dans K sera notée Θ. Son complémentaire est une quadrique lisse, doublement réglée, qui sera notée B. Puisque les actions sont algébriques, elles préservent les deux réglages. Les deux droites dans B qui incident sur le point de coordonnées $[0 : 0 : 0 : 0 : 1]$ sont données par l'intersection du plan tangent $\{x_1 = 0\}$ avec $\{x_2 = 0\}$ et avec $\{x_3 = 0\}$. La première est invariante sous Φ_g ; la deuxième, sous Φ_d. L'action à gauche est triviale sur l'un des facteurs ; l'action à droite, sur l'autre. On supposera, en écrivant $B = \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$, que Φ_g agit sur le premier facteur et Φ_d sur le deuxième. L'action de $\mathbf{C}^*$ sur K provenant de l'action à droite du groupe diagonal est donnée par

$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto \left[\alpha x_0 : \alpha^2 x_1 : x_2 : \alpha^2 x_3 : x_4\right].$$

Les limites de cette action lorsque α tends vers 0 et vers ∞ sont données par des fonctions rationnelles :

$$\Pi_0 = [0:0:x_2:0:x_4],\ \ \Pi_\infty = [0:x_1:0:x_3:0].$$

La première et invariante sous l'action à droite de h^+ et la deuxième sous l'action à droite de h^-. La fonction rationnelle Π_0 prends valeurs dans une courbe $\mathscr{C}_0$, en restriction à laquelle elle est l'identité. De façon analogue, Π_∞ prends valeurs dans la courbe $\mathscr{C}_\infty$ et $\Pi_\infty|_{\mathscr{C}_\infty}$ est l'identité. Les lieux d'indétermination de Π_0 et Π_∞ sont, respectivement, les courbes $\mathscr{C}_\infty$ et $\mathscr{C}_0$.

L'intersection de K avec la carte affine $\{z_4 \neq 0\}$ peut se paramétriser par $j : \mathbf{C}^3 \to \mathrm{K}$, $j(z_1, z_2, z_3) = [z_2 : z_2^2 - z_1 z_3 : z_3 : -z_1 : 1]$. L'action locale maximale à droite induite sur $\mathbf{C}^3$ est donnée par

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \left(\frac{az_1 - c}{-bz_1 + d}, \frac{z_2}{-bz_1 + d}, z_3 + \frac{bz_2^2}{-bz_1 + d}\right).$$

C'est celle engendrée par l'algèbre A_1. L'action à gauche est donnée par

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \left(z_1 - \frac{cz_2^2}{cz_3 + d}, \frac{z_2}{cz_3 + d}, \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}\right). \tag{55}$$

Cette action est engendrée par l'algèbre

$$\mathrm{N}(\mathsf{A}_1) = \left\langle z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 z_3 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^2 \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{1}{2} z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\rangle. \tag{56}$$

Puisque les champs de $\mathrm{N}(\mathsf{A}_1)$ sont linéairement indépendants dans l'ouvert où les champs de A_1 le sont, tout champ de vecteurs défini dans un voisinage de l'origine qui commute avec les champs de A_1 est dans $\mathrm{N}(\mathsf{A}_1)$ car, dans un ouvert de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, tout champ qui commute avec un champ invariant à gauche est invariant à droite. Dans la carte, B est donnée par $\{z_2 = 0\}$. Les deux réglages correspondent aux surfaces de niveau de z_1 et z_3. Dans cette carte, on a $\Pi_0 = z_3$ et $\Pi_\infty = z_3 - z_2^2/z_1$.

Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ un groupe discret. Soit $\phi : \Gamma \times \mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$ l'action à gauche (4). Notons $\Omega \subset \mathbf{CP}^1$ le domaine de discontinuité de ϕ et $\Lambda \subset \mathbf{CP}^1$ l'ensemble limite. Prouvons que le domaine de discontinuité de l'action à gauche de Γ sur K (via Φ_g) est l'ouvert invariant $\Omega_\Gamma = \Theta \cup (\Omega \times \mathbf{CP}^1)$. Soit $p \in \mathrm{B}$ et supposons que p n'est pas dans le domaine de discontinuité de l'action à gauche de Γ sur K. Alors, il existe une suite $\{\epsilon_i\} \subset \mathrm{K}$ et une suite $\{h_i\} \subset \Gamma$ telles que $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = p$ et $\lim_{i\to\infty} \Phi_g(h_i, \epsilon_i) = p$. Supposons, sans perte de généralité, que p est le point qui, dans la carte j, a les coordonnées $(0, 0, 0)$. Remarquons que, au voisinage de ce point, la fonction z_3 est un facteur local de l'action à gauche, au sens où, pour tout q suffisamment proche de p, $z_3 \circ \Phi_g(h, q) = \phi(h, z_3(q))$ pour tout $h \in SL_2(\mathbf{C})$ où cette expression a un sens. De cette sorte, $\lim_{i=\infty} z_3(\epsilon_i) = 0$ et $\lim_{i\to\infty} z_3 \circ \Phi_g(h_i, \epsilon_i) = 0$, ce qui prouve que p est dans $\Lambda \times \mathbf{CP}^1$. De cette sorte, le quotient $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ est un espace analytique (Hausdorff). On le notera Z_Γ ; on l'appellera la *complétion équivariante standard* de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$. Cet espace est régulier dans le complémentaire d'un nombre fini de courbes invariantes qui proviennent des éléments cycliques de Γ. Pour chaque composante connexe compacte de $\Gamma\backslash\Omega$ on a un sous-espace analytique compact de Z_Γ qui compactifie partiellement $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ le long d'un bout. Sous les hypothèses du Théorème D, à savoir, qu'il y a autant de composantes connexes compactes de $\Gamma\backslash\Omega$ que de bouts de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$, l'espace Z_Γ est compact.

Remarque **3.** — D'un point de vue intrinsèque, à chaque bout d'un espace $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ on peut associer l'espace des feuilles du feuilletage affine qui s'échappent par ce bout. Si cet espace est une courbe, il est naturellement muni d'un structure projective. Le résultat précédent affirme que si un espace homogène a un nombre fini de courbes compactes à l'infini et les structures projectives sont simultanément uniformisables alors on peut compactifier partiellement la variété le long des bouts associés à ces courbes.

Remarque. — On a récemment appris que A. Fujiki utilise le même procédé pour construire des variétés quasihomogènes de $SL_n(\mathbf{C})$ [12]. Il étudie les propriétés des variétés complexes compactes ainsi obtenues.

