

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ALAIN CHENCINER

Bifurcations de points fixes elliptiques - III. Orbites périodiques de « petites » périodes et élimination résonnante des couples de courbes invariantes

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 66 (1987), p. 5-91

[<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1987_66_5_0>](http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1987_66_5_0)

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BIFURCATIONS DE POINTS FIXES ELLIPTIQUES

III. — ORBITES PÉRIODIQUES DE « PETITES » PÉRIODES ET ÉLIMINATION RÉSONNANTE DES COUPLES DE COURBES INVARIANTES

par ALAIN CHENCINER

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	6
1. « Bons » rationnels	8
1.0.	8
1.1.	9
1.2.	12
2. Familles analytiques génériques et souvenir des résonances proches	19
2.1. Formes normales résonnantes	19
2.2. Réduction des formes normales à leur partie signifiante et interpolation par une famille d'équations différentielles	26
3. Fonctions de Liapunov	31
3.1. Loin des îles de nombre de rotation p/q	31
3.2. Dans les îles de nombre de rotation p/q	38
4. Existence de bons chemins d'élimination résonnante	45
4.1. Existence des courbes invariantes	46
4.2. Recollement des bassins	52
5. Orbites périodiques hyperboliques et leurs orbites homoclines	56
5.1. Existence d'orbites homoclines	56
5.2. Les familles génériques	62
6. Orbites périodiques elliptiques et leurs bifurcations de Hopf	70
CONCLUSION	77
APPENDICE : ZOOLOGIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES E_{μ, a, t^*}	79
BIBLIOGRAPHIE	91

A la mémoire de Jose Argemi

0. INTRODUCTION

Faisant pendant, dans notre étude des familles de difféomorphismes locaux du plan, au premier article de la série ([5]) consacré aux ensembles invariants dont le nombre de rotation est un « bon » irrationnel, celui-ci étudie les ensembles invariants dont le nombre de rotation est un « bon » rationnel. Les premiers se sont avérés être nécessairement des courbes fermées sur lesquelles le difféomorphisme est différentiablement conjugué à une rotation ergodique; nous trouverons ici des orbites périodiques bien ordonnées (voir [6]) et des orbites homoclines à celles-ci.

De plus, la robustesse des courbes fermées invariantes, qui se manifestait dans [5], § 2.3, par l'existence de « bons » chemins d'élimination d'un couple de telles courbes, se retrouve ici de façon surprenante : on prouve en effet l'existence « générique » de « bons chemins d'élimination résonnante » d'un couple de courbes invariantes dans lesquels les courbes persistent jusqu'à (et au-delà de) l'apparition dans l'anneau qu'elles déterminent d'une orbite périodique de « bon » nombre de rotation dont les variétés invariantes vont servir de guide au processus d'élimination (fig. 19, 20).

Les « bons » rationnels p/q sont définis dans le premier paragraphe, où aucune hypothèse de générnicité n'apparaît. Ce sont essentiellement ceux dans lesquels q est assez « petit » pour que l'itéré q -ième du difféomorphisme soit encore proche dans la topologie C^1 de l'itéré q -ième d'une forme normale dans la région du plan où l'on s'attend à trouver des orbites périodiques du nombre de rotation considéré (comparer à [13]); ce sont également ceux pour lesquels les applications $\Delta_{r,t}$ introduites dans [6] s'étudient à l'aide du seul théorème des fonctions implicites.

Toute orbite périodique ayant un bon nombre de rotation p/q est nécessairement bien ordonnée (*); plus précisément, par l'ensemble des orbites ayant ce nombre de rotation, on peut faire passer une courbe fermée lisse coupant chaque rayon transversalement, sur laquelle, dans des coordonnées bien choisies, le difféomorphisme agit au niveau angulaire comme la rotation $R_{p/q}$. Une telle courbe est obtenue en considérant l'ensemble des points transformés radialement par l'itéré q -ième du difféomorphisme (comparer à [12], [15], [3], [4]). Par un changement de coordonnées suffisamment proche de l'identité pour ne pas perturber la forme normale associée au difféomorphisme, on peut transformer cette courbe en un cercle (qui contient donc les éventuelles orbites périodiques de nombre

(*) Il est sous-entendu dans la suite qu'il s'agit d'orbites de période q .

de rotation p/q) de façon que, dans les nouvelles coordonnées, chaque orbite périodique de nombre de rotation p/q soit également une orbite de la rotation $R_{p/q}$ (comparer à [9] chapitre IV).

Dans la situation générique du deuxième paragraphe ces orbites périodiques s'interprètent comme le souvenir laissé par une résonance p/q très proche (comparer à [1], [15]) ; la restriction du difféomorphisme à un anneau contenant toute sa récurrence non triviale apparaît alors, dans les coordonnées ci-dessus, comme la perturbation d'une « forme normale résonnante » invariante par $R_{p/q}$. De précieux renseignements sur la dynamique du difféomorphisme sont obtenus en remarquant que cette forme normale est naturellement approchée par le composé avec $R_{p/q}$ de la solution au temps 1 d'une équation différentielle (en fait une équation du second ordre) invariante par $R_{p/q}$ et ayant exactement pour ensemble singulier la réunion des orbites périodiques de nombre de rotation p/q (comparer à [15], [3], [4], où cependant l'équation différentielle considérée dépend — très peu — du choix d'un point périodique particulier, ce qui rend malaisée l'étude des bifurcations faisant disparaître ce dernier).

La famille à deux paramètres d'équations différentielles ainsi obtenue est étudiée dans l'appendice ; ses propriétés jouent un rôle fondamental dans les derniers paragraphes, consacrés à l'analyse détaillée de la situation générique :

Dans les §§ 3 et 4 on montre que les « bulles » (dont le complémentaire correspond aux valeurs des paramètres pour lesquelles le difféomorphisme « ressemble » à une forme normale, voir [5] § 2.3) ont une taille de guêpe au voisinage des points $\gamma_{p/q}$ correspondant à de bons rationnels p/q (fig. 19) : une petite portion de leur bord coïncide avec le bord de la langue de résonance $\hat{C}_{p/q}$ (ensemble des valeurs des paramètres pour lesquelles le difféomorphisme possède au moins une orbite périodique bien ordonnée de nombre de rotation p/q , voir [6] § 1.2). Le long d'un chemin transverse à $\hat{C}_{p/q}$ et passant dans cette région, la dynamique du difféomorphisme est très bien contrôlée : on montre en particulier qu'à la première et à la dernière bifurcation elle ne diffère d'une dynamique de forme normale que par la présence d'une unique orbite périodique de nombre de rotation p/q .

Les phénomènes complexes qui se passent pour les valeurs des paramètres à l'intérieur de la langue $\hat{C}_{p/q}$ sont l'objet du paragraphe 5, inspiré de [15], et du paragraphe 6 où il semble que toute l'histoire puisse recommencer ; une partie des résultats du paragraphe 5 a été annoncée dans [3] et [4] : rappelons que, comme dans les autres articles de cette série, c'est la présence d'un paramètre (ici un frottement dans une équation voisine de celle du pendule) qui remplace l'hypothèse de conservation des aires.

Je tiens tout particulièrement à remercier Dick Mac Gehee, Michel Herman, Phil Holmes, Jacob Palis, Eddy Zehnder, Jean-Christophe Yoccoz : l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail m'a donné l'énergie nécessaire à sa complétion à un moment où peu de choses allaient de soi. Merci également au *referee* d'avoir suggéré les notations $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ qui ont rendu moins illisible le § 4. Merci enfin à J. Tits pour son titanesque travail d'éditeur. Les grandes lignes de ce travail ont été annoncées dans [7].

1. « BONS » RATIONNELS

1.0. Dans les deux premières parties de ce travail nous avons commencé l'étude des familles à deux paramètres de difféomorphismes locaux C^∞ (analytiques) de $(\mathbf{R}^2, 0)$ de la forme suivante ([5] formules (11) et (20)) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a}(z) = N_{\mu, a}(z) + O(|z|^{2n+3}), \\ N_{\mu, a}(z) = z[1 + f(\mu, a, |z|^2)] e^{2\pi i g(\mu, a, |z|)}, \\ f(\mu, a, X) = \mu + aX + a_2(\mu, a) X^2 + \dots + a_n(\mu, a) X^n, \\ \qquad \qquad \qquad a_2(0, 0) = -1, \\ g(\mu, a, X) = b_0(\mu, a) + b_1(\mu, a) X + \dots + b_n(\mu, a) X^n, \\ b_1(0, 0) \neq 0, \quad \eta_0 = 2 \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0) + b_1(0, 0) \neq 0. \end{array} \right.$$

Rappelons que l'on peut mettre sous cette forme les familles « génériques » à 2 paramètres, qui déplient un difféomorphisme local de $(\mathbf{R}^2, 0)$ ayant les propriétés suivantes :

- 1) La dérivée en 0 est conjuguée à une rotation R_{ω_0} d'angle $2\pi\omega_0 = 2\pi b_0(0, 0)$, qui vérifie $R_{\omega_0}^q \neq \text{Identité}$ pour $1 \leq q \leq 2n + 3$.
- 2) L'origine est un attracteur « très faible », de codimension formelle 2 au sens de ([5] §§1-1 et 1-2).

