PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

YVES BENOIST
FRANÇOIS LABOURIE

Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 76 (1992), p. 99-109
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1992__76__99_0>

SUR LES ESPACES HOMOGÈNES MODÈLES DE VARIÉTÉS COMPACTES

YVES BENOIST et FRANÇOIS LABOURIE

0. Introduction

Nous nous intéressons dans cet article aux deux questions suivantes: quels sont les espaces homogènes qui peuvent servir de modèles pour des variétés compactes? quels sont ceux qui admettent des quotients compacts? Précisons tout d'abord nos définitions.

0.1. Définitions

Soit G un group de Lie réel agissant effectivement et transitivement sur une variété $V=G/H$. Une variété M est *modelée sur* G/H, ou encore *admet une* (G, G/H) *structure* si il existe un atlas à valeurs dans G/H dont les changements de cartes sont dans G, c'est-à-dire une famille (U_i, f_i, g_{ij}) où (U_i) est une famille d'ouverts recouvrant M, f_i des difféomorphismes des U_i dans des ouverts de G/H, et g_{ij} des éléments de G tels que sur $U_i \cap U_j$ on ait $f_i = g_{ij} \circ f_j$.

Si on choisit un point de M, on montre aisément que cette donnée est équivalente à la donnée d'une paire (f, ρ) où f est un difféomorphisme local d'un revêtement galoisien de M dans G/H, appelé *développement*, et ρ une représentation du groupe fondamental Γ dans G, appelée *représentation d'holonomie*, tels que pour tout γ de Γ on ait $f \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ f$.

Nous dirons encore que G/H admet un *quotient compact* s'il existe un sous-groupe discret Γ de G agissant proprement discontinûment sans point fixe sur G/H et tel que le quotient $\Gamma \backslash G/H$ soit compact, autrement dit s'il existe un développement qui est un difféomorphisme.

0.2. Dans le cas où G est semi-simple et de type non compact, voici quelques exemples de variétés compactes modelées sur G/H, ou de quotients compacts.

(i) H est cocompact. En dehors des cas triviaux, rappelons que les surfaces de genre plus grand que 2 peuvent être munies de $(\mathrm{PSL}(3, \mathbf{R}), \mathbf{RP}^2)$ ou de $(\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C}), \mathbf{CP}^1)$ structures.

(ii) H est compact ([Bo]).

(iii) On peut remarquer ([Ku]) que $SU(1, n)/SU(n) = SO(2, 2n)/SO(1, 2n)$ en identifiant $\mathbf{C}^n$ avec $\mathbf{R}^{2n}$. En particulier, un réseau Γ de $SU(1, n)$ fournira un quotient compact de $SO(2, 2n)/SO(1, 2n)$, réseau que l'on peut ensuite déformer dans le cas de $SO(2, 2)$ ([Go]).

0.3. Nos résultats exhibent une obstruction à l'existence de variétés compactes modelées sur G/H.

Théorème 1. — *Soient* G *un groupe de Lie connexe semi-simple réel et* H *un sous-groupe unimodulaire connexe.*

S'il existe une variété compacte modelée sur G/H, *alors l'algèbre de Lie du centre de* H *ne contient pas d'éléments hyperboliques.*

En particulier,

Corollaire 1. — *Soient* G *un groupe de Lie algébrique semi-simple réel et* H *un sous-groupe algébrique et réductif.*

S'il existe une variété compacte modelée sur G/H, *alors le centre de* H *est compact.*

Remarque. — « Réductif » signifie que l'action adjointe de H dans l'algèbre de Lie de G est semi-simple.

Lorsque l'on demande un peu plus à l'application développement, on obtient des résultats plus précis.

Corollaire 2. — *Soient* G *un groupe de Lie connexe semi-simple réel à centre fini et* H *un sous-groupe unimodulaire connexe.*

S'il existe une variété compacte modelée sur G/H *telle que le développement soit à fibre finie, alors les éléments semi-simples du centre de* H *sont tous elliptiques.*

À fibre finie signifie qu'il existe N tel que le cardinal de l'image inverse de tout point est majoré par N, ce qui est en particulier le cas pour les quotients compacts.