Les espaces analytiques ainsi construits peuvent se désingulariser de façon équivariante. Détaillons cette désingularisation, afin de comprendre comment les formes normales du Théorème C se recollent les unes aux autres dans celle-ci. On suit les notations de [22]. Supposons d'abord que Γ ne contient pas le centre de $SL_2(\mathbf{C})$. Dans la carte j, l'action à gauche d'un élément non-trivial d'ordre fini fixant l'origine est conjuguée à

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, \omega z_2, \omega^2 z_3) \tag{57}$$

avec ω une racine primitive de l'unité d'ordre impair, $n = 2m - 1$. Cette transformation fixe ponctuellement la droite $\{z_2 = 0, z_3 = 0\}$, au voisinage de laquelle on défini le morphisme injectif et invariant $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, z_3^n, z_2^n, z_2^{n-2} z_3)$. Il prend valeurs dans l'espace analytique

$$\mathbf{C} \times A_{n,2} = \left\{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in \mathbf{C}^4;\ \zeta_4^n = \zeta_2 \zeta_3^{n-2}\right\},$$

qui est le produit d'une singularité de surface de Hirzebruch-Jung avec une courbe. Cet espace a une résolution bien connue. On considère trois copies de $\mathbf{C}^3$, à l'aide desquelles on donne les cartes d'une désingularisation de $\mathbf{C} \times A_{n,2}$:

$$(\xi, u_0, v_0) \mapsto \left(\xi, u_0^{2m-1}v_0^2, v_0, u_0v_0\right)$$
$$(\xi, u_1, v_1) \mapsto \left(\xi, u_1^2v_1, u_1v_1^m u_1 v_1^{m-1}\right)$$
$$(\xi, u_2, v_2) \mapsto \left(\xi, u_2, u_2^m v_2^{2m-1}, u_2^{m-1}v_2^{2m-3}\right).$$

Ces trois copies de $\mathbf{C}^3$ se recollent (sur des ouverts convenables) selon les règles

$$(\xi, u_1, v_1) = \left(\xi, u_0^m v_0, u_0^{-1}\right), \qquad (\xi, u_2, v_2) = \left(\xi, u_1^2 v_1, u_1^{-1}\right).$$

Le transformé strict de l'origine des coordonnées est donné par l'union des deux courbes rationnelles $\{v_0 = 0, u_1 = 0\}$ et $\{v_1 = 0, u_2 = 0\}$. Dans ces coordonnées les champs qui engendrent A_1 sont donnés par $\partial/\partial\xi$ et, selon le cas,

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi} - u_0\frac{\partial}{\partial u_0} + \frac{n}{2}v_0\frac{\partial}{\partial v_0}, \quad \xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} + (-2\xi u_0 + 1)\frac{\partial}{\partial u_0} + n\xi v_1\frac{\partial}{\partial v_0} \;\; ;$$
$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{2}u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + v_1\frac{\partial}{\partial v_1},$$
$$\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} + u_1\left(-\xi + \frac{n+1}{2}v_1\right)\frac{\partial}{\partial u_1} + v_1(2\xi - v_1)\frac{\partial}{\partial v_1} \;\; ;$$
$$\text{ou} \quad \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}v_2\frac{\partial}{\partial v_2}, \quad \xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} + nu_2^2v_2^2\frac{\partial}{\partial u_2} + v_2\left(\xi - \frac{n+1}{2}u_2v_2^2\right)\frac{\partial}{\partial v_2}.$$

Dans la première carte on trouve l'algèbre $\mathsf{S}(\frac{n}{2})$. Dans la deuxième, dans les coordonnées $(\xi - \frac{1}{2}v_1, \frac{n}{2}v_1, u_1)$, l'algèbre $\mathsf{D}(-\frac{1}{2}; n)$. Dans la troisième carte on trouve l'algèbre $\mathsf{C}_1(1; n)$ dans les coordonnées $(\xi - \frac{1}{2}u_2v_2^2, v_2, \frac{n}{2}u_2)$.

Supposons maintenant que Γ contient le centre de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Soit $\mathbf{P}\Gamma$ son quotient par le centre. Le lieu de points fixes de l'action (à droite ou à gauche) du centre sur K est B. Le quotient est donc une variété, qu'on notera $\mathbf{P}$K. Il s'agit d'une compactification biéquivariante de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Les quotients de tous les champs de vecteurs de K sont bien définies dans $\mathbf{P}$K. Dans la carte j, l'involution qui engendre l'action du centre est donnée par $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, -z_2, z_3)$. L'image de A_1 sous cette involution est l'algèbre A_2. Dans cette même carte, le quotient de $\mathrm{N}(\mathsf{A}_1)$ est

$$\mathrm{N}(\mathsf{A}_2) = \left\langle z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + z_3^2\frac{\partial}{\partial z_3}, z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\rangle.$$

L'action à gauche de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ engendrée par cette dernière est explicitement donnée par

$$\left(z_1 - \frac{cz_2}{cz_3 + d}, \frac{z_2}{(cz_3 + d)^2}, \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}\right).$$

L'action d'un élément périodique qui fixe l'origine est localement donnée par

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, \omega z_2, \omega z_3),$$

avec ω une racine primitive de l'unité d'ordre n (on n'exclut pas le cas $n = 1$). Le quotient sous cette action est donné par l'espace analytique

$$\mathbf{C} \times A_{n,1} = \left\{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in \mathbf{C}^4;\ \zeta_4^n = \zeta_2\zeta_3^{n-1}\right\},$$

via $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, z_3^n, z_2^n, z_3 z_2^{n-1})$. Les deux cartes de la désingularisation de cet espace sont

$$(\xi, u_0, v_0) \mapsto \big(\xi, u_0^n v_0, v_0, u_0 v_0\big),$$
$$(\xi, u_1, v_1) \mapsto \big(\xi, u_1, u_1 v_1^n, u_1 v_1^{n-1}\big).$$

Ces copies de $\mathbf{C}^3$ s'identifient suivant le collage $(\xi, u_1, v_1) = (\xi, u_0^n v_0, u_0^{-1})$. Le transformé de l'origine est donné par le diviseur $\{v_0 = 0, u_1 = 0\}$. Dans ces coordonnées, l'image du troisième champ de A_2 est, respectivement,

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi} - u_0\frac{\partial}{\partial u_0} + nv_0\frac{\partial}{\partial v_0}, \quad \xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} + (-2\xi u_0 + 1)\frac{\partial}{\partial u_0} + 2n\xi v_0\frac{\partial}{\partial v_0}\ ;$$
$$\text{ou} \quad \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + v_1\frac{\partial}{\partial v_1}, \quad \xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} + nu_1v_1\frac{\partial}{\partial u_1} + v_1(2\xi - v_1)\frac{\partial}{\partial v_1}.$$

Dans la première carte on a une algèbre $\mathsf{S}(n)$ (Proposition 8). Dans la deuxième, dans les coordonnées $(\xi - \frac{1}{2}v_1, nv_1, u_1)$, l'algèbre $\mathsf{E}(2n)$. Si $n = 1$ on obtient l'éclatement d'une orbite unidimensionnelle de A_2.

On note $\widetilde{Z_\Gamma}$ cette désingularisation de Z_Γ. On vient de prouver la partie « si » du Théorème D. Il faut encore savoir s'il existe des groupes Γ tels que $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ admet une compactification équivariante sans que l'espace analytique Z_Γ soit compact et il faut décrire aussi la relation entre deux compactifications équivariantes d'un même espace homogène. On commence notre étude « bout à bout » :

Proposition **13.** — *Si* M *est une variété complexe connexe avec une action locale maximale à droite de* $SL_2(\mathbf{C})$ *avec une orbite ouverte et* $\Sigma \subset M$ *est une composante connexe compacte de l'espace analytique où l'action n'est pas localement libre, alors :*

1. *Si* Σ *n'a pas de courbe invariante alors* Σ *est une surface de Hopf homogène. Pout tout voisinage de* Σ *suffisamment petit il existe un ouvert d'un quotient de* K *sous l'action à gauche d'un sous-groupe discret de* $SL_2(\mathbf{C})$ *tel que les orbites ouvertes s'identifient de façon équivariante (en particulier, le bout compactifié par* Σ *admet une compactification avec des orbites unidimensionnelles).*
2. *Si* Σ *a une orbite unidimensionnelle alors* M *peut être modifiée biméromorphiquement de façon équivariante au voisinage de* Σ *pour identifier ce voisinage, après modification, avec le quotient d'un ouvert de* K *sous l'action à gauche d'un sous-groupe discret de* $SL_2(\mathbf{C})$.