Soit ω un réel assez proche de $\omega_0 = b_0(0, 0)$ et vérifiant $(1/\eta_0)(\omega - \omega_0) > 0$; dans les coordonnées (θ, ρ) (qui dépendent de ω, μ, a) définies dans $\mathbf{T}^1 \times [-1/2, 1/2]$ par les formules (30) et (43) de [5], l'application $P_{\mu, a}$ ou plutôt un relèvement à $\mathbf{R} \times [-1/2, 1/2]$ est décrite, lorsque (μ, a) appartient au « carré » \mathcal{D}_ω défini dans le lemme 1 de [5], par les formules (*) (voir [5] formules (44), (45) = (119) ou [6] formule (7)) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a}(\theta, \rho) = N_{\mu, a}(\theta, \rho) + (0, \tau_\omega^n \xi_{\omega, \mu, a}(\theta, \rho)), \\ N_{\mu, a}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \nu' + (1 + \varepsilon') \rho + s' \rho^2 + \sum_{i=3}^n a'_i \rho^i) \\ \qquad \qquad \qquad = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \rho + \tau_\omega^2 \Pi_{\omega, \mu, a}(\rho)), \end{array} \right.$$

où τ_ω est de l'ordre de $|\omega - \omega_0|$, $\xi_{\omega, \mu, a}$ est une fonction C^∞ (analytique) si $P_{\mu, a}$ est C^∞ (analytique) et est bornée en norme C^k (pour tout k) sur $\mathbf{T}^1 \times [-1/2, 1/2]$ uniformément.

(*) Rappelons que, dans ces formules, ν' , ε' , s' et les a'_i sont des fonctions de (μ, a) . Voir en particulier les formules (31), (34), (45) de [5].

ment par rapport à ω voisin de ω_0 , $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$. On sait également que v', ε' forment un système de coordonnées dans \mathcal{D}_ω qui est approximativement défini par

$$(3) \quad |v'| \leq c\tau_\omega^3, \quad |\varepsilon'| \leq c\tau_\omega^3, \quad \text{où } c \text{ est une constante,}$$

et qu'on remplacera souvent par (confondra souvent avec) le « carré » \mathcal{D}'_ω exactement défini par ces inégalités.

Enfin, s' est négatif et de l'ordre de τ_ω^2 , et les a'_i sont respectivement de l'ordre de τ_ω^{i-1} .

On a rappelé à la suite du corollaire du lemme 3 de [6] que toute orbite récurrente de $P_{\mu, a}$ est, lorsque $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$ (ou \mathcal{D}'_ω), contenue dans un anneau de la forme $|\rho| \leq A\tau_\omega^{1/2}$ où A est une constante (essentiellement l'anneau $\mathbf{A}_n^+(\mu, a)$ de la formule (117) de [5]); le corollaire cité affirmait quant à lui que tout ensemble invariant d'Aubry-Mather de $P_{\mu, a}$ de nombre de rotation ω vérifie, toujours lorsque (μ, a) appartient à \mathcal{D}_ω (ou \mathcal{D}'_ω), l'estimation beaucoup plus fine $|\rho| \leq A\tau_\omega^2$.

Il découle enfin du lemme 2 de [6] (où l'hypothèse de préservation de l'ordre n'intervient pas) que si $P_{\mu, a}$ possède une orbite récurrente dont le nombre de rotation existe et vaut ω , (μ, a) appartient nécessairement à l'union de \mathcal{D}_ω et de \mathcal{H} ; en particulier, si (μ, a) n'appartient pas à \mathcal{D}_ω , toutes les orbites récurrentes de $P_{\mu, a}$ de nombre de rotation ω appartiennent à une même courbe fermée invariante.

Dans la suite nous supposerons que $\omega = p/q$ est rationnel (la fraction p/q étant écrite sous forme irréductible) et nous omettrons souvent l'indice ω (par exemple $\tau = \tau_{p/q}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{p/q}$, $\zeta_{\mu, a} = \zeta_{(p/q), \mu, a}, \dots$).

1.1. Nous commençons par comparer $P_{\mu, a}^q$ à $N_{\mu, a}^q$ dans l'esprit du lemme 1 de [13]. Dans le lemme qui suit il est bon de garder à l'esprit que $\tau = \tau_{p/q}$ est de l'ordre de $|(p/q) - \omega_0|$.

Lemme 1. — Si $q\tau^2$ est assez petit, $P_{\mu, a}^j$ (et $N_{\mu, a}^j$) sont définis, pour tout (μ, a) dans \mathcal{D} et tout entier j compris entre 1 et q , sur l'anneau $\mathbf{T}^1 \times I_j = \left\{(\theta, \rho), |\rho| \leq \frac{2(q-1) - (j-1)}{4(q-1)}\right\}$ et y vérifient les estimations

$$(4) \quad \begin{cases} P_{\mu, a}^j(\theta, \rho) - N_{\mu, a}^j(\theta, \rho) = (\delta\theta^{(j)}, \delta\rho^{(j)}), \quad \text{avec} \\ |\delta\theta^{(j)}| \leq 2L_0 j^2 \tau^{n+1}, \quad |\delta\rho^{(j)}| \leq 2L_0 j \tau^n, \\ \|D^k P_{\mu, a}^j(\theta, \rho) - D^k N_{\mu, a}^j(\theta, \rho)\| \leq jO(\tau^n) e^{jO(\tau)}, \end{cases}$$

où L_0 est le sup de $|\zeta_{\omega, \mu, a}(\theta, \rho)|$ pour ω proche de ω_0 , $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$, et $(\theta, \rho) \in \mathbf{T}^1 \times [-1/2, 1/2]$. Les O dépendent de k mais non de j entre 1 et q , ni de (μ, a) dans \mathcal{D} , ni de $(\theta, \rho) \in \mathbf{T}^1 \times I_j$, ni de $\omega = p/q$.

En particulier, pour $1 \leq j \leq q$, $P_{\mu, a}^j$ et $N_{\mu, a}^j$ sont définis sur $\mathbf{T}^1 \times [-1/4, 1/4]$.

Corollaire. — Soient C un nombre réel positif et k un entier positif. Il existe un nombre réel positif $\varepsilon_1(C, k)$ tel que, si $q|(p/q) - \omega_0| < C$ et $|(p/q) - \omega_0| < \varepsilon_1(C, k)$, $P_{\mu, a}^j$ et $N_{\mu, a}^j$

soient définis sur $\mathbf{T}^1 \times [-1/4, 1/4] \supset \mathbf{T}^1 \times [-A\tau^{1/2}, A\tau^{1/2}]$ et vérifient pour $1 \leq j \leq q$ l'estimation

$$(5) \quad \| P_{\mu, a}^j - N_{\mu, a}^j \|_k \leq O(\tau^{n-1}) = O\left(\left|\frac{p}{q} - \omega_0\right|^{n-1}\right),$$

dans laquelle $\| \cdot \|_k$ désigne la norme C^k sur les applications de $\mathbf{R} \times [-1/4, 1/4]$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, et le O dépend seulement de C et k .

Remarque. — Si ω_0 est irrationnel, les réduites p_n/q_n du développement de ω_0 en fraction continue vérifient $q_n | (p_n/q_n) - \omega_0 | < 1/q_n$. Quels que soient C et k , il existe donc une infinité de rationnels p/q vérifiant les hypothèses du Corollaire. Si $\omega_0 = p'/q'$ est rationnel, la même conclusion vaut à condition que C soit supérieur à $1/q'$.

Démonstration du lemme 1. — On déduit de (2) que, si $(\mu, a) \in \mathcal{D}$, $P_{\mu, a}^j$ s'écrit (tant qu'il est défini) :

$$(6) \quad \begin{cases} P_{\mu, a}^j(\theta, \rho) = (\theta^{(j)}, \rho^{(j)}), \\ \rho^{(j)} = \rho + \tau^2[\Pi_{\mu, a}(\rho) + \dots + \Pi_{\mu, a}(\rho^{(j-1)})] \\ \quad + \tau^n[\zeta_{\mu, a}(\theta, \rho) + \dots + \zeta_{\mu, a}(\theta^{(j-1)}, \rho^{(j-1)})], \\ \theta^{(j)} = \theta^{(j-1)} + \frac{p}{q} + \tau\rho^{(j-1)}. \end{cases}$$

Si $K_0 = \sup |\Pi_{\omega, \mu, a}(\rho)|$, $L_0 = \sup |\zeta_{\omega, \mu, a}(\theta, \rho)|$, où les sup sont pris sur l'ensemble des ω proches de ω_0 , $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$, $(\theta, \rho) \in \mathbf{T}^1 \times [-1/2, 1/2]$, on a donc

$$(7) \quad |\rho^{(j)} - \rho| \leq j[\tau^2 K_0 + \tau^n L_0].$$

Supposons $q\tau^2$ assez petit pour que $(q-1)[\tau^2 K_0 + \tau^n L_0] \leq 1/4$: P applique alors $\mathbf{T}^1 \times I_j$ dans $\mathbf{T}^1 \times I_{j-1}$, ce qui implique

$$P^{j-1}(\mathbf{T}^1 \times I_j) \subset \mathbf{T}^1 \times I_1 = \mathbf{T}^1 \times [-1/2, 1/2]$$

et montre que P^j est défini sur $\mathbf{T}^1 \times I_j$.

La démonstration pour N est bien entendu identique à ceci près que $\zeta \equiv 0$.

Maintenant, on déduit également de (2) que

$$(8) \quad \begin{cases} \delta\theta^{(j)} = \delta\theta^{(j-1)} + \tau\delta\rho^{(j-1)}, \\ \delta\rho^{(j)} = \delta\rho^{(j-1)} + \tau^2 \Pi_{\mu, a}(\bar{\rho} + \delta\rho^{(j-1)}) - \tau^2 \Pi_{\mu, a}(\bar{\rho}) \\ \quad + \tau^n \zeta(\bar{\theta} + \delta\theta^{(j-1)}, \bar{\rho} + \delta\rho^{(j-1)}), \end{cases}$$

où on a noté $N_{\mu, a}^{j-1}(\theta, \rho) = (\bar{\theta}, \bar{\rho})$.