Corollaire 3. — *Soient* G *un groupe de Lie connexe semi-simple réel à centre fini et* H *un sous-groupe réductif connexe.*

Si G/H *admet un quotient compact, alors le centre de* H *est compact.*

Il existe d'autres conditions nécessaires d'existence de quotients compacts $\Gamma\backslash G/H$ basées

- d'une part sur la notion de dimension cohomologique de Γ ([Ko1 et 2])
- d'autre part sur le principe de proportionalité de Hirzebruch ([K-O])

L'outil central de la démonstration est l'étude des fibrés en droites G-équivariants sur G/H munis d'une connexion G-invariante.

0.4. La remarque initiale de ce travail est la suivante: si X est un sous-groupe à un paramètre de G engendré par un élément hyperbolique et si G_X est le centralisateur de X alors X détermine un fibré en droites muni d'une connexion sur G/G_X dont la courbure est une forme symplectique. Par ailleurs une forme courbure d'un fibré en droites est exacte (c'est la différentielle d'une forme de connexion). On en déduit qu'aucune variété compacte ne peut être modelée sur G/G_X; en effet, la forme volume obtenue en prenant une puissance de la forme symplectique serait également exacte ce qui est interdit.

Dans le cas général, c'est-à-dire $H \subset G_X$, il nous faut affiner cette technique. Nous cherchons à nouveau à montrer que la forme volume est cohomologiquement triviale en utilisant des fibrés en droites. Cette fois-ci toute une famille de tels fibrés apparaît correspondant aux éléments hyperboliques du centralisateur de l'algèbre de Lie $\mathscr{H}$ de H; à chaque fibré nous associons une forme volume et nous montrons que pour un bon choix de fibré cette forme volume est triviale.

Dans la première partie, on étudie une certaine application φ définie sur l'ensemble des éléments semi-simples d'une algèbre de Lie semi-simple, dont les propriétés sont cruciales.

La démonstration des résultats est donnée dans la deuxième partie.

Il serait sans doute plus logique de commencer la lecture de cet article par cette dernière partie.

0.5. Dans toute la suite, les groupes seront supposés connexes. En fait, il suffit de supposer qu'ils ont un nombre fini de composantes connexes.

Cet article trouve son origine dans un travail commun avec Patrick Foulon que nous remercions ici.

1. Une application entre éléments semi-simples.

Nous allons décrire une application φ qui envoie l'ensemble des éléments hyperboliques du centralisateur de $\mathscr{H}$ dans lui-même. Le résultat important est la proposition 1.2 qui prouve que φ y est surjective.

1.1. Soit $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle et $\langle\ ,\ \rangle$ sa forme de Killing. Pour tout élément semi-simple X de $\mathscr{G}$, on note

$\mathscr{G}^X = \{ Y \in \mathscr{G} / [X, Y] = 0 \}$ le centralisateur de X,

$z^X = \{ Z \in \mathscr{G} / \forall\, Y \in \mathscr{G}^X, [Z, Y] = 0 \}$ le centre de $\mathscr{G}^X$ (tous les éléments de z^X sont semi-simples: cf. [He] IX proposition 4.6),

$W^X = [X, \mathscr{G}]$ et ω^X la forme bilinéaire sur $\mathscr{G}$ définie par $\omega^X(Y, Z) = \langle X, [Y, Z] \rangle$. La restriction de ω^X à W^X est non dégénérée. Soient $(Y_i)_{i=1,\dots,2d}$ une base de W^X

et $(Z_i)_{i=1,\ldots,2d}$ la base duale pour ω^X, c'est-à-dire telle que pour tout i, j, on a $\omega^X(Y_i, Z_j)=\delta_{ij}$.

Définition. — On pose $\varphi(X)=\sum_{i=1}^{2d}[Y_i, Z_i]$.