Composantes sans courbes invariantes. — Dans ce cas Σ est une surface de Hopf homogène (Proposition 12). Soit $E \subset \Sigma$ l'une des fibres de la fibration et considérons $\mathrm{U} \subset \mathrm{M}$ un voisinage tubulaire suffisamment petit de E. On notera $\Lambda \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ le stabilisateur local de l'orbite ouverte au voisinage de Σ. Le stabilisateur d'un point de E contient un sous-groupe unipotent et donc, dans des coordonnées convenables, l'algèbre est l'une des algèbres (35) au voisinage de la courbe $\ell = \{z_2 = 0\} \cap \{z_3 = 0\}$. Il existe donc une application développante $\mathscr{D} : (\widetilde{\mathrm{U}}, \widetilde{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{C}^3, \ell)$ qui établit un isomorphisme au niveau des algèbres de Lie. L'image inverse de $\partial/\partial z_1$ (qui engendre l'action de $\Phi(g)$ au voisinage de ℓ) est le relèvement d'un champ dans U qui préserve la courbe E. Ce champ donne une structure uniformisable sur E, de sorte que l'on peut retrouver l'algèbre au voisinage de E en prenant le quotient d'un voisinage de ℓ sous l'action naturelle de $\pi_1(\mathrm{E})$. Les cas où l'algèbre avait une symétrie telle que le quotient de ℓ était une courbe elliptique ont étés décrits dans la Section 7.1. On a vu que les feuilles du feuilletage affine qui s'échappent par le bout de l'espace homogène partiellement compactifié par Σ sont une courbe elliptique avec une structure uniformisable. D'après la Remarque 3, il existe une compactification partielle le long de ce bout qui est le quotient d'un ouvert convenable de K.

Composantes avec courbes invariantes. — On commence par éclater toutes les courbes invariantes dans Σ qui ne sont pas réduites, jusqu'à ce que toutes les courbes invariantes le soient (on note encore Σ l'espace analytique correspondant). Ces composantes irréductibles sont (intrinsèquement) les surfaces avec courbes invariantes signalées dans la Proposition 12. Soit $\Sigma_0 \subset \Sigma$ la composante de dimension 2 du sous-espace analytique de Σ où le rang de l'action est 1. Les courbes invariantes sur les points lisses de Σ qui sont dans Σ_0 sont décrites par les algèbres A_1, A_2 du Théorème C. Les autres courbes invariantes dans la partie lisse de Σ sont décrites par l'algèbre B, où la courbe invariante est isolé et se trouve dans l'adhérence d'une orbite de dimension 2 dont le stabilisateur est un sous-groupe unipotent. L'action au voisinage des points singuliers de Σ est localement donnée par les algèbres Z du Théorème C et les surfaces s'intersectent transversalement. Les résultats de la Proposition 12, et l'information du Tableau 1 nous placent dans le cadre suivant :

– Deux surfaces de Hirzebruch s'intersectent suivant une courbe modelé sur une algèbre de type F ou G. Les auto-intersections de la courbe dans les deux surfaces ont des signes opposés.
– Une surface de Hirzebruch intersecte $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ suivant une algèbre $\mathsf{D}(\mu; m)$ avec $\mu \neq 0$. L'auto-intersection de la courbe dans la surface de Hirzebruch est négative.
– Σ_0 intersecte une surface de Hirzebruch suivant une algèbre C_i ou H. L'auto-intersection de la courbe dans la surface de Hirzebruch est positive
– Σ_0 intersecte $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ suivant le modèle E.

À chaque surface irréductible on peut associer la classe de conjugaison du stabilisateur de l'action autour de la surface. Comme on l'a vu dans la Sous-section 6.3 :

– le stabilisateur autour de Σ_0 est dans le centre ;
– le stabilisateur autour d'un surface de Hirzebruch qui intersecte Σ_0 est parabolique si $m = \infty$ et non-parabolique si $m \neq \infty$;
– les stabilisateurs autour de deux surfaces de Hirzebruch qui s'intersectent sont simultanément paraboliques (si $m = \infty$) ou non-paraboliques (si $m \neq \infty$) ;
– le stabilisateur autour d'une surface $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ est non-parabolique ;
– le stabilisateur autour d'une surface de Hirzebruch qui a une courbe invariante localement modelée sur l'algèbre B est non-parabolique.

De cette sorte,

– Σ_0 est vide et Σ est un cycle de surfaces de Hirzebruch ;
– Σ_0 est connexe et on y a un nombre fini de courbes invariantes où commence une chaîne (éventuellement vide) de surfaces de Hirzebruch qui fini dans :
  – la surface de Hirzebruch F_1 qui a une courbe de type B sur l'extrémité libre ;
  – une copie de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ qui se colle à l'extrémité libre de la dernière surface de Hirzebruch sur une algèbre D ;
  – une copie de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ qui se colle directement à Σ_0 suivant le modèle E.

  Dans ces cas les formes normales au voisinage des courbes invariantes sont toutes non-paraboliques.

Lorsqu'il y a une surface de Hirzebruch F dans Σ, on peut lui associer un entier strictement positif de la façon suivante. Considérons les courbes invariantes C et C′ qui, dans F, sont d'auto-intersection négative et positive. Au voisinage de ces courbes, l'action est modelée par l'algèbre B ou par l'une des algèbres Z. On affecte ces courbes des éléments Q et Q′ de $SL_2(\frac{1}{2}\mathbf{Z})$ qui correspondent à leurs formes normales. On a deux conditions de compatibilité : sur l'auto-intersection des courbes dans les deux extrémités de la surface (leur signe est opposé) et sur la multiplicité d'invariance (l'ordre d'annulation du déterminant d'une base de l'algèbre) de la surface :

$$Q = \begin{pmatrix} q_2 & -\lambda_3 \\ q_3 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \; Q' = \begin{pmatrix} q_2' & -\lambda_3' \\ q_3' & \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2' & -\lambda_3' \\ q_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$Q'Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_2'\lambda_2 + q_3\lambda_3' & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de cette sorte, si l'on pose $A_n = \begin{pmatrix} n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $Q' = A_n Q$ pour un certain $n \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Puisque $nq_2 - q_3 = q_2'$, $n > 0$.

Prétention **1.** — Le demi-entier n ainsi affecté à une surface de Hirzebruch $\mathbf{CP}^1 \to F_k \to \mathbf{CP}^1$ est moins l'auto-intersection de l'une des fibres dans un germe de surface lisse qui intersecte transversalement F_k. En particulier, ce nombre est entier.