En particulier, si $K_1 = \sup \|D\Pi_{\omega, \mu, a}(\rho)\|$, où le sup est pris sur les ω proches de ω_0 , $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$, $|\rho| \leq 1/2$, on a

$$(9) \quad |\delta\rho^{(j)}| \leq (1 + \tau^2 K_1) |\delta\rho^{(j-1)}| + \tau^n L_0,$$

d'où on déduit facilement les estimations sur $|\delta\rho^{(j)}|$ et $|\delta\theta^{(j)}|$ par récurrence.

Pour évaluer les dérivées des itérés de N et P on calcule

$$(10) \quad \begin{cases} DN_{\mu, a}(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 + \tau^2 \Pi'_{\mu, a}(\rho) \end{pmatrix}, \\ DP_{\mu, a}(\theta, \rho) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \tau^n \frac{\partial \zeta_{\mu, a}}{\partial \theta}(\theta, \rho) & 1 + \tau^2 \Pi'_{\mu, a}(\rho) + \tau^n \frac{\partial \zeta_{\mu, a}}{\partial \rho}(\theta, \rho) \end{pmatrix} \\ D^2 N_{\mu, a}(\theta, \rho) (a, b, a', b') = (0, \tau^2 \Pi''_{\mu, a}(\rho) bb'), \text{ etc.} \end{cases}$$

On constate que (on a omis les indices μ, a et noté $\| DN \| = \sup \| DN(\theta, \rho) \|$ où $(\theta, \rho) \in \mathbf{T}^1 \times [-1/2, 1/2]$) :

$$(11) \quad \begin{cases} \| DN \| = 1 + O(\tau) \leq e^{O(\tau)}, \\ \| D^k N \| = O(\tau^k) \text{ pour } k \geq 2, \\ \| D^k P - D^k N \| = O(\tau^k) \text{ pour } k \geq 1. \end{cases}$$

Lorsque $j > 1$, on raisonne par récurrence sur k à partir de la formule (de Faa-di-Bruno) :

$$(12) \quad D^k(f \circ g) = \sum_{m=1}^k \sum_i c_i [(D^m f) \circ g] (D^{i_1} g, \dots, D^{i_m} g)$$

dans laquelle la deuxième somme est prise sur les m -uplets $i = (i_1, \dots, i_m)$ d'entiers ≥ 1 de somme k , et les coefficients c_i sont universels.

Plus précisément, montrons que

$$(13) \quad \begin{cases} \| DN^j \| \leq e^{jO(\tau)}, \\ \| D^k N^j \| \leq jO(\tau^k) e^{jO(\tau)} \text{ pour } k \geq 2, \\ \| D^k P^j - D^k N^j \| \leq jO(\tau^k) e^{jO(\tau)} \text{ pour } k \geq 1, \end{cases}$$

où, pour un itéré d'ordre j , $\| \cdot \|$ désigne le sup sur $\mathbf{T}^1 \times I_j$.

La première inégalité est évidente à partir de (11).

En se rappelant que N applique $\mathbf{T}^1 \times I_j$ dans $\mathbf{T}^1 \times I_{j-1}$ on déduit de (12) appliqué à $f = N^{j-1}$, $g = N$, que pour $k \geq 2$

$$(14) \quad \begin{aligned} \| D^k N^j \| &\leq e^{kO(\tau)} \| D^k N^{j-1} \| + O(\tau^k) e^{(j-1)O(\tau)} \\ &\quad + \sum_{m=2}^{k-1} \sum_i |c_i| O(\tau^m) e^{(k-m)O(\tau)} \| D^m N^{j-1} \|. \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, i est un m -uplet d'entiers ≥ 1 de somme k ; dans chacun des termes l'un au moins des indices est donc strictement supérieur à 1. En particulier,

$$(15) \quad \| D^2 N^j \| \leq e^{O(\tau)} \| D^2 N^{j-1} \| + O(\tau^2) e^{jO(\tau)},$$

et donc

$$\| D^2 N^j \| \leq jO(\tau^2) e^{jO(\tau)}.$$

L'estimation de $\| D^k N^j \|$ indiquée dans (13) s'obtient de même par récurrence sur k (se rappeler que $q\tau^2$ est borné pour obtenir pour tout k une estimation analogue à (15)).

Enfin, en appliquant (12) successivement à $f = P^{j-1}$, $g = P$ et $f = N^{j-1}$, $g = N$, on écrit

$$(16) \quad D^k P^j - D^k N^j = \sum_{m=1}^k \sum_i c_i (A_i + B_i + C_i),$$

où

$$(17) \quad \begin{cases} A_i = [(D^m P^{j-1}) \circ P - (D^m N^{j-1}) \circ P] (D^{i_1} P, \dots, D^{i_m} P), \\ B_i = [(D^m N^{j-1}) \circ P - (D^m N^{j-1}) \circ N] (D^{i_1} P, \dots, D^{i_m} P), \\ C_i = [(D^m N^{j-1}) \circ N] (D^{i_1} P, \dots, D^{i_m} P) \\ \quad - [(D^m N^{j-1}) \circ N] (D^{i_1} N, \dots, D^{i_m} N). \end{cases}$$

On déduit alors de (11) et (13) que

$$(18) \quad \begin{aligned} \| D^k P^j - D^k N^j \| &\leq e^{kO(\tau)} \| D^k P^{j-1} - D^k N^{j-1} \| \\ &\quad + O(\tau^2) e^{(k-2)O(\tau)} \sum_{m=1}^{k-1} \| D^m P^{j-1} - D^m N^{j-1} \| + jO(\tau^{n+2}) e^{jO(\tau)}, \end{aligned}$$

et enfin la dernière estimation de (13) par récurrence sur k , ce qui termine la démonstration du lemme 1 (on remarquera qu'on peut initier la récurrence en estimant $\| DP^j - DN^j \|$ à partir de (18), ou directement par la méthode de [13] qui donne d'ailleurs le même résultat).

Le corollaire est immédiat.

1.2. Nous introduisons maintenant un changement de variables du type « moyennes » qui remonte, semble-t-il, à Bochner; des formules analogues ont par exemple été utilisées par Herman dans le problème de la conjugaison d'un difféomorphisme du cercle à une rotation, et par Iooss dans l'étude des orbites périodiques qui apparaissent par bifurcation de Hopf d'un difféomorphisme.

Dès que $q\tau^2$ est assez petit, l'application

$$(19) \quad H_{\mu, a} = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-j} \circ N_{\mu, a}^j, \quad (\mu, a) \in \mathcal{D},$$

est bien définie de $\mathbf{T}^1 \times [-1/4, 1/4]$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ (resp. de $\mathbf{R} \times [-1/4, 1/4]$ dans $\mathbf{R} \times (\mathbf{R})$ [$R_\alpha(\theta, \rho) = (\theta + \alpha, \rho)$, et la somme dans (19) est au sens de la loi de groupe additive sur $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$)].

C'est de plus un difféomorphisme sur son image : pour le démontrer on remarque que, comme $R_{p/q}$ et $N_{\mu, a}$, $H_{\mu, a}$ commute avec les rotations, ce qui réduit d'une dimension le problème; la conclusion vient de ce que le passage au barycentre conserve la propriété d'être strictement croissantes pour les applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

Enfin, $R_{p/q}$ commutant aux barycentres, on a

$$\begin{aligned} H_{\mu,a} \circ N_{\mu,a} &= \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-j} \circ N_{\mu,a}^{j+1} \\ &= R_{p/q} \circ \left[\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-(j+1)} \circ N_{\mu,a}^{j+1} \right] \\ &= R_{p/q} \circ \left[H_{\mu,a} + \frac{1}{q} (R_{p/q}^{-q} \circ N_{\mu,a}^q - \text{Id}) \right] \\ &= R_{p/q} \circ \left[H_{\mu,a} + \frac{1}{q} (N_{\mu,a}^q - R_p) \right], \end{aligned}$$

autrement dit

$$(20) \quad H_{\mu,a} \circ N_{\mu,a} \circ H_{\mu,a}^{-1} = R_{p/q} \circ \left[\text{Id} + \frac{1}{q} (N_{\mu,a}^q - R_p) \circ H_{\mu,a}^{-1} \right].$$

En notant

$$(21) \quad \begin{aligned} N_{\mu,a}^j(\theta_0, \rho_0) &= (\theta_0^{(j)}, \rho_0^{(j)}), \\ (\theta, \rho) &= H_{\mu,a}(\theta_0, \rho_0) = \left(\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \left(\theta_0^{(j)} - j \frac{p}{q} \right), \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \rho_0^{(j)} \right), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} H_{\mu,a} \circ N_{\mu,a} \circ H_{\mu,a}^{-1}(\theta, \rho) \\ = (\theta + (p/q) + (1/q) (\theta_0^{(q)} - \theta_0 - p), \rho + (1/q) (\rho_0^{(q)} - \rho_0)); \end{aligned}$$

mais

$$(22) \quad \begin{cases} \theta_0^{(q)} = \theta_0^{(q-1)} + (p/q) + \tau \rho_0^{(q-1)} = \dots = \theta_0 + p + \tau \sum_{j=0}^{q-1} \rho_0^{(j)} \\ = \theta_0 + p + q \tau \rho, \end{cases}$$

ce qui fournit finalement l'expression

$$(23) \quad H_{\mu,a} \circ N_{\mu,a} \circ H_{\mu,a}^{-1}(\theta, \rho) = (\theta + (p/q) + \tau \rho, \rho + (1/q) (\rho_0^{(q)} - \rho_0)).$$

$H_{\mu,a}$ applique donc le cercle (d'équation $\theta_0^{(q)} = \theta_0 + p$) des points transformés radialement par $N_{\mu,a}^q$ (plus exactement par $R_p^{-1} \circ N_{\mu,a}^q$ si on se place dans le revêtement) sur le cercle (d'équation $\rho = 0$) des points transformés angulairement par $H_{\mu,a} \circ N_{\mu,a} \circ H_{\mu,a}^{-1}$ d'un angle p/q (cercle translété de nombre de rotation p/q dans la terminologie de [5]). Lorsque $N_{\mu,a}$ possède des orbites périodiques de nombre de rotation p/q , ces deux cercles se confondent avec l'ensemble de ces orbites, en restriction auquel $N_{\mu,a}$ et $H_{\mu,a} \circ N_{\mu,a} \circ H_{\mu,a}^{-1}$ coïncident avec la rotation $R_{p/q}$.