Lemme. — *L'application* φ *possède les propriétés suivantes:*

a) $\varphi(X)$ *ne dépend pas du choix de la base* $(Y_i)_{i=1,\ldots,2d}$.

b) *Si* σ *est un automorphisme de* $\mathcal{G}$, *alors* $\varphi(\sigma(X))=\sigma(\varphi(X))$.

c) $\varphi(z^X)\subset z^X$. *En particulier* $\varphi(X)$ *est semi-simple.*

d) *Si* X *est hyperbolique, alors* $\varphi(X)$ *l'est aussi.*

Preuve. — *a)* et *b)* sont clairs.

c) se déduit de *b)* en prenant pour σ les éléments du groupe adjoint qui centralisent X.

d) se déduit de *b)* en prenant pour σ une involution de Cartan telle que $\sigma(X)=-X$; une telle involution existe: cf. [He] IX théorème 7.2. ■

1.2. Fixons un élément hyperbolique X_0 de $\mathcal{G}$. Notons

$$\mathcal{A}=\{X\in z^{X_0}/X \text{ est hyperbolique}\}$$

et

$$\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}=\{X\in\mathcal{A}/\mathcal{G}^X=\mathcal{G}^{X_0}\}.$$

Ce dernier ensemble est un ouvert de Zariski de $\mathcal{A}$ qui contient X_0. On a vu que $\varphi(\mathcal{A})\subset\mathcal{A}$. En fait, $\varphi_{|\mathcal{A}}$ est surjective: c'est une conséquence immédiate de la proposition suivante (en l'appliquant à tout X_0 de $\mathcal{A}$) qui est le résultat crucial de cette partie.

Proposition 1.2. — *L'élément* X_0 *appartient à* $\varphi(\mathcal{A}_{\mathrm{reg}})$.

Remarque. — Nous montrerons l'inclusion $\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}\subset\varphi(\mathcal{A}_{\mathrm{reg}})$ et verrons que, en général, φ n'est ni continue, ni injective et que $\varphi(\mathcal{A}_{\mathrm{reg}})$ n'est pas inclus dans $\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$. La fin de cette partie est consacrée à la démonstration de la proposition.

1.3. Pour α dans $\mathcal{A}^*$, on note H_α l'élément de $\mathcal{A}$ tel que, pour tout X dans $\mathcal{A}$, $\alpha(H)=\langle H_\alpha, X\rangle$; on note $\mathcal{G}^\alpha=\{Y\in\mathcal{G}/\forall X\in\mathcal{A}\ [X, Y]=\alpha(X)Y\}$ l'espace de poids α et $m_\alpha=\dim\mathcal{G}^\alpha$.

Soit $R=\{\alpha\in\mathcal{A}^*\setminus\{0\}/\mathcal{G}^\alpha\neq 0\}$. On a l'égalité $\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}=\{X\in\mathcal{A}/\forall\alpha\in R\ \alpha(X)\neq 0\}$.

Lemme. — Pour tout X *dans* $\mathscr{A}_{\text{reg}}$, *on a*

$$\varphi(X) = \sum_{\alpha \in R} m_\alpha \frac{H_\alpha}{\langle H_\alpha, X \rangle}.$$

Preuve. — Soit $\{Y_i^\alpha\}$ une base de $\mathscr{G}^\alpha$ et $\{Z_i^\alpha\}$ la base de $\mathscr{G}^{-\alpha}$ duale pour ω^X. On a l'égalité

$$1 = \omega^X(Y_i^\alpha, Z_i^\alpha) = \alpha(X) \langle Y_i^\alpha, Z_i^\alpha \rangle.$$

Donc, pour tout β dans $\mathscr{A}^*$, on a

$$\beta([Y_i^\alpha, Z_i^\alpha]) = \langle [H_\beta, Y_i^\alpha], Z_i^\alpha \rangle = \alpha(H_\beta) \langle Y_i^\alpha, Z_i^\alpha \rangle = \frac{\beta(H_\alpha)}{\langle H_\alpha, X \rangle}.$$

Par conséquent

$$\beta(\varphi(X)) = \sum_{\alpha \in R} m_\alpha \frac{\beta(H_\alpha)}{\langle H_\alpha, X \rangle},$$

ce qui prouve le lemme. ■

1.4. Soit $R^+ = \{\alpha \in R / \alpha(X_0) > 0\}$ et π l'ensemble des éléments de R^+ qui ne peuvent pas s'écrire comme une somme de deux éléments de R^+.

Lemme. — L'ensemble π *est une base de* $\mathscr{A}^*$ *et tout élément de* R^+ *est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de* π.