Preuve. — La surface F_k est une fibration équivariante au dessus de $\mathbf{CP}^1$, qui compactifie le fibré $O(k)$. Prenons une fibre E. Le sous-groupe qui préserve E est un conjuguée du groupe affine, le normalisateur du groupe qui fixe ponctuellement les points de E. On supposera, quitte à conjuguer l'action par un automorphisme intérieur, que le groupe affine est celui qui préserve E. La courbe invariante de F_k d'auto-intersection positive est modelée sur une algèbre Z ; celle d'auto-intersection négative, sur l'algèbre B ou Z. En dehors des courbes invariantes, l'action est donnée par l'algèbre P de la formule (35). Au voisinage de chaque point de E on a des germes de surfaces distinguées qui sont préservées par le groupe affine. Leur nombre est fini si le stabilisateur local de l'orbite ouverte n'est pas dans le centre et infini autrement :

- au voisinage des courbes invariantes modelées sur l'algèbre Z, les surfaces (27) si $m^2 \notin \{1,4\}$ et (30) autrement ;
- au voisinage des courbes invariantes modelées sur l'algèbre B, les surfaces (32) ;
- au voisinage des autres points, par les surfaces (53), si $\beta \notin \mathbf{Z}$, et (54) autrement.

On veut montrer que, au voisinage de chaque point de E, on peut choisir des germes de surface qui se recollent pour obtenir un germe de surface $\mathscr{S}_E$ qui intersecte transversalement F au long de E.

Soit $V \subset F_k$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire des courbes invariantes. Il se rétracte sur un fibré en cercles au dessus de $\mathbf{CP}^1$ et de cette sorte on a une suite exacte longue

$$\cdots \to \pi_2(S^1) \to \pi_2(V) \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(S^1) \to \pi_1(V) \to \pi_1(S^2) \to \cdots$$

qui deviens

$$0 \to \pi_2(V) \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z} \to \pi_1(V) \to 0.$$

Le morphisme ∂_* est injectif dont l'image est engendrée par la puissance $k^{\text{ème}}$ du générateur. On a donc $\pi_1(V) = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ et $\pi_2(V) = 0$. On considère maintenant un voisinage tubulaire W de V complètement contenu dans l'orbite ouverte. Il se rétracte sur son bord ∂W, qui est un fibré en cercles au dessus de V. La suite exacte longue associée est

$$\cdots \to \pi_2(V) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(\partial W) \to \pi_1(V) \to \pi_0(S^1) \to \cdots,$$

d'où l'on extrait la suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{Z} \to \pi_1(\partial W) \to \mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \to 0.$$

Le stabilisateur local de l'action est une représentation de $\pi_1(\partial W)$ dans $SL_2(\mathbf{C})$. Le stabilisateur *autour* de la surface est la représentation de $\pi_1(S^1)$ induite. Au voisinage d'un point de E qui est sur une courbe invariante modelée sur Z, dans les coordonnées de la forme normale, le groupe fondamental de l'orbite ouverte est commutatif et engendré par les lacets $\gamma_i(t) : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}^3 \setminus \{z_2 z_3 = 0\}$, $i = 2, 3$, $t \overset{\gamma_2}{\mapsto} \epsilon(1, 1, e^{it})$, $t \overset{\gamma_3}{\mapsto} \epsilon(1, e^{it}, 1)$. Dans ces coordonnées, ∂W est donnée, par exemple, par $\partial W = \{|z_3| = \epsilon, |z_2| \geqslant \epsilon\}$ et la projection sur V est donné par $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_1, z_2)$. Sous cette projection, γ_2 est envoyé sur un point et γ_3 sur un lacet qui engendre le groupe fondamental de E^*. Ceci réalise l'application de $\pi_1(\partial W)$ dans $\pi_1(V)$. De cette sorte, l'image de $\pi_1(\partial W)$ dans $SL_2(\mathbf{C})$ est déterminée par le stabilisateur local de l'action au voisinage de l'intersection de E avec une courbe invariante modelée sur l'algèbre Z. De cette sorte,

- si le stabilisateur n'est pas contenu dans le centre, il existe, dans $SL_2(\mathbf{C})$, un unique groupe à un paramètre qui commute avec lui. À ce groupe correspond, sur chaque point de E, un champ de vecteurs holomorphe (unique à multiplication par une constante près) qui commute avec les champs qui engendrent l'action et, à ce groupe, une surface (si le stabilisateur est parabolique) ou deux (si le stabilisateur est d'ordre fini) qui intersectent F_k transversalement.
- Si le groupe est contenu dans le centre, il existe, au voisinage de chaque point de E, une famille de surfaces, paramétrée par $\mathbf{C}$, invariantes sous l'action du groupe affine et qui intersectent transversalement F_k le long de E. La paramétrisation de cette famille change affinement lorsque l'on change de point. On a une famille de surfaces définies au voisinage de E qui intersectent F transversalement.

Notons $\mathscr{S}_E$ l'une de ces surfaces. D'après le Théorème de Camacho-Sad [7] appliqué au feuilletage induit par le champ $\Psi(g)$ relativement à la courbe invariante E, on a, dans $\mathscr{S}_E$,

$$E \cdot E = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3'}{\lambda_2'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{n\lambda_3 + \lambda_2}{\lambda_3} = -n.$$

Le nombre n est moins l'auto-intersection de l'une des fibres de la surface de Hirzebruch en restriction à la surface $\mathscr{S}_E$. C'est ce qu'on prétendait.

D'après un théorème de Nakano et Fujiki [37,13], on peut collapser les surfaces où $n=1$ suivant la fibration sur $\mathbf{CP}^1$ pour obtenir à nouveau une variété complexe qui hérite l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. La courbe invariante qui provient de la surface effondrée est encore réduite (ses valeurs propres sont λ_2 et λ_3'). En répétant ce procédé (dans un ordre arbitraire) pour toutes les surfaces où $n=1$ on obtient les facteurs de la fonction Π_2. On se retrouve avec une variété M'' où toutes les courbes invariantes sont encore réduites et où l'entier associé à chaque surface de Hirzebruch est supérieur ou égal à 2. Décrivons ces configurations :

Soit $\mathscr{L} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ le monoïde engendré par l'identité et par l'ensemble des A_n avec $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 2$. L'action par homographies de A_n sur $\mathbf{RP}^1$ est donnée par $x \mapsto n - 1/x$. L'image de $[1,\infty]$ est $[n-1,n]$, proprement contenu dans $[1,\infty]$. De cette sorte, si $\mathrm{W} \in \mathscr{L}$ et W n'est pas l'identité, $\mathrm{W}([1,\infty])$ est contenu dans l'intérieur de $[1,\infty]$ – le monoïde est libre. Si $\mathrm{W}(\infty)=\infty$ alors W est l'identité et si $\mathrm{W}(\infty) = n \in \mathbf{N}$ alors $\mathrm{W} = \mathrm{A}_n$. À une chaîne de surfaces de Hirzebruch correspond naturellement un élément de $\mathscr{L}$ donné par le produit des A_{n_i} respectifs. On se trouve dans l'une des situations suivantes :