Le lemme suivant dit simplement que, sous des conditions analogues à celles du lemme 1, on peut associer à $P_{\mu,a}$ un changement de variables $K_{\mu,a}$ ayant des propriétés semblables.

Lemme 2. — Soit C un nombre réel positif et k un entier positif. Il existe un nombre réel positif $\varepsilon_2(C, k)$ tel que, si

$$q \left| \frac{p}{q} - \omega_0 \right| < C \quad \text{et} \quad \left| \frac{p}{q} - \omega_0 \right| < \varepsilon_2(C, k),$$

la formule

$$(24) \quad K_{\mu, a} = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-j} \circ P_{\mu, a}^j$$

définisse, pour $(\mu, a) \in \mathcal{D}$, un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{T}^1 \times [-1/4, 1/4]$ sur son image dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ ayant les propriétés suivantes :

1) *L'image réciproque par $K_{\mu, a}$ du cercle d'équation $(\rho = 0)$ coupe transversalement chaque rayon ($\theta = \text{constante}$) et coïncide avec l'ensemble des points transformés radialement par $P_{\mu, a}^q$ ($R_{p/q}^{-1} \circ P_{\mu, a}^q$ dans le revêtement universel) (comparer à [3], [4]);*

2) *Au niveau angulaire, $K_{\mu, a} \circ P_{\mu, a} \circ K_{\mu, a}^{-1}$ agit sur le cercle $(\rho = 0)$ comme la rotation $R_{p/q}$. En particulier, chaque orbite périodique de $K_{\mu, a} \circ P_{\mu, a} \circ K_{\mu, a}^{-1}$ de nombre de rotation p/q est également une orbite de la rotation $R_{p/q}$;*

$$(3) \quad \text{Sur } \mathbf{T}^1 \times [-1/4, 1/4], \text{ on a } \| K_{\mu, a} - H_{\mu, a} \|_k \leq O(\tau^{n-1}).$$

Corollaire. — Sous les hypothèses du lemme 2, l'ensemble des points périodiques de nombre de rotation p/q de $P_{\mu, a}$ est bien ordonné (au sens de [6]).

Démonstration. — Que $K_{\mu, a}$ soit un difféomorphisme sur son image découle immédiatement de l'assertion analogue concernant $H_{\mu, a}$ et des estimations

$$(25) \quad \begin{cases} \| K_{\mu, a} - H_{\mu, a} \|_0 \leq q^2 O(\tau^{n+1}) + q O(\tau^n) \leq O(\tau^{n-1}), \\ \| D^k K_{\mu, a} - D^k H_{\mu, a} \|_0 \leq q O(\tau^n) e^{qO(\tau)} \leq O(\tau^{n-1}), \end{cases}$$

qu'on déduit du lemme 1 dès qu'on a remarqué que

$$K_{\mu, a} - H_{\mu, a} = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} (P_{\mu, a}^j - N_{\mu, a}^j).$$

La partie de l'assertion (1) concernant la transversalité découle de ce que la courbe considérée est C^1 -proche du cercle image réciproque par $H_{\mu, a}$ du cercle d'équation $(\rho = 0)$. L'assertion (2) est contenue dans les formules

$$(26) \quad K_{\mu, a} \circ P_{\mu, a} \circ K_{\mu, a}^{-1} = R_{p/q} \circ \left[\text{Id} + \frac{1}{q} (P_{\mu, a}^q - R_p) \circ K_{\mu, a}^{-1} \right],$$

$$(27) \quad \begin{cases} K_{\mu, a} \circ P_{\mu, a} \circ K_{\mu, a}^{-1}(\theta, \rho) = \left(\theta + \frac{p}{q} + \tau \rho, \rho + \frac{1}{q} (\rho_0^{(q)} - \rho_0) \right), \\ \text{où } K_{\mu, a}(\theta_0, \rho_0) = (\theta, \rho), P_{\mu, a}^j(\theta_0, \rho_0) = (\theta_0^{(j)}, \rho_0^{(j)}), \end{cases}$$

qui s'obtiennent exactement comme (20) et (23).

Quant au corollaire, il découle de (1) qui rend équivalentes les assertions sur l'ordre angulaire des orbites périodiques de nombre de rotation p/q pour $P_{\mu,a}$ et $K_{\mu,a} \circ P_{\mu,a} \circ K_{\mu,a}^{-1}$.

Le changement de coordonnées défini par $K_{\mu,a}$ met donc $P_{\mu,a}$ sous une forme particulièrement propice à l'étude des orbites périodiques de nombre de rotation p/q :

- (i) celles-ci appartiennent toutes au cercle d'équation $(\rho = 0)$;
- (ii) elles sont également des orbites de la rotation $R_{p/q}$.

Malheureusement, ce changement de coordonnées n'est pas C^k -proche de l'Identité (*) et perturbe donc les formes normales. Ceci est particulièrement flagrant dans le cas où $P_{\mu,a}$ est remplacé par $N_{\mu,a}$ et $K_{\mu,a}$ par $H_{\mu,a}$: des orbites périodiques de $N_{\mu,a}$ de nombre de rotation p/q n'existent que si $\nu' = 0$, et elles possèdent alors les propriétés (i) et (ii) ; la restriction de $H_{\mu,a}$ au cercle d'équation $(\rho = 0)$ est l'identité mais $H_{\mu,a}$ n'est pas C^k -proche de l'identité et son utilisation n'apporte que des désagréments.

Il semble alors naturel de remplacer $K_{\mu,a}$ par le difféomorphisme

$$(28) \quad \mathcal{K}_{\mu,a} = H_{\mu,a}^{-1} \circ K_{\mu,a}$$

dont les propriétés sont énoncées dans le lemme suivant :

Lemme 3. — Sous les hypothèses du lemme 2, avec éventuellement un ε_2 plus petit, $\mathcal{K}_{\mu,a}$ est un difféomorphisme de $\mathbf{T}^1 \times [-1/5, 1/5] \supset \mathbf{T}^1 \times [-A\tau^{1/2}, A\tau^{1/2}]$ sur son image dans $\mathbf{T}^1 \times [-1/4, 1/4]$ et vérifie

$$(29) \quad \|\mathcal{K}_{\mu,a} - \text{Id}\|_k \leq O(\tau^{n-1}).$$

Il transporte la courbe des points transformés radialement par $R_p^{-1} \circ P_{\mu,a}^q$ sur le cercle des points transformés radialement par $R_p^{-1} \circ N_{\mu,a}^q$. Enfin, en restriction à ses points périodiques de nombre de rotation p/q , $\mathcal{K}_{\mu,a} \circ P_{\mu,a} \circ \mathcal{K}_{\mu,a}^{-1}$ coïncide avec la rotation $R_{p/q}$.

Démonstration. — Si ε_2 est assez petit, on déduit de (25) que

$$K_{\mu,a}(\mathbf{T}^1 \times [-1/5, 1/5]) \subset H_{\mu,a}(\mathbf{T}^1 \times [-1/4, 1/4]),$$

qui implique la première affirmation du lemme.

Pour obtenir l'estimation (29) on calcule

$$DH_{\mu,a}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + qO(\tau^2) & qO(\tau) \\ 0 & 1 + qO(\tau^2) \end{pmatrix};$$

donc $\|DH_{\mu,a}^{-1}\| \leq e^{qO(\tau)}$.

On déduit alors (29) de (25) en utilisant les propriétés standard de la composition.

Le reste du lemme est évident à partir du lemme 2 si on se rappelle que $H_{\mu,a}$ commute aux rotations.

(*) Tous les C^k signifient « topologie C^k » et n'ont, contrairement aux apparences, rien à voir avec « C à la puissance k ».