Preuve. — C'est classique. Soit $\mathscr{A}_0$ un sous espace de Cartan de $\mathscr{G}$ contenant $\mathscr{A}$, $r: \mathscr{A}_0^* \to \mathscr{A}^*$ la projection naturelle, $\Sigma \subset \mathscr{A}_0^*$ le système des racines restreintes, B une base de Σ telle que $r(B) \subset R^+ \cup \{0\}$ et $B_0 = B \cap \operatorname{Ker}(r)$. Alors B_0 est une base de $\operatorname{Ker}(r)$ car l'orthogonal de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}_0$ est un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie semi-simple $[\mathscr{G}^{X_0}, \mathscr{G}^{X_0}]$. Donc $\pi = r(B) \setminus \{0\}$ (cf. [Wa] 1.2.4).

Le lemme est alors une conséquence facile du cas particulier bien connu où $\mathscr{A}$ est un sous-espace de Cartan (cf. [Wa] 1.1.3). ■

1.5. Soit $C^+ = \{X \in \mathscr{A} / \forall \alpha \in \pi, \alpha(X) > 0\}$ et D^+ le cône convexe ouvert engendré par $(H_\alpha)_{\alpha \in \pi}$. On a $X_0 \in C^+$ et $C^+ \subset D^+$, car, pour α, β distincts dans π, on a $\langle H_\alpha, H_\beta \rangle \leqslant 0$ (cf. [Bou] VI 1.5). Donc la proposition est une conséquence du

Lemme. — $\varphi(C^+) = D^+$.

Preuve. — Soit $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$. La base $\{H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_p}\}$ de $\mathscr{A}$ et la base duale $\{H_1, \ldots, H_p\}$ pour la forme de Killing permettent d'identifier D^+ et C^+ avec $]0, \infty[^p$.

Le lemme est alors un cas particulier de :

1.6. *Lemme.* — *Soit* R^+ *une famille finie de vecteurs non nuls de* $\mathbf{R}^p$, *contenant la base canonique* $\{e_1, \ldots, e_p\}$ *de* $\mathbf{R}^p$ *et telle que, pour tout* $v=(v_1, \ldots, v_p)$ *dans* R^+, *on a* $v_i \geqslant 0$. *Soit m une fonction sur* R^+ *à valeurs dans* $]0, \infty[$. *Alors l'application*

$$\varphi :]0, \infty[^p \to]0, \infty[^p$$

$$a=(a_1, \ldots, a_p) \mapsto \sum_{v \in \mathrm{R}^+} m_v \frac{v}{\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} v_i a_i}$$

est surjective.

Remarque. — On peut même montrer que cette application φ est injective.

Preuve. — Soit I la bijection de $]0, \infty[^p$ dans lui-même définie par

$$\mathrm{I}((a_1, \ldots, a_p)) = (1/a_1, \ldots, 1/a_p).$$

L'application $\varphi \circ \mathrm{I}$ se prolonge continûment en une application ψ de $[0, \infty[^p$ dans lui-même à laquelle on peut appliquer le lemme suivant :

1.7. *Lemme.* — *Soient* $\mathrm{C}=[0, \infty[^p$ *et, pour* $i=1, \ldots, p$,

$$\mathrm{C}_i = \{a=(a_1, \ldots, a_p) \in \mathrm{C} \ / \ a_i = 0\}.$$

Soit ψ *une application continue de* C *dans lui-même, homogène (i.e.* $\psi(tx)=t\,\psi(x)$ *pour* $t>0$ *et x dans* C) *telle que* $\psi(\mathrm{C}_i) \subset \mathrm{C}_i$, *pour* $i=1, \ldots, p$, *et telle que* $\psi^{-1}(0)=0$. *Alors* ψ *est surjective.*

Preuve. — L'ensemble $\Delta = \mathrm{C}/\{\text{homothéties}\}$ est un simplexe dont les faces sont les $\Delta_i = \mathrm{C}^i/\{\text{homothéties}\}$. L'application ψ induit une application continue de Δ dans lui-même qui respecte les faces. Une telle application est surjective.

2. Démonstration des résultats.

Le théorème principal est le théorème 1. Nous allons procéder à sa démonstration par étapes.