1. Une courbe $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ est directement reliée à Σ_0, ceci se fait suivant une algèbre du type E.
2. Une chaîne de $k>0$ surfaces de Hirzebruch s'attache à Σ_0 suivant une courbe modelée sur l'algèbre $\mathsf{C}_i(q_3;m_1)$ et, dans l'autre bout, s'attache à $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ sur une courbe du type $\mathsf{D}(\mu;m_2)$. Pour $\mathrm{W} = \mathrm{A}_{n_k}\cdots\mathrm{A}_{n_1} \in \mathscr{L}$, on a
$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ q_3 & q_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} q_2 & q_2\mu \\ q_3 & q_3\mu + q_2^{-1} \end{pmatrix},$$
avec $q_3 > 0$, $q_2 \in \{1,2\}$, $i = 2/q_2$. On affirme que $k=1$ et $\mathrm{W}=\mathrm{A}_2$. On a $\mathrm{W}(\infty) = q_2/q_3 < \infty$ et, en particulier, W n'est pas l'identité. Si $\mathrm{W}(\infty) > 1$ alors $q_3 < q_2$ et donc $q_3 = 1$ et $q_2 = 2$, $\mathrm{W}(\infty) = 2$ et $\mathrm{W} = \mathrm{A}_2$, ce qui implique $\mu = -\frac{1}{2}$.
3. Une chaîne de surfaces de Hirzebruch qui s'attache à Σ_0 suivant une algèbre $\mathsf{C}_i(q_3;m)$ et qui fini avec une surface de Hirzebruch F qui a une courbe invariante modelée sur l'algèbre B, pour laquelle $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Puisque l'action du centre est effective au voisinage de la courbe B, $i=1$. On a donc un élément $\mathrm{W} = \mathrm{A}_{n_k}\cdots\mathrm{A}_{n_1}$ de $\mathscr{L}$:
$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ q_3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2}[1+q_3] & \frac{1}{2}[1-q_3] \end{pmatrix},$$
pour lequel $\mathrm{W}(1)=0$. On doit conclure que $\mathrm{W} \notin \mathscr{L}$: les chaînes de ce type disparaissent lorsque l'on effondre les surfaces de Hirzebruch susceptibles de l'être.

4. Pour un cycle de k surfaces de Hirzebruch on aurait un produit $A_{n_k} \cdots A_{n_1} \in \mathscr{X}$ égal à l'identité, ce qui est impossible. Ces cycles ne peuvent pas se produire.

Les configurations qui persistent après avoir effondré les surfaces de Hirzebruch gardent une forte ressemblance avec celles que l'on a trouvé sur les désingularisations de Z_Γ (ou sur les éclatements des courbes invariantes dans A_1 et A_2). On montre maintenant comment effondrer ces chaînes sur les courbes qui les rattachent à Σ_0 pour obtenir une compactification qui ressemble localement à la complétion équivariante standard Z_Γ. On prouvera qu'il existe un biholomorphisme équivariant entre un voisinage du cycle dans M et un voisinage du cycle correspondant dans $\widetilde{Z}_\Gamma$:

1. Considérons une surface $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ qui, dans M'', intersecte Σ_0 sur une courbe invariante C où l'action est modelée sur une algèbre $\mathsf{E}(2n)$. On veut montrer qu'il existe un voisinage de la surface qui peut s'identifier de façon équivariante à un voisinage de l'éclatement d'une courbe invariante dans A_2 (si $n = 1$) ou à un voisinage de la désingularisation d'une courbe singulière du quotient à gauche de **PK** par un sous groupe cyclique de $PSL_2(\mathbf{C})$ d'ordre n (si $n > 1$). La surface $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ intersecte Σ_0 sur une courbe rationnelle invariante C. Au voisinage de C, l'action est donnée par l'algèbre $\mathsf{E}(2n)$, qui est complètement déterminée par l'entier n. Un petit voisinage tubulaire U_1 de C dans M'' est simplement connexe et l'on peut donc, à travers une fonction ϕ, identifier de façon équivariante ce voisinage à un voisinage de la courbe rationnelle correspondante dans le modèle. De façon analogue à la Proposition 1, on peut prendre une surface $V \subset \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$, complémentaire d'un petit voisinage tubulaire de la diagonale. La surface V est simplement connexe, car on peut toujours déformer un couple de points distincts pour que le deuxième point soit l'infini, puis déformer le couple en fixant l'infini pour que le premier soit 0. Prenons un voisinage U_2 de V dans M'' qui se rétracte sur V et qui intersecte U_1 de sorte que $U_1 \cup U_2$ soit un voisinage de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$. Puisque U_2 est simplement connexe, ϕ s'étend à U_2.
2. Dans le deuxième cas, on a une surface F_1 qui intersecte Σ_0 dans une courbe rationnelle C_+ suivant une algèbre $\mathsf{C}_1(1; n)$. Sur l'autre extrémité de F_1, une surface $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ vient s'intersecter sur une courbe C_- où l'action est modelée par $\mathsf{D}(-\frac{1}{2}; n')$. D'après les résultats de la Sous-section 6.3, dans le premier modèle, le stabilisateur autour de F_1 est d'ordre n, le stabilisateur autour de Σ_0 est trivial ; dans le deuxième, le stabilisateur autour de F_1 est d'ordre n' et donc $n' = n$. Soit $V_+ \subset F_1$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire de C_- et V_- le complémentaire d'un voisinage tubulaire de V_+. Ces deux ouverts sont simplement

connexes, puisque $F_1 \setminus C_\pm$ est un fibré en droites au dessus de $\mathbf{CP}^1$. Considérons un épaississement $U_\pm$ de $C_\pm$. Puisque les formes normales aux voisinages de $C_\pm$ dans M'' et de la courbe correspondante dans le modèle coïncident, on a un biholomorphisme équivariant $\phi_\pm$ défini dans $U_\pm$ qui prends valeurs dans le modèle. L'intersection de U_+ et U_- est simplement connexe (car F_1 est la première surface de Hirzebruch). La transformation $\phi_+^{-1} \circ \phi_-$ appliqué à un point d'une fibre E de F_1 a pour image un point qui est toujours dans E (chaque fibre a un groupe qui la préserve). Si ce point n'est pas le même (si ϕ_+ et ϕ_- ne coïncident dans leur intersection), on peut modifier ϕ_+ au voisinage de C_+ par l'action du champ semi-complet N_a de la formule (26), qui commute avec l'action et qui agit transitivement sur E^*. Après cette modification, ϕ_+ et ϕ_- coïncident dans l'intersection de leurs domaines de définition et donnent lieu à une fonction ϕ défini dans $U_+ \cap U_-$. Comme précédemment, ϕ s'étend au voisinage de $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$.