On déduit du lemme 3 et des formules (2) que

$$(30) \quad \mathcal{K}_{\mu, a} \circ P_{\mu, a} \circ \mathcal{K}_{\mu, a}^{-1}(\theta, \rho) = (\theta + (p/q) + \tau\rho + \tau^{n-1} \alpha_{\mu, a}(\theta, \rho), \rho + \tau^2 \Pi_{\mu, a}(\rho) + \tau^{n-1} \beta_{\mu, a}(\theta, \rho)),$$

où $\alpha_{\mu, a}$ et $\beta_{\mu, a}$ sont uniformément bornées dans la topologie C^k (la borne dépend seulement des constantes C et k du lemme 2) et les points périodiques de $\mathcal{K}_{\mu, a} \circ P_{\mu, a} \circ \mathcal{K}_{\mu, a}^{-1}$ de nombre de rotation p/q vérifient

$$(31) \quad \tau\rho + \tau^{n-1} \alpha_{\mu, a}(\theta, \rho) = 0.$$

Un dernier changement de variables

$$(32) \quad x = \rho + \tau^{n-2} \alpha_{\mu, a}(\theta, \rho)$$

nous amène à la

Proposition 1. — Soit C un nombre réel positif, k un entier positif. Il existe un nombre réel positif $\varepsilon(C, k)$ tel que, si

$$(33) \quad q \left| \frac{p}{q} - \omega_0 \right| < C \quad \text{et} \quad \left| \frac{p}{q} - \omega_0 \right| < \varepsilon(C, k),$$

il existe des coordonnées (ξ, x) , C^k -proches des coordonnées (θ, ρ) , dans

$$\mathbf{T}^1 \times [-1/5, 1/5] \supset \mathbf{T}^1 \times [-A\tau^{1/2}, A\tau^{1/2}],$$

dans lesquelles $P_{\mu, a}$ s'écrit (*)

$$(34) \quad P_{\mu, a}(\xi, x) = \left(\xi + \frac{p}{q} + \tau x, v' + (1 + \varepsilon') x + s' x^2 + \sum_{i=3}^n a'_i x^i + \tau^{n-2} \gamma_{\mu, a}(\xi, x) \right),$$

où $\gamma_{\mu, a}$ est C^k -bornée par une quantité ne dépendant que de C et k , et où les points périodiques de nombre de rotation p/q sont donnés par les équations

$$(35) \quad \begin{cases} x = 0, \\ v' + \tau^{n-2} \gamma_{\mu, a}(\xi, 0) = 0. \end{cases}$$

Nous appellerons *bon rationnel* un nombre rationnel p/q satisfaisant (33) pour un certain couple (C, k) (voir cependant le remarque qui suit).

Pour un tel rationnel, l'intersection $\hat{C}_{p/q} \cap \mathcal{D}_{p/q}$ du « carré » $\mathcal{D}_{p/q} = \mathcal{D}$ avec la langue de résonance $\hat{C}_{p/q}$ (ensemble des valeurs de (μ, a) telles que $P_{\mu, a}$ possède au moins une orbite périodique bien ordonnée de nombre de rotation p/q , voir [6]) est la projection sur \mathcal{D} de la surface régulière définie dans $\mathcal{D} \times \mathbf{T}^1$ (coordonnées v' , ε' , ξ) par l'équation

$$v' + \tau^{n-2} \gamma_{\mu, a}(\xi, 0) = 0.$$

(*) Nous faisons dorénavant comme dans les articles précédents l'abus de notation qui consiste à ne pas noter les difféomorphismes de changement de variables : $P_{\mu, a}$ désigne en fait le conjugué de $P_{\mu, a}$ par le composé de $\mathcal{K}_{\mu, a}$ et du changement de variables (32).

Cette surface est invariante sous l'action de $R_{p/q}$ sur \mathbf{T}^1 ; la figure 1 la représente

(i) dans le cas d'une forme normale $N_{\mu, a}$ (il y a invariance sous tout le groupe des rotations et $\hat{C}_{p/q} = C_{p/q}$ est alors une courbe lisse),

(ii) dans la situation générique étudiée dans la suite de l'article, où son ondulation (réduction du groupe d'invariance au sous-groupe engendré par $R_{p/q}$) produit l'épaissement en « langue d'Arnold » de $C_{p/q}$.

Le lecteur de [6] fera aisément le lien entre cette surface et l'application $\delta_{\mu, a}$ décrite dans ce dernier article.

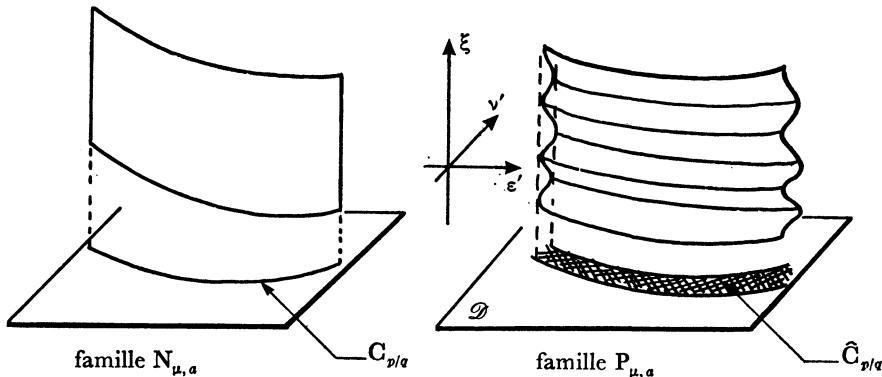


FIG. 1

En conclusion de ce paragraphe, remarquons que notre démarche est conforme à l'esprit de la théorie des formes normales : nous avons cherché des coordonnées qui exhibent le plus possible les symétries de la famille $P_{\mu, a}$; dans le cas d'un « bon rationnel » p/q c'est la restriction de $P_{\mu, a}$ à l'ensemble de ses orbites périodiques de nombre de rotation p/q qu'on a pu rendre symétrique.

Remarque. — La mise sous forme normale peut également être effectuée pour la restriction de $P_{\mu, a}$ à l'ensemble des orbites périodiques dont le nombre de rotation p/q vérifie des hypothèses analogues à (33) dans lesquelles ω_0 est remplacé par un « bon irrationnel » ω ; il est donc légitime d'appeler également « bons rationnels » de tels nombres p/q , par exemple les réduites assez proches de ω du développement en fraction continue d'un « bon irrationnel » ω .

Dans le cas d'un difféomorphisme préservant les aires, cette assertion découle essentiellement de la possibilité de contracter sur un point une courbe fermée invariante de « bon » nombre de rotation irrationnel ω après avoir mis le difféomorphisme sous forme normale à un certain ordre au voisinage de cette courbe; on peut invoquer également le théorème purement topologique de Boyland et Hall ([2 ter]) qui suppose simplement l'existence d'une courbe invariante de nombre de rotation ω mais ne fait aucune hypothèse de nature arithmétique sur ω .

Dans notre cas, il faut partir des coordonnées introduites dans la formule (131) du paragraphe 2.3 de [5] : tenant compte de la remarque qui suit la formule (130) de [5] on peut écrire, si $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega \simeq \mathcal{D}_{p/q}$, la restriction de $P_{\mu, a}$ à un anneau $|u| \leq 1/2$ en dehors duquel cette application « ressemble » à une forme normale, sous la forme

$$(35 \text{ bis}) \quad P_{\mu, a}(\eta, u) = \{ \eta + \omega + \tau u, \tilde{\lambda} + (1 + \chi) u + \sum \tilde{\alpha}_i u^i + O(|\tilde{\lambda} \tau^{n-5}| + |\tau^k u^{k+1}|) \},$$

où $\tau = \tau_\omega$ est de l'ordre de $\omega - \omega_0$, $\tilde{\lambda}_2$ de l'ordre de $|\tau|^2$ et $\tilde{\alpha}_i$ de l'ordre de $|\tau|^{i-1}$ pour $i \geq 3$. Définissons $u_{p/q}$ par l'équation $\omega + \tau u_{p/q} = p/q$ et notons (comme dans [5]) $\pi(u) = \tilde{\lambda} + \chi u + \sum \tilde{\alpha}_i u^i$: si $|\pi(u_{p/q})| > O(|\tilde{\lambda} \tau^{n-5}| + |\tau^k u_{p/q}^{k+1}|)$, le cercle d'équation $u = u_{p/q}$ est disjoint de son image, d'où l'on déduit facilement qu'il ne peut exister d'orbite périodique de nombre de rotation p/q . On se place donc dans l'intersection de la région où cette inégalité n'est pas vérifiée avec la région $\mathcal{V} \cap [\mathcal{D}_\omega - (\mathcal{A}_\omega \cup \mathcal{B}_\omega)]$ où peuvent se passer des choses non triviales (voir [5] fig. 12) : on constate alors que $\tilde{\lambda}$ est de l'ordre de $((p/q) - \omega)^2$ et χ de l'ordre de $\tau \sqrt{|\tilde{\lambda}|}$.

Posons $t = \sqrt{|\tilde{\lambda}|}$; l'inspection des ordres de grandeur rend naturel le changement de variables $u = u_{p/q} + (t/\tau) \rho$, $|\rho| \leq 1$: les orbites périodiques de $P_{\mu, a}$ de nombre de rotation p/q appartiennent sûrement à l'anneau ainsi défini et la restriction de la famille prend, dès que t est assez petit, la forme

$$(2 \text{ bis}) \quad P_{\mu, a}(\eta, \rho) = \{ \eta + (p/q) + \alpha \rho, \rho + \beta \Pi(\rho) + \gamma \zeta(\theta, \rho) \},$$

qui ne diffère de (2) que par les valeurs de α, β, γ ($t, \tau^8 t, \tau^{n-4} t$ ici alors que dans (2) elles sont τ, τ^2, τ^n).