Précisons tout d'abord une notation. Supposons que $\mathrm{V}=\mathrm{G}/\mathrm{H}$ serve de modèle à une variété compacte M. Tout objet G-invariant de V donne naissance à un objet sur M. Ainsi si α est une forme G-invariante sur V, on notera α_1 la forme à laquelle elle donne naissance sur M. De même, si $(\mathscr{L}, \nabla)$ est un fibré en droites G-équivariant muni d'une connexion G-invariante on notera $(\mathscr{L}_1, \nabla_1)$ le fibré qui s'en déduit sur M. Si ω est la courbure de $(\mathscr{L}, \nabla)$, celle de $(\mathscr{L}_1, \nabla_1)$ est ω_1.

2.1. Traitons tout d'abord le cas où H est la composante neutre G^X du centralisateur d'un élément hyperbolique X. Montrons en premier lieu la proposition :

Proposition. — Il existe un **R***-fibré principal sur* G/G^X, *G-équivariant, muni d'une connexion également G-équivariante et dont la courbure est la forme (symplectique)* ω^X. *Nous noterons par la suite* $(\mathscr{L}, \nabla)$ *un fibré vectoriel de rang 1 et sa connexion associés à ce fibré principal.*

Preuve. — Soient $\mathscr{M}$ l'orthogonal de X dans $\mathscr{G}^X$ et M le sous-groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{M}$; il est fermé et G^X est isomorphe à $M \times \mathbf{R}$ (cf. [Wa] 1.2.4). Le fibré $G/M \to G/G^X$ est le **R**-fibré principal que nous recherchons. La 1-forme duale de X par la forme de Killing sur $\mathscr{G}$ est par construction M-équivariante. Elle donne naissance à une 1-forme de connexion sur G/M dont la forme de courbure sur G/G^X est bien ω^X. ■

Nous pouvons maintenant conclure en remarquant que $\omega_1 = \omega_1^X$ est exacte : soient s une section nulle part nulle de $\mathscr{L}_1$ (en prenant éventuellement un revêtement à deux feuillets) et β_1 la 1-forme de connexion définie, pour tout vecteur tangent η sur M, par $\nabla_\eta s = \beta_1(\eta).s$. On a l'égalité $\omega_1 = d\beta_1$. Ensuite, nous savons que ω_1 est symplectique et nous obtenons la contradiction par un argument bien connu que nous rappelons : si M est de dimension $2d$, la forme $\omega_1^{\wedge d}$ est une forme volume, mais par ailleurs c'est la différentielle de la forme $\beta_1 \wedge \omega_1^{\wedge d-1}$.

2.2. Nous nous intéressons maintenant au cas général. Soit X un élément hyperbolique du centralisateur de $\mathscr{H}$, autrement dit tel que $H \subset G^X$. Nous obtenons donc une fibration

$$\pi : V = G/H \to G/G^X.$$

En particulier, d'une part V est feuilleté par les fibres de cette fibration qui s'identifient à G^X/H, d'autre part nous pouvons construire un fibré en droites G-équivariant muni d'une connexion G-équivariante sur V, à savoir, l'image inverse du fibré sur G/G^X construit dans la section précédente.

Comme H et G^X sont unimodulaires, il existe une forme différentielle G-invariante μ sur V qui est le volume le long des orbites de G^X. On notera également ω la 2-forme image inverse sur V de la forme symplectique ω^X sur G/G^X.

Si l'on note $2d$ la dimension de G/G^X, la forme volume G-invariante de $V = G/H$ est alors $\mu \wedge \omega^{\wedge d}$. Nous allons choisir X de façon que cette forme soit exacte. Pour cela, il nous faut tout d'abord le

Lemme. — *On a l'égalité*

$$d\mu \wedge \omega^{\wedge (d-1)} = i_\xi (\mu \wedge \omega^{\wedge d})$$

où ξ *est le champ de vecteur* G-*invariant sur* V *dont la valeur au point base* v_0 *est*

$$\xi_0 = (-1)^d . \frac{1}{2} \varphi(X) \bmod \mathscr{H}.$$

Preuve. — Pour toute q-forme différentielle G-invariante ν sur $V = G/H$, sa valeur au point base v_0 sera notée $\nu_0 \in \Lambda^q ((\mathscr{G}/\mathscr{H})^*)^H$. On a l'égalité $\omega_0 = -\omega^X$.