En effondrant ces chaînes sur les courbes de Σ_0 auxquelles elles sont attachées, on obtient un espace analytique M''' muni d'une action à droite de $SL_2(\mathbf{C})$. On notera encore $\Sigma_0 \subset M'''$ une composante connexe du complémentaire de l'orbite ouverte. C'est le produit de $\mathbf{CP}^1$ par une orbifolde $\mathscr{C}$, où les points coniques proviennent des points singuliers de M''' (les groupes fondamentaux et revêtements de $\mathscr{C}$ et Σ_0 seront pris au sens des orbifoldes). Soit U un épaississement de Σ_0 dans M''' et $p \in \Sigma_0$. Supposons que l'action du centre de $SL_2(\mathbf{C})$ dans U est effective. Au voisinage de Σ_0 l'algèbre de Lie qui engendre l'action à droite est localement modelée sur l'algèbre qui engendre l'action à droite dans K (au voisinage de B) et ses quotients sous l'action à gauche : l'ouvert (U, Σ_0) est muni d'une $(SL_2(\mathbf{C}), (K, B))$-structure. On a donc un morphisme de monodromie $\mu : \pi_1(\mathscr{C}) \to SL_2(\mathbf{C})$ et une application développante $\mathscr{D}_\mu : U_\mu \to K$ définie sur le revêtement $\Pi_\mu : (U_\mu, \widetilde{p}) \to (U, p)$ associé au noyau de la monodromie. On affirme que $\mathscr{D}_\mu$ est injective en restriction à $U \setminus \Sigma_0$. En fait, si $\mathscr{D}_\mu(q_1)=\mathscr{D}_\mu(q_2)$ et q_1 et q_2 dans $U \setminus \Sigma_0$ ne sont pas sur la même orbite du groupe $\pi_1(\mathscr{C})/\ker(\mu)$ agissant sur U_μ, on a deux points distincts $\Pi_\mu(q_i)$ dans U où l'action prends les mêmes valeurs et l'algèbre sur U ne serait pas maximale. Si $g(q_1) = q_2$ pour un $g \in \pi_1(\mathscr{C})/\ker(\mu)$ non trivial agissant sur U_μ, $\mu(g)$ fixe $\mathscr{D}_\mu(q_i)$, mais l'action d'un élément non-trivial de $SL_2(\mathbf{C})$ sur $K \setminus B$ ne fixe aucun point : $\mathscr{D}_\mu$ est injective en restriction à $U \setminus \Sigma_0$, ce qui implique qu'elle est injective en restriction à U. De cette sorte, on peut récupérer l'action sur voisinage de Σ_0 dans M''' en prenant le quotient à gauche d'un ouvert de K convenablement choisi.

Ceci fini la preuve de la Proposition 13. La Proposition suivante globalise ces résultats et décrit, sous certaines hypothèses, la relation entre deux compactifications équivariantes d'un même espace homogène :

Proposition **14.** — *Si* $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{C})$ *est un groupe discret et* $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ *admet une compactification équivariante* M *alors* Z_Γ, *la complétion équivariante standard, est compacte. Si* Γ *n'est pas contenu dans un tore multiplicatif alors les deux compactifications son biméromorphiquement équivalentes. Plus précisément, il existe une compactification équivariante* M′ *de* $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ *et deux applications holomorphes équivariantes* $\Pi_1 : M' \to M$ *et* $\Pi_2 : M' \to \widetilde{Z_\Gamma}$ *qui se factorisent comme une composition d'applications équivariantes entre variétés compactes qui effondrent une surface invariante sur une courbe invariante.*

Preuve. — Si $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{C})$ est un groupe discret, et si $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ admet une compactification partielle le long d'un bout alors l'espace homogène admet une compactification partielle le long du même bout (dans la catégorie des espaces analytiques) par le quotient d'un ouvert convenable de K sous l'action à gauche du stabilisateur (à l'infini) du bout. Pour prouver la Proposition 14, il suffit de montrer que

- Si dans une compactification équivariante M de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ les compactifications partielles le long des bouts sont toutes obtenues comme quotient d'un ouvert de K alors M est globalement uniformisable : il existe un ouvert dans K dont le quotient sous l'action à gauche de Γ est M.
- Si Γ n'est pas contenu dans un tore multiplicatif alors une compactification M de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ ne peut pas avoir une orbite bidimensionnelle compacte.

Pour prouver la première affirmation, soient Γ_1, ..., Γ_n les sous-groupes de Γ qui correspondent aux n bouts de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$. Soit $\Lambda_i \subset \mathbf{CP}^1$ l'ensemble limite de l'action à gauche de Γ_i, Λ l'ensemble limite de l'action de Γ sur $\mathbf{CP}^1$. On a $\Lambda_i \subset \Lambda$. Soit Ω_i une composante connexe de $\mathbf{CP}^1 \setminus \Lambda_i$ associée à la compactification du bout Γ_i. On affirme que si $g(\Omega_i) \cap \Omega_j \neq \emptyset$ pour $g \in \Gamma$, alors $i = j$ et $g \in \Gamma_i$. Supposons, par l'absurde, que $x \in g(\Omega_i) \cap \Omega_j$. Soit $\{y_i\}$ une suite dans $K \setminus B$ qui tend vers x. Dans $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$, l'image de la suite échappe vers l'infini par le i-ème et j-ème bout et donc $i = j$. Soit $Y_j = \{g(y_j); g \in \Gamma\} \subset SL_2(\mathbf{C})$. Le revêtement $\Gamma_i\backslash SL_2(\mathbf{C}) \to \Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ est, par hypothèse, injectif dans un voisinage du bout associé à Γ_i. De cette sorte, les images des suites $\{y_i\}$ et $\{g(y_i)\}$ dans $\Gamma_i\backslash SL_2(\mathbf{C})$ doivent se confondre et $g \in \Gamma_i$. En particulier, si Ω_1 est dense, $\Gamma = \Gamma_1$. De cette sorte, l'action de Γ sur l'ensemble $(K \setminus B) \cup (\cup_i \Omega_i \times \mathbf{CP}^1)$ a pour quotient l'espace analytique compact Z_Γ.

Pour prouver la deuxième affirmation, soit $\Pi : \Sigma \to \mathbf{CP}^1$ une surface de Hopf homogène dans une compactification équivariante de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ et soit $\ell_0 \subset \Sigma$ une fibre de Π. D'après les résultats de la Section 7.1, l'action est, au voisinage de ℓ_0, donnée par le quotient d'une algèbre (35). Puisque la base de Π est simplement connexe, la surface Σ est *globalement* modelée par les modèles décrits. Au voisinage de ces surfaces, l'espace de feuilles du feuilletage affine est une courbe elliptique avec une structure projective uniformisable, qui ne peut s'uniformiser que par un ouvert de $\mathbf{CP}^1$ qui est le complémentaire de 1 ou 2 points. Par l'affirmation précédente, $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ a un seul bout. Deux cas apparaissent, en fonction de la valeur de β dans la forme normale de l'action au voisinage de Σ :

– Si $\beta \neq 0$ alors le stabilisateur au voisinage de Σ est contenu dans un tore multiplicatif, car l'action a $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ comme facteur.
– Si $\beta = 0$ la variété fibre sur $\mathrm{T}\mathbf{CP}^1$, et la surface de Hopf homogène fibre au dessus de la section nulle. On arrive à une contradiction puisque $\mathrm{T}\mathbf{CP}^1$ n'est pas compact, mais l'espace homogène se compactifie par Σ.

Ceci fini la preuve de la Proposition 14, qui implique la partie « et seulement si » du Théorème D.