Les lemmes 1 et 2 du premier paragraphe sont valables dès que $q\alpha < C$ et $\alpha < \tilde{\epsilon}(C, k)$, c'est-à-dire $q|(\mu, a) - \omega| < C$ et $|(\mu, a) - \omega| < \epsilon(C, k)$; la seule différence est que maintenant $\|\mathcal{K}_{\mu, a} - \text{Id}\|_k \leq O(\gamma/\alpha) = O(|\tau|^{n-4})$ qui est certes petit si $|\tau|$, c'est-à-dire $|(\mu, a) - \omega_0|$, est petit, mais ne tend pas vers 0 avec $t = O(|(\mu, a) - \omega|)$. On remplace ainsi (30) par la formule

$$(30 \text{ bis}) \quad \mathcal{K}_{\mu, a} \circ P_{\mu, a} \circ \mathcal{K}_{\mu, a}^{-1}(\eta, \rho) = \{ \eta + (p/q) + t\rho + \tau^{n-4} A(\eta, \rho), \rho + \beta \Pi(\rho) + \tau^{n-4} B(\eta, \rho) \},$$

dans laquelle la distortion t devient négligeable devant le reste incontrôlé $O(|\tau|^{n-4})$, ce qui empêche en particulier d'effectuer le dernier changement de variables (32) mais n'infirme en rien la conclusion du lemme 2 quant au bon ordre de l'ensemble des orbites périodiques de nombre de rotation p/q .

2. FAMILLES ANALYTIQUES GÉNÉRIQUES ET SOUVENIR DES RÉSONANCES PROCHES

2.1. Formes normales résonnantes

Nous supposons maintenant les difféomorphismes $P_{\mu, a}$ analytiques ainsi que leur dépendance des paramètres μ, a , et exhibons un « gros » sous-ensemble de telles familles dont chaque membre possède une suite de « bonnes langues de résonance » \hat{C}_{p_n/q_n} .

Chacune de ces dernières est indiquée par un « bon » rationnel p_n/q_n (qui tend vers ω_0 lorsque $n \rightarrow +\infty$) et correspond à des difféomorphismes $P_{\mu, a}$ dont la partie de la dynamique associée au nombre de rotation p_n/q_n peut être décrite assez précisément à l'aide d'approximations par des solutions d'équations différentielles autonomes.

Les familles d'équations différentielles obtenues sont des « modèles d'élimination résonnante de couples de courbes invariantes » et ont leur intérêt propre.

Comme dans [15], les familles génériques sont le résultat d'une infinité de modifications éventuelles au niveau du développement de Taylor, correspondant chacune à un élément p_n/q_n de la suite de nombres de rotation considérée.

L'organisation globale de ces modifications et la définition de la topologie analytique utilisée sont adaptées directement de [15]. Nous en dirons un mot à la fin du paragraphe 5 mais insistons surtout (comme dans [3]) sur l'étude de la modification élémentaire associée à un rationnel p/q donné.

Alors que dans le paragraphe précédent on fixait la famille $P_{\mu, a}$ et on considérait τ et q comme des paramètres, on commencera donc par fixer q et étudier les perturbations de la situation résonnante correspondant à $\omega_0 = p/q$. Le rôle de τ sera tenu par un troisième paramètre t fixant la distance à la résonance, la petitesse de $|t|$ assurant le caractère de « bon rationnel » de p/q pour la famille $(\mu, a) \mapsto P_{\mu, a, t}$.

Notre objet est ainsi, comme dans [3], une famille à trois paramètres (comparer à (1)) :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a, t}(z) = N_{\mu, a, t}(z) + O(|z|^{q-1}), \\ N_{\mu, a, t}(z) = z[1 + f(\mu, a, t, |z|^2)] e^{2\pi i g(\mu, a, t, |z|^2)}, \\ f(\mu, a, t, X) = \mu + aX + a_2(\mu, a, t) X^2 + \dots \text{ polynôme en } X, \\ g(\mu, a, t, X) = b_0(\mu, a, t) + b_1(\mu, a, t) X + \dots \text{ polynôme en } X, \\ a_2(0, 0, 0) = -1, \quad b_0(0, 0, 0) = p/q, \quad b_1(0, 0, 0) \neq 0, \\ \eta_0 = 2 \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0, 0) + b_1(0, 0, 0) \neq 0, \\ \frac{\partial b_0}{\partial t}(0, 0, 0) \neq 0. \end{array} \right.$$

Définissons comme dans [5]

$$\begin{aligned} r((p/q), \mu, a, t), \quad \rho_{p/q} &= \rho_{p/q}(t), \\ \gamma_{p/q} &= \gamma_{p/q}(t) = (\mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t)) \in \mathbf{C}_{p/q}(t), \end{aligned}$$

proches respectivement de 0, 0, (0, 0), par

$$(37) \quad \begin{cases} g(\mu, a, t, r((p/q), \mu, a, t)^2) = p/q, \\ \rho_{p/q}(t) = r((p/q), \mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t), t), \\ f(\mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t), t, \rho_{p/q}(t)^2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial X}(\mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t), t, \rho_{p/q}(t)^2) = 0 \end{cases}$$

(notons que $r^2((p/q), \mu, a, t)$ et $\rho_{p/q}^2(t)$ sont analytiques en (μ, a, t)).

$\rho_{p/q}(t)$ est le rayon de l'unique cercle invariant de $N_{\mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t), t}$; ce cercle est non normalement hyperbolique, et $N_{\mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t), t}$ induit dessus la rotation $R_{p/q}$.

$\mathbf{C}_{p/q}(t)$ est l'ensemble des (μ, a) pour lesquels $N_{\mu, a, t}$ possède un cercle invariant sur lequel elle induit la rotation $R_{p/q}$.

Remarquons que $r((p/q), 0, 0, 0) = \rho_{p/q}(0) = 0$, $\mu_{p/q}(0) = a_{p/q}(0) = 0$.

Les hypothèses impliquent que la fonction X définie par $X(t) = \rho_{p/q}(t)^2$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0 : en dérivant (37) par rapport à t en $\mu = a = t = X = 0$, on obtient en effet

$$(38) \quad \eta_0 \frac{\partial X}{\partial t}(0) = - \frac{\partial b_0}{\partial t}(0, 0, 0).$$

On pourra donc supposer que $\rho_{p/q}(t)^2 = t$.

Le choix du reste $O(|z|^{q-1})$ dans (36) vient de ce qu'à cause de la résonance $(e^{2\pi i b_0(0, 0, 0)})^q = 1$, une forme normale tronquée de $P_{0, 0, 0}$ (et donc de la famille $P_{\mu, a, t}$) invariante par tout le groupe $SO(2)$ des rotations n'existe que jusqu'à l'ordre $q-2$; en degré $q-1$ apparaît en effet un terme $(\bar{z})^{q-1}$ et, à partir de là, le groupe d'invariance de la forme normale tronquée se réduit au sous-groupe fini de $SO(2)$ engendré par la rotation $R_{p/q}$. Ayant besoin de formes normales sensiblement plus longues que celles de [15] et [3], nous partirons de l'expression générale (voir [1], chap. 6, § 34, ou [4]) :

$$(39) \quad P_{\mu, a, t}(z) = z\Phi(\mu, a, t, |z|^2, z^q) + \bar{z}^{q-1}\Psi(\mu, a, t, |z|^2, z^q) + O(|z|^{q+1}),$$

dans laquelle $\Phi(\mu, a, t, X, Y)$ et $\Psi(\mu, a, t, X, Y)$ sont des polynômes en X, Y, \bar{Y} dont les coefficients sont des fonctions analytiques à valeurs complexes des paramètres μ, a, t , et Q est un entier arbitraire.

Remarquons que (39) s'écrit encore

$$(40) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t}(z) = z\Phi'(\mu, a, t, |z|^2, z^q) + \sum_{m \geq 1} \gamma_m(\mu, a, t) \bar{z}^{mq-1} + O(|z|^{q+1}) \\ \quad = z[1 + A(\mu, a, t, |z|^2, z^q)] e^{2\pi i B(\mu, a, t, |z|^2, z^q)} \\ \quad \quad + \sum_{m \geq 1} \gamma_m(\mu, a, t) \bar{z}^{mq-1} + O(|z|^{q+1}), \end{cases}$$

$A(\mu, a, t, X, Y)$ et $B(\mu, a, t, X, Y)$ étant maintenant des polynômes en X, Y, \bar{Y} , dont les coefficients sont des fonctions analytiques de (μ, a, t) à valeurs réelles.

En coordonnées polaires $z = re^{2\pi i\theta}$, A et B deviennent des polynômes

$$\tilde{f}(\mu, a, t, r^2, r^a \cos(2\pi q\theta), r^a \sin(2\pi q\theta))$$

et $\tilde{g}(\mu, a, t, r^2, r^a \cos(2\pi q\theta), r^a \sin(2\pi q\theta))$

en leurs trois dernières variables, dont les coefficients sont des fonctions analytiques à valeurs réelles de (μ, a, t) , et

$$P_{\mu, a, t}(z) = ze^{2\pi i\tilde{\theta}}[1 + \tilde{f} + \sum_{m \geq 1} \gamma_m r^{ma-2} e^{-2\pi i(ma\theta + \tilde{\theta})} + O(|z|^0)].$$

On supposera dans la suite que $\gamma_1(0, 0, 0) \neq 0$.