Prenons les notations du § 1 avec $X_0 = X$. Soient $\mathscr{N}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathscr{G}^{\pm\alpha}$ et $\mathscr{S}$ un supplémentaire de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{G}^X$: $\mathscr{G}^X = \mathscr{H} \oplus \mathscr{S}$.

Soient $(X_1, \ldots, X_d)$ une base de $\mathscr{N}^+$, $(Y_1, \ldots, Y_d)$ la base de $\mathscr{N}^-$ duale pour ω^X et $(Z_1, \ldots, Z_s)$ une base de $\mathscr{S}$. La famille $(X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_d, Z_1, \ldots, Z_s)$ définit une base de $\mathscr{G}/\mathscr{H}$; on note $(X_1^*, \ldots, X_d^*, Y_1^*, \ldots, Y_d^*, Z_1^*, \ldots, Z_s^*)$ la base de $(\mathscr{G}/\mathscr{H})^*$ duale. À une constante près on peut choisir μ de façon à ce que $\mu_0 = Z_1^* \wedge \ldots \wedge Z_s^*$.

Écrivons

$$[X_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{s} a_{ij}^k Z_k \bmod (\mathscr{H} \oplus \mathscr{N}^+ \oplus \mathscr{N}^-).$$

Comme $[\mathscr{G}^X \oplus \mathscr{N}^{\pm}, \mathscr{N}^{\pm}] \subset \mathscr{N}^{\pm}$, on a l'égalité

$$(d\mu)_0 = \sum_{i,j,k} (-1)^k a_{ij}^k X_i^* \wedge Y_j^* \wedge Z_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{Z_k^*} \wedge \ldots \wedge Z_s^*.$$

Or $\omega_0 = -\sum_{i=1}^{d} X_i^* \wedge Y_i^*$. Donc

$$\begin{aligned}(d\mu \wedge \omega^{\wedge (d-1)})_0 &= \sum_{i,k} (-1)^{k+d-1} a_{ii}^k Z_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{Z_k^*} \\ &\quad \wedge \ldots \wedge Z_s^* \wedge X_1^* \wedge Y_1^* \wedge \ldots \wedge X_d^* \wedge Y_d^*. \\ &= (-1)^d . \frac{1}{2} i_{\varphi(X)} (\mu_0 \wedge \omega_0^{\wedge d}).\end{aligned}$$

Car $[X_i, Y_i] = \sum_k a_{ii}^k Z_k \bmod \mathscr{H}$. ∎

2.3. Fin de la démonstration du théorème 1.

Soit X_0 un élément hyperbolique non nul du centre de $\mathscr{H}$. On choisit, grâce à la proposition 1.2, l'élément X dans $\mathscr{A}_{\text{reg}}$ tel que $\varphi(X) = X_0$. On a alors $\xi = 0$, donc $d\mu \wedge \omega^{\wedge(d-1)} = 0$. On en déduit que la forme volume $\mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge d}$ sur M est exacte:

$$\mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge d} = d(\beta_1 \wedge \mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge (d-1)}).$$

On a donc l'égalité

$$\int_M \mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge (d-1)} = 0,$$

ce qui contredit le fait que $\mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge (d-1)}$ est une forme volume.

2.4. Preuve du corollaire 1.

Le corollaire 1 provient du fait que, d'une part le centre d'un sous-groupe réductif est constitué uniquement d'éléments semi-simples, d'autre part un sous-groupe algébrique contient la partie hyperbolique et la partie elliptique de chacun de ses éléments.

2.5. Preuve du corollaire 2.

A nouveau choisissons un élément X_0 semi-simple du centre de $\mathscr{H}$ tel que sa partie hyperbolique X_h soit non nulle. Soit par ailleurs X_e sa partie elliptique. On peut alors comme précédemment trouver un élément X hyperbolique tel que $\varphi(X) = X_h$. Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient cette fois-ci que

$$\mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge d} = d(\beta_1 \wedge \mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge (d-1)}) + \beta_1(\xi_1) \wedge \mu_1 \wedge \omega_1^{\wedge d},$$

où $\xi_0 = 1/2 . (-1)^{(d-1)} X_e \bmod \mathscr{H}$. Remarquons maintenant que, X_e étant elliptique et G à centre fini, le groupe à un paramètre engendré par X_e est compact. Puisque de plus, le développement est à fibre finie, l'action infinitésimale de X_e sur $\mathscr{L}_1$ s'intègre en l'action d'un cercle.