Dans le même ordre d'idées on prouve le résultat suivant :

Proposition **15.** — *L'espace* K, *la compactification de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ *comme quadrique dans* $\mathbf{CP}^4$ *est l'unique compactification biéquivariante de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

Preuve. — Soit K' une telle compactification et notons $\Theta' \subset \mathrm{K}'$ l'orbite ouverte. L'espace analytique compact invariant $\mathrm{B}' = \mathrm{K}'\backslash\Theta'$ n'a qu'une seule composante connexe, puisque $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ n'a qu'un seul bout. Si $\mathrm{C} \subset \mathrm{K}'$ est une orbite unidimensionnelle isolée pour l'action à droite, elle est aussi invariante sous l'action à gauche. Si C est une orbite unidimensionnelle non-réduite à gauche, elle est isolée et on peut donc éclater C tout en préservant les deux actions. On peut donc supposer, après un nombre fini d'éclatements de courbes, que toutes les courbes invariantes à droite sont réduites. Si une telle courbe est isolée ou si elle nést pas dans la partie lisse de K', l'action est, au voisinage de la courbe, donnée par l'une des algèbres Z ou B du Théorème C. Or, les champs (méromorphes) qui commutent avec ces algèbres forment une algèbre de Lie de dimension 3 engendrée, dans le cas Z, par les champs (26), (28) et (29). Dans le cas Z, l'algèbre est engendrée par les champs (31). On a des champs strictement méromorphes dans les deux cas et on doit conclure que l'action à droite est localement par l'algèbre A_1 et que l'action à gauche provient de l'algèbre $\mathrm{N}(\mathsf{A}_1)$ (56). En l'absence d'orbites unidimensionelles pour l'action à gauche, B' est une surface de Hopf homogène et, au voisinage de B' l'action est donnée par l'une des algèbres (35). Une fois de plus, les champs N_a, N_b et le champ obtenu de N_b en changeant le signe de β ne peuvent pas tous être holomorphes. On doit conclure qu'un voisinage de B' dans K' est localement modelé sur un voisinage de B dans K et, dans les deux cas, l'espace de feuilles du feuilletage affine est $\mathbf{CP}^1$ avec sa structure projective. Une adaptation des arguments précédents prouve l'affirmation. □

On rappelle que si $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est un sous-groupe discret, on dit qu'une compactification équivariante M de $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est *minimale* si pour toute autre compactification équivariante M' il existe une application équivariante surjective $\Pi : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$.

Corollaire **1.** — *Si* $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ *un sous-groupe discret, sans torsion et non-élémentaire, alors* Z_Γ*, la complétion équivariante standard, est l'unique compactification minimale de* $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

Preuve. — Soit M une compactification équivariante de $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Soit $\Sigma \subset \mathrm{M}$ un espace analytique connexe invariant de dimension 2 et soit $\mathrm{C} \subset \Sigma$ une orbite unidimensionnelle non-réduite. Au voisinage de C l'espace de feuilles du feuilletage affine est isomorphe à $\mathbf{CP}^1$. Si après l'éclatement de C on a encore une courbe non-réduite C', la structure projective de l'espace de feuilles est celle de C. On peut continuer de cette sorte jusqu'à ce que l'on ait une courbe non-réduite n'ayant, sur son éclaté, que des courbes invariantes réduites. Les points où cette composante irréductible de l'espace analytique n'est pas lisse induisent sur la structure projective des points réguliers ou paraboliques (puisque Γ n'a pas de torsion), mais on a vu que les singularités paraboliques des structure projectives n'avaient pas lieu dans les variétés compactes. De cette sorte, la structure projective de la composante est triviale : le groupe Γ est élémentaire. On doit donc supposer que Σ n'a pas de courbes invariantes non-réduites. Par la preuve de la Proposition 14, il existe une application holomorphe $\Pi : \mathrm{M} \to \mathrm{Z}_\Gamma$. Si M' est une autre compactification minimale de $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ alors pour l'application holomorphe $\Pi : \mathrm{M}' \to \mathrm{Z}_\Gamma$ on a une application équivariante $\Pi' : \mathrm{Z}_\Gamma \to \mathrm{M}'$. La composition $\Pi \circ \Pi' : \mathrm{Z}_\Gamma \to \mathrm{Z}_\Gamma$ est l'identité en restriction à l'orbite ouverte. Suivant la Remarque 3 et la construction de Z_Γ, $\Pi \circ \Pi'$ s'étend holomorphiquement sur les orbites unidimensionnelles de Z_Γ, puisque ces orbites proviennent des orbites de l'action à droite du groupe affine. On doit conclure que $\Pi \circ \Pi'$ est l'identité. □

Les variétés compactes que l'on vient de construire ne sont pas kaehleriennes si Γ n'est pas fini. D'après un résultat de Berteloot et Oeljeklaus [4], le quotient d'un groupe de Lie semi-simple par un sous-groupe discret est Kaehler si et seulement si le groupe discret est fini. Ce résultat découle aussi d'un lemme de Sommese [44, Lemma II-A], qui affirme que si $\phi : \mathbf{C}^* \to \mathrm{K}$ est une paramétrisation d'une orbite d'une action holomorphe de $\mathbf{C}^*$ sur une variété kaehlerienne M et si cette action a au moins un point fixe, ϕ se prolonge dans une application holomorphe $\overline{\phi} : \mathbf{CP}^1 \to \mathrm{M}$. Ceci n'arrive pas pour l'action de $\mathbf{C}^*$ sur $\widetilde{\mathrm{Z}_\Gamma}$ induite par la restriction de l'action à droite au sous-groupe à un paramètre diagonal. Si $p \in \Theta$ est un point dont l'image sous Π_0 ou Π_∞ est dans l'ensemble limite (non-vide dès que le groupe est infini), l'orbite de l'action issue de l'image de p dans $\widetilde{\mathrm{Z}_\Gamma}$ n'admet pas un tel prolongement. Pour les mêmes raisons, ces variétés ne peuvent pas être rendues kaehleriennes en éclatant des courbes invariantes.

Il nous reste à prouver la dernière partie du Théorème E, à savoir, que si le groupe Γ n'est pas virtuellement affine alors si M est une compactification équivariante de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ alors M est de dimension algébrique nulle. Si $a(M)$ – la dimension algébrique de M – est égale à trois alors, d'après le Théorème de Moishezon et sa preuve [35, Théorème 3], M peut être rendue projective (lisse) en éclatant le lieu d'indétermination commun de ses fonctions méromorphes. Or, ce lieu d'indétermination est invariant sous l'action du groupe et se réduit à une union de courbes invariantes. Après ces éclatements on obtient une variété M', compactification équivariante de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$, qui est projective et lisse et donc kaehlerienne. Par la remarque précédente, Γ est fini et donc élémentaire. Si $a(M) \in \{1, 2\}$ alors la restriction de la réduction algébrique à l'orbite ouverte donne un facteur dynamique pour l'action. Soit N est une surface ou une courbe munie d'une action holomorphe à droite de $SL_2(\mathbf{C})$ et $f : \Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C}) \to N$ une application holomorphe surjective et équivariante. Soit $p \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ la classe de l'identité. Le stabilisateur de $f(p) \in N$ contient un sous-groupe de Lie H, qui préserve $f^{-1}(f(p))$. Au voisinage de p, les fibres de f sont localement données par les orbites de l'action à gauche de H sur $SL_2(\mathbf{C})$. Puisque ces fibres sont globalement définies, Γ est contenu dans le normalisateur de H et donc Γ est virtuellement affine. $\square$

Si Γ est suffisamment complexe, la composante neutre du groupe d'automorphismes d'une compactification équivariante de $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})$ est $SL_2(\mathbf{C})$ ou $PSL_2(\mathbf{C})$:

Corollaire **2.** — *Soit* M *une variété complexe compacte de dimension* 3. *Soit* $j : SL_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}_0(M)$ *un morphisme de groupes. Si j n'est pas surjectif alors, si l'action de* $SL_2(\mathbf{C})$ *a une orbite ouverte,* $a(M) \geqslant 1$.