Ceci permet d'écrire $\gamma_1(\mu, a, t) = c_1(\mu, a, t) e^{2\pi i d_1(\mu, a, t)}$ où c_1 et d_1 sont des fonctions analytiques à valeurs réelles de (μ, a, t) ; on pose

$$(41) \quad U_1(\mu, a, t, \theta, r) = q\theta + \tilde{g}(\mu, a, t, r^2, r^a \cos(2\pi q\theta), r^a \sin(2\pi q\theta)) - d_1(\mu, a, t).$$

On pourra choisir dans la suite $Q = 2q - 4$, mais le choix de $Q = q$ comme dans [15] et [3] se révélera insuffisant. En particulier, seul le premier terme interviendra explicitement dans la somme du deuxième membre de (40) (celui qui correspond à $m = 1$), et l'expression de $P_{\mu, a, t}$ en coordonnées polaires devient :

$$(42) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t}(re^{2\pi i\theta}) = Re^{2\pi i\theta}, \\ \Theta = \theta + \tilde{g} - \frac{c_1 r^{a-2}}{2\pi(1 + \tilde{f})} \sin(2\pi U_1) + O(|z|^{2a-4}), \\ R = r[1 + \tilde{f} + c_1 r^{a-2} \cos(2\pi U_1) + O(|z|^{2a-4})]; \end{cases}$$

nous noterons

$$(43) \quad \tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(\mu, a, t) = \frac{c_1(\mu, a, t)}{2\pi(1 + \tilde{f}(\mu, a, t, 0, 0, 0))}.$$

Après une rotation des coordonnées de $(1/q)(\tilde{g}(\mu, a, t, 0, 0, 0) - d_1(\mu, a, t))$ qui remplace $2\pi U_1(\mu, a, t, \theta, 0)$ par $2\pi q\theta$, on obtient

$$(44) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t}(re^{2\pi i\theta}) = Re^{2\pi i\theta}, \\ \Theta = \theta + g(\mu, a, t, r^2) - \tilde{c}_1 r^{a-2} \sin(2\pi q\theta) \\ \quad + r^a \psi_0(\mu, a, t, \theta, r^2) + r^{2a-4} \Psi_0(\mu, a, t, \theta, r), \\ R = r[1 + f(\mu, a, t, r^2) + c_1 r^{a-2} \cos(2\pi q\theta) \\ \quad + r^a \phi_0(\mu, a, t, \theta, r^2) + r^{2a-4} \Phi_0(\mu, a, t, \theta, r)], \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} f(\mu, a, t, r^2) = \tilde{f}(\mu, a, t, r^2, 0, 0), \\ g(\mu, a, t, r^2) = \tilde{g}(\mu, a, t, r^2, 0, 0), \end{cases}$$

et φ_0 et ψ_0 sont des polynômes en leur dernière variable, dont les coefficients sont des fonctions analytiques à valeurs réelles de μ, a, t, θ , $(1/q)$ -périodiques en θ , et Φ_0, Ψ_0 sont des fonctions analytiques de leurs variables.

Bien entendu, en remplaçant $O(|z|^{2q-4})$ par $O(|z|^{q-2})$, on retrouve la formule (36).

Nous faisons maintenant, pour tout $t > 0$ (*i.e.* $\rho_{p/q} \neq 0$), les changements de variables

$$(\theta, r) \mapsto (\theta, \sigma) \mapsto (\theta, \rho)$$

définis par

$$(45) \quad r = r((p/q), \mu, a, t) \sqrt{1 + \sigma}, \quad |\sigma| \leq 1/2 \quad (\text{comparer à [5] formule (30)}),$$

et par la condition que Θ soit égal à $\theta + (p/q) + \tau_{p/q} \rho$ (comparer à [5] formule (43)).

Rappelons que dans le carré $\mathcal{D}_{p/q} = \mathcal{D}_{p/q}(t)$ associé à la famille $(\mu, a) \mapsto N_{\mu, a, t}$ comme dans le lemme 1 de [5] (voir aussi le paragraphe 1 ci-dessus) nous avons (voir les formules (39), (40), (41) de [5]) :

$$(46) \quad \begin{cases} |r((p/q), \mu, a, t)^2 - \rho_{p/q}^2| \leq C \rho_{p/q}^4, \\ |\tau((p/q), \mu, a, t) - \tau_{p/q}| \leq F \rho_{p/q}^4, \\ |\tau_{p/q} - b_1(\mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t), t) \rho_{p/q}^2| \leq F \rho_{p/q}^4, \end{cases}$$

où les distorsions sont définies par des formules analogues à celles de ([5], formule (31) et lemme 1), *i.e.*

$$(47) \quad \begin{cases} \tau((p/q), \mu, a, t) = \frac{\partial g}{\partial X}(\mu, a, t, r((p/q), \mu, a, t)^2) r((p/q), \mu, a, t)^2, \\ \tau_{p/q} = \tau_{p/q}(t) = \tau((p/q), \mu_{p/q}(t), a_{p/q}(t), t). \end{cases}$$

Rappelons également qu'en termes des coordonnées ν', ε' définies en ([5], formules (31), (34), (45) = (119)), $\mathcal{D}_{p/q}(t)$ est approximativement défini par les formules $|\nu'| \lesssim \rho_{p/q}^6$, $|\varepsilon'| \lesssim \rho_{p/q}^6$ ([5], lemme 1). Après l'éclatement

$$(48) \quad \nu' = \rho_{p/q}^6 \tilde{\nu}, \quad \varepsilon' = \rho_{p/q}^6 \tilde{\varepsilon}, \quad |\nu'| \lesssim 1, \quad |\varepsilon'| \lesssim 1,$$

μ et a deviennent des fonctions analytiques de $\tilde{\nu}, \tilde{\varepsilon}, t$ dont le développement de Taylor en t est de la forme

$$(49-1) \quad \mu(\tilde{\nu}, \tilde{\varepsilon}, t) = -t^2 + O(t^3), \quad a(\tilde{\nu}, \tilde{\varepsilon}, t) = 2t + O(t^2);$$

de même, on déduit de (46) que (comme fonctions de $\tilde{\nu}, \tilde{\varepsilon}, t$),

$$(49-2) \quad \begin{cases} r^2((p/q), \mu, a, t) = t + O(t^2), \\ \tau_{p/q} = b_1(0, 0, 0) t + O(t^2) \quad (\text{fonction de } t \text{ seulement}), \text{ et} \\ \tau((p/q), \mu, a, t) = \tau_{p/q} + O(t^2) = b_1(0, 0, 0) t + O(t^2). \end{cases}$$

Enfin, les expressions obtenues pour les coordonnées de $P_{\mu, a, t}$ étant analytiques en $r((p/q), \mu, a, t) = \sqrt{t}(1 + O(t))$, il est naturel de remplacer t par t^2 , c'est-à-dire de poser

$\varrho_{p/q} = t$. Nous considérerons donc dorénavant la famille P_{μ, a, t^2} , $(\mu, a) \in \mathcal{D}_{p/q}(t^2)$, qui a l'avantage d'être analytique en les variables $(\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t, \theta, \rho)$ (bien entendu, à t fixé non nul, on retrouve l'analyticité en $(\mu, a) \in \mathcal{D}_{p/q}(t^2)$).

On obtient un plongement de $\mathbf{T}^1 \times [-1/2, 1/2]$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ de la forme

$$(50) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t^2}(\theta, \rho) = (\Theta, R), \quad \mu = \mu(\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t^2), \quad a = a(\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t^2), \\ \Theta = \theta + (p/q) + \tau_{p/q} \rho, \\ R = v' + (1 + \varepsilon') \rho + s' \rho^2 + \sum_{i \geq 3} a'_i \rho^i \\ \quad + c_1(1 + \rho)^{(q/2)-1} [2(1 + \mu)(1 + \rho) - q\rho] t^{q-2} \cos(2\pi q\theta) \\ \quad + t^q \varphi(\mu, a, t, \theta, \rho) + t^{2q-6} \Phi(\mu, a, t, \theta, \rho), \end{cases}$$

analytique en $\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t, \theta, \rho$, où φ est (p/q) -périodique en θ , et qui précise la formule (2) du paragraphe 1.

On a repris ici les notations de la formule (119) de [5] (voir aussi le début du § 1); en particulier,

$$s' \sim -2t^4, \quad |a'_i| \leq C_i t^{2i-2} \quad \text{pour } i \geq 3;$$

$\mathcal{D}_{p/q} = \mathcal{D}_{p/q}(t^2)$ est essentiellement défini par $|v'| \lesssim t^6$, $|\varepsilon'| \lesssim t^6$, et on retiendra que $\tau_{p/q} = \tau_{p/q}(t^2) \sim b_1(0, 0, 0) t^2$, et que nous avons supposé $c_1(0, 0, 0) \neq 0$ (par exemple > 0).

Nous reprenons maintenant la démarche du paragraphe 1 en considérant P_{μ, a, t^2} non plus comme perturbation d'ordre t^{q-2} d'une forme normale N_{μ, a, t^2} invariante par $\text{SO}(2)$, mais comme perturbation d'ordre t^{2q-6} d'une « forme normale résonnante » \hat{N}_{μ, a, t^2} invariante seulement par le sous-groupe fini de $\text{SO}(2)$ engendré par la rotation $R_{p/q}$.

$$(51) \quad \begin{cases} \hat{N}_{\mu, a, t^2}(\theta, \rho) = (\hat{\Theta}, \hat{R}) = N_{\mu, a, t^2}(\theta, \rho) + (0, t^{q-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, \rho)), \\ \hat{\Theta} = \theta + (p/q) + \tau_{p/q} \rho, \\ \hat{R} = v' + (1 + \varepsilon') \rho + s' \rho^2 + \sum_{i \geq 3} a'_i \rho^i + t^{q-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, \rho), \\ \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, \rho) = c_1(1 + \rho)^{(q/2)-1} [2(1 + \mu)(1 + \rho) - q\rho] \cos(2\pi q\theta) \\ \quad + t^2 \varphi(\mu, a, t, \theta, \rho). \end{cases}$$

Les estimations du paragraphe 1 peuvent être menées de la même façon : les difféomorphismes définis par les formules (19), (24), (28) sont remplacés par

$$(52) \quad \begin{cases} \hat{H}_{\mu, a, t^2} = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-j} \circ \hat{N}_{\mu, a, t^2}^j, \\ K_{\mu, a, t^2} = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} R_{p/q}^{-j} \circ P_{\mu, a, t^2}^j, \\ \hat{\mathcal{K}}_{\mu, a, t^2} = \hat{H}_{\mu, a, t^2}^{-1} \circ K_{\mu, a, t^2}, \end{cases}$$

dont les propriétés sont analogues à celles décrites par les lemmes 2 et 3 : en effet, le lemme 2 découle formellement du lemme 1, qui est encore vrai lorsqu'on remplace τ^n

par t^{2a-6} , $P_{\mu, a}$ par P_{μ, a, t^2} , $N_{\mu, a}$ par \hat{N}_{μ, a, t^2} , et il n'y a rien à changer à la démonstration du lemme 3 si on remarque que seule intervenait la commutation de $H_{\mu, a}$ à la rotation $R_{p/q}$.

Sous les hypothèses du lemme 2, le difféomorphisme $\hat{\mathcal{K}}_{\mu, a, t^2}$ est donc $O(t^{2a-8})$ -proche de l'Identité dans la topologie C^k , il transporte la courbe des points transformés radialement par $R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^2}^a$ sur la courbe (ce n'est pas un cercle !) des points transformés radialement par $R_p^{-1} \circ \hat{N}_{\mu, a, t^2}^a$, et transforme P_{μ, a, t^2} en un difféomorphisme (*que, conformément à la note au bas de la page 15, on notera encore abusivement P_{μ, a, t^2} par la suite*)

$$(53) \quad \begin{cases} \hat{\mathcal{K}}_{\mu, a, t^2} \circ P_{\mu, a, t^2} \circ \hat{\mathcal{K}}_{\mu, a, t^2}^{-1}(\theta, \rho) = (\Theta_1, R_1), \\ \Theta_1 = \theta + (p/q) + \tau_{p/q} \rho + t^{2a-8} \alpha(\mu, a, t, \theta, \rho), \\ R_1 = v' + (1 + \varepsilon') \rho + s' \rho^2 + \sum_{i \geq 3} a'_i \rho^i + t^{a-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, \rho) \\ \quad + t^{2a-8} \beta(\mu, a, t, \theta, \rho), \end{cases}$$

dont les points périodiques (θ, ρ) de nombre de rotation p/q vérifient

$$(54) \quad \tau_{p/q} \rho + t^{2a-8} \alpha(\mu, a, t, \theta, \rho) = 0$$

(autrement dit, $\hat{\mathcal{K}}_{\mu, a, t^2} \circ P_{\mu, a, t^2} \circ \hat{\mathcal{K}}_{\mu, a, t^2}^{-1}$ induit sur ces points la rotation $R_{p/q}$).

Le changement de variables défini par

$$(55) \quad \tau_{p/q} x = \tau_{p/q} \rho + t^{2a-8} \alpha(\mu, a, t, \theta, \rho)$$

conduit enfin à un difféomorphisme, lui aussi noté P_{μ, a, t^2} , de la forme

$$(56) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t^2}(\theta, x) = (\Theta, X), \\ \Theta = \theta + (p/q) + \tau_{p/q} x, \\ X = v' + (1 + \varepsilon') x + s' x^2 + \sum_{i \geq 3} a'_i x^i + t^{a-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, x) \\ \quad + t^{2a-10} \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta, x), \end{cases}$$

dont les points périodiques de nombre de rotation p/q sont donnés par les équations

$$(57) \quad \begin{cases} x = 0, \\ v' + t^{a-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, 0) + t^{2a-10} \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta, 0) = 0. \end{cases}$$

Remarquons enfin que, $\hat{\varphi}$ étant invariante par $R_{p/q}$, et la restriction du difféomorphisme à ses points périodiques de nombre de rotation p/q étant la rotation $R_{p/q}$, la nullité de

$$v' + t^{a-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, 0) + t^{2a-10} \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta, 0)$$

implique celle de

$$v' + t^{a-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, 0) + t^{2a-10} \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta + (p/q), 0).$$

En particulier, les points périodiques de nombre de rotation p/q de P_{μ, a, t^2} sont encore définis par les équations

$$(58) \quad \begin{cases} x = 0, \\ v' + t^{q-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, 0) + (1/q) t^{2q-10} \sum_{i=0}^{q-1} \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta + i(p/q), 0) = 0, \end{cases}$$

et il est plus agréable d'écrire $P_{\mu, a, t}$ sous la forme

$$(59) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t}(\theta, x) = (\Theta, X), \quad \mu = \mu(\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t^2), \quad a = a(\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t^2), \\ \Theta = \theta + (p/q) + \tau_{p/q} x, \\ X = v' + (1 + \varepsilon') x + s' x^2 + \sum_{i \geq 3} a'_i x^i + t^{q-2} \eta(\mu, a, t, \theta, x) \\ \quad + t^{2q-10} \gamma(\mu, a, t, \theta, x), \end{cases}$$

où η ((p/q)-périodique en θ) et γ , analytiques en $\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t, \theta, x$, sont définies par

$$(60) \quad \begin{cases} t^{q-2} \eta(\mu, a, t, \theta, x) = t^{q-2} \hat{\varphi}(\mu, a, t, \theta, x) \\ \quad + (1/q) t^{2q-10} \sum_{i=0}^{q-1} \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta + i(p/q), x), \\ \gamma(\mu, a, t, \theta, x) = \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta, x) - (1/q) \sum_{i=0}^{q-1} \tilde{\gamma}(\mu, a, t, \theta + i(p/q), x). \end{cases}$$

Les points périodiques de $P_{\mu, a, t}$ sont alors donnés par les équations

$$(61) \quad \begin{cases} x = 0, \\ v' + t^{q-2} \eta(\mu, a, t, \theta, 0) = 0 \end{cases}$$

qui précisent (35).

Enfin, on remplacera v' par $v' + t^{q-2} \int_0^{1/q} \eta(\mu, a, t, \theta, 0) d\theta$, ce qui permettra dans la suite de supposer que

$$(62) \quad \int_0^{1/q} \eta(\mu, a, t, \theta, 0) d\theta = 0.$$

Remarques. — (i) On aurait pu, à partir de (50), remplacer $\tau_{p/q}$ par t^2 dans l'expression de Θ en choisissant autrement le changement de variables $(\theta, \sigma) \rightarrow (\theta, \rho)$, mais nous avons voulu conserver la symétrie avec les formules de [5] et [6].

(ii) Dans la formule (59), le $2q - 10$ n'est bien entendu pas significatif; on peut le remplacer par Q « assez grand ».

(iii) On déduit de (61) que l'ensemble $\hat{C}_{p/q}(t^2) \cap \mathcal{D}_{p/q}(t^2)$ des valeurs de $(\mu, a) \in \mathcal{D}_{p/q}$ pour lesquelles $P_{\mu, a, t}$ possède une orbite périodique (forcément bien ordonnée) de nombre de rotation p/q est défini par

$$- t^{q-2} \inf_{\theta \in \mathbb{T}^1} \eta(\mu, a, t, \theta, 0) \leq v' \leq t^{q-2} \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} \eta(\mu, a, t, \theta, 0),$$

c'est-à-dire (à $O(t^q)$ près, voir (51)) :

$$- 2c_1 t^{q-2} \lesssim v' \lesssim 2c_1 t^{q-2}.$$

Son bord, image d'un pli quadratique (lieu singulier de la restriction de la projection sur $\mathcal{D}_{p/q}$) de la surface $v' = - t^{q-2} \eta(\mu, a, t, \theta, 0)$ définie dans $\mathcal{D}_{p/q} \times [-1/2q, 1/2q]$ (figure 1), est analytique.

2.2. Réduction des formes normales à leur partie signifiante et interpolation par une famille d'équations différentielles

Si nous considérons à nouveau la famille P_{μ, a, t^*} ($t = \rho_{p/q}$ fixé) comme une perturbation d'ordre $|z|^{q-1}$ d'une forme normale N_{μ, a, t^*} invariante par $SO(2)$, nous pouvons lui appliquer directement les résultats de [5] et [6] avec $2n + 3 = q - 1$ (que $n = (q/2) - 2$ ne soit pas forcément entier n'a aucune importance). En particulier, P_{μ, a, t^*} « ressemble » à N_{μ, a, t^*} (au sens de [5] § 2-3) dans le complémentaire $\mathcal{H}(t^2)$ du domaine $\mathcal{V}(t^2)$ bordé par les courbes $\Gamma_{n-3}^-(t^2)$ et $\Gamma_n^+(t^2)$ définies comme dans le § 1-2 de [5].

Soit $\delta_{p/q} = \delta_{p/q}(k, K, t^2) \subset \mathcal{D}_{p/q} = \mathcal{D}_{p/q}(t^2)$ le « rectangle » défini (pour $k \geq 0$, $K > 0$) par

$$\delta_{p/q} = \{(\mu, a) \in \mathcal{D}_{p/q}, \quad |\varepsilon'| \leq K t^{(q/2)+1-k}, \quad |\nu'