Nous pouvons maintenant choisir une section de $\mathscr{L}_1$ qui soit invariante par cette action. La connexion β_1 associée satisfait alors à

$$\beta_1(\xi_1) = 0,$$

ce qui nous permet de conclure comme précédemment.

2.6. Preuve du corollaire 3.

Il suffit de remarquer à nouveau que le centre d'un sous-groupe réductif est constitué uniquement d'éléments semi-simples. On en déduit que tous les éléments de l'algèbre de Lie du centre de H sont elliptiques. Enfin le centre d'un groupe réductif connexe a un nombre fini de composantes connexes.

2.7. Autres corollaires.

Donnons pour finir deux corollaires de cette méthode.

Corollaire 4. — *Soient* G *un groupe de Lie réel connexe*, $\mathcal{G}$ *son algèbre de Lie*, $f \in \mathcal{G}^*$, $\Omega = \mathrm{G}.f$ *l'orbite coadjointe*, $\mathrm{G}(f)$ *le stabilisateur de* f *et* $\mathcal{G}(f)$ *son algèbre de Lie. On suppose que* f *n'est pas un caractère de* $\mathcal{G}$ *et qu'il existe un caractère* χ *de* $\mathrm{G}(f)$ *tel que* $d\chi = f_{\mathcal{G}(f)}$. *Alors aucune variété compacte n'est modelée sur* Ω.

Remarque. — Lorsque G est semi-simple et f est nilpotent non nul, ces conditions sont remplies car $f_{|\mathcal{G}(f)} = 0$.

Preuve. — Soit $(\mathscr{L}, \nabla)$ le fibré G-équivariant sur Ω avec connexion G-invariante associée à f. Sa courbure ω est une 2-forme symplectique sur Ω (cf. [Ki] 15.2). L'image ω_1 de ω sur une variété compacte modelée est symplectique et exacte, ce qui est impossible.

Corollaire 5. — *Soient* G *un groupe de Lie semisimple réel connexe à centre fini*, $\mathcal{G}$ *son algèbre de Lie*, X *un élément de* $\mathcal{G}$ *et* $\mathrm{X} = \mathrm{X}_e + \mathrm{X}_h + \mathrm{X}_n$ *la décomposition de* X *en composantes elliptique, hyperbolique et nilpotente. Si la* G*-variété* G.X *admet un quotient compact alors* $\mathrm{X}_h = 0$.

Remarque. — Ceci précise un énoncé de [Ko2] (où l'on suppose $\mathrm{X}_n = 0$).

Preuve. — Il suffit de remarquer que X_h est un élément hyperbolique du centre de $\mathcal{G}^{\mathrm{X}} = \{ \mathrm{Y} \in \mathcal{G} / [\mathrm{Y}, \mathrm{X}] = 0 \}$.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] A. BOREL, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, *Topology* **2** (1963), 111-122.

[Bou] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres* 4, 5 *et* 6, Masson, 1981.

[Go] W. M. GOLDMAN, Non standard Lorentz space forms, *Jour. Diff. Geom.*, **21** (1985), 301-308.

[He] S. HELGASON, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[Ki] A. KIRILLOV, *Éléments de la théorie des représentations*, Mir, 1974.

[Ko1] T. KOBAYASHI, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.*, **285** (1989), 249-263.

[Ko2] T. KOBAYASHI, A necessary condition for the existence of a uniform lattice, *Duke Math. Jour.*, to appear.

[K-O] T. KOBAYASHI, K. ONO, Note on Hirzebruch's proportionality principle, *Jour. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, **37** (1990), 71-87.

[Ku] R. S. KULKARNI, Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, *Adv. in Math.*, **40** (1981), 10-51.

[Wa] G. WARNER, *Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups* 1, Springer Verlag, 1972.

Y.B.
Université Paris-VII
UFR de Mathématiques
UA 748 du CNRS
75251 Paris Cedex

F.L.
École Polytechnique
Centre de Mathématiques
URA D 0169 du CNRS
91128 Palaiseau Cedex

Manuscrit reçu le 23 *juillet* 1991.