Preuve. — Si l'action a une orbite ouverte, l'algèbre de Lie de champs de vecteurs $j_*(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ a rang trois sur un ouvert. Si j n'est pas surjectif alors il existe un champ de vecteurs holomorphe Y sur M qui n'est pas une combinaison linéaire des champs de j_*. Il existe donc trois fonctions méromorphes f_1, f_2 et f_3 (dont au moins une non-constante) sur M telles que $Y = f_1 j_*(h^-) + f_2 j_*(g) + f_3 j_*(h^+)$. La dimension algébrique de M n'est pas nulle. En particulier, Γ est élémentaire. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. M. J. Ablowitz, S. Chakravarty, et L. Takhtajan, Integrable systems, self-dual Yang-Mills equations and connections with modular forms, in *Nonlinear Problems in Engineering and Science* (Beijing, 1991), Science Press, Beijing (1992), pp. 1–15.
2. M. Atiyah et N. Hitchin, *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*, M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, NJ (1988).
3. W. Barth, C. Peters, et A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, Berlin (1984).

4. F. Berteloot et K. Oeljeklaus, Invariant plurisubharmonic functions and hypersurfaces on semi-simple complex Lie groups, *Math. Ann.*, **281** (1988), 513–530.

5. F. Brioschi, Sur un système d'équations différentielles, *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.*, **XCII** (1881), 1389–1393.

6. G. Cairns et É. Ghys, The local linearization problem for smooth SL(n)-actions, *Enseign. Math., II. Sér.*, **43** (1997), 133–171.

7. C. Camacho et P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, *Ann. Math. (2)*, **115** (1982), 579–595.

8. C. Camacho et P. Sad, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro (1987).

9. J. Chazy, Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme et admet des singularités essentielles mobiles, *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.*, **149** (1909), 563–565.

10. G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, deuxième édition, complétée, Gauthier-Villars, Imprimeur-libraire, Paris (1910).

11. A. R. Forsyth, *Theory of Differential Equations*, Dover Publications, New York (1959).

12. A. Fujiki, Compact non-kaehler threefolds associated to hyperbolic three-manifolds. Exposés aux congrès *Hayama Simposium on Several Complex Variables*, Hayama, Japon (2005) et *Géométrie des Variétés Complexes II*, Marseille, France (2006).

13. A. Fujiki et S. Nakano, Supplement to « On the inverse of monoidal transformation », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **7** (1971/72), 637–644.

14. W. Fulton et J. Harris, *Representation Theory*, Springer, New York (1991). A first course, Readings in Mathematics.

15. É. Ghys et J.-C. Rebelo, Singularités des flots holomorphes II, *Ann. Inst. Fourier*, **47** (1997), 1117–1174.

16. A. Guillot, Semicompleteness of homogeneous quadratic vector fields, *Ann. Inst. Fourier*, **56** (2006), 1583–1615.

17. A. Guillot, Some generalizations of Halphen's equations, en préparation (2007).

18. G.-H. Halphen, Sur certains systèmes d'équations différentielles, *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.*, **XCII** (1881), 1404–1406.

19. G.-H. Halphen, Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss, *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.*, **XCII** (1881), 856–859.

20. G.-H. Halphen, Sur un système d'équations différentielles, *C. R. Hebdomadaires Acad. Sci.*, **XCII** (1881), 1101–1102.

21. G.-H. Halphen, *Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs Applications (en trois tomes)*, Gauthiers-Villars, Imprimeur-Libraire, Paris (1886–1891).

22. P. de la Harpe et P. Siegfried, Singularités de Klein, *Enseign. Math., II. Sér.*, **25** (1979), 207–256.

23. G. Hedlund, Fuchsian groups and transitive horocycles, *Duke Math. J.*, **2** (1936), 530–542.

24. E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Dover Publications, Mineola, NY (1997). Reprint of the 1976 original.

25. A. Huckleberry et E. Oeljeklaus, *Classification Theorems for Almost Homogeneous Spaces*, Institut Élie Cartan, vol. 9, Université de Nancy (1984).

26. E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York (1944).

27. S. Kebekus, Relatively minimal quasihomogeneous projective 3-folds, *Nagoya Math. J.*, **157** (2000), 149–176.

28. I. Kra, On lifting Kleinian groups to $SL(2,\mathbf{C})$, in *Differential Geometry and Complex Analysis*, Springer, Berlin (1985), pp. 181–193.

29. A. G. Kushnirenko, An analytic action of a semisimple Lie group in a neighborhood of a fixed point is equivalent to a linear one, *Funkts. Anal. Prilozh.*, **1** (1967), 103–104.

30. F. Lescure, Compactifications équivariantes par des courbes, *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.*, **26** (1987), 1–91.

31. F. Lescure, Communication personnelle (1999).

32. F. Loray, *Structure transverse des singularités holomorphes en dimension deux complexe*, Cours d'intégration et monographies du Réseau Européen, Valladolid, Espagne, 1997, Notes du cours professé à Tordesillas.

33. A. J. Maciejewski et J.-M. Strelcyn, On the algebraic non-integrability of the Halphen system, *Phys. Lett., A*, **201** (1995), 161–166.

34. W. Magnus, *Noneuclidean Tesselations and Their Groups*, Pure Appl. Math., vol. 61, Academic Press, New York-London (1974).

35. B. G. Moĭšezon, On n-dimensional compact complex manifolds having n algebraically independent meromorphic functions. II, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **30** (1966), 345–386.

36. H. Movasati, *On elliptic modular foliations*, Prépublication IMPA (Rio de Janeiro, Brésil) (2006).
37. S. Nakano, On the inverse of monoidal transformation, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **6** (1970/71), 483–502.
38. T. Nakano, On equivariant completions of 3-dimensional homogeneous spaces of SL(2, **C**), *Jap. J. Math., New Ser.*, **15** (1989), 221–273.
39. Y. Ohyama, Differential relations of theta functions, *Osaka J. Math.*, **32** (1995), 431–450.
40. R. S. Palais, A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups, *Mem. Am. Math. Soc.*, vol. 22, Am. Math. Soc., Providence, RI (1957).
41. J. C. Rebelo, Singularités des flots holomorphes, *Ann. Inst. Fourier*, **46** (1996), 411–428.
42. J. C. Rebelo, Champs complets avec singularités non isolées sur les surfaces complexes, *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.*, **5** (1999), 359–395.
43. J. C. Rebelo, Réalisation de germes de feuilletages holomorphes par des champs semi-complets en dimension 2, *Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math.*, **9** (2000), 735–763.
44. A. J. Sommese, Extension theorems for reductive group actions on compact Kaehler manifolds, *Math. Ann.*, **218** (1975), 107–116.
45. W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology, vol. 1*, S. Levy (ed.), Princeton University Press, Princeton, NJ (1997).

A. G.
Universidad Nacional Autónoma de México,
Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca,
Av. Universidad s/n, col. Lomas de Chamilpa,
Cuernavaca, Morelos, C.P. 62210,
Mexique
adolfo@matcuer.unam.mx

Manuscrit reçu le 1 juillet 2007
publié en ligne le 19 octobre 2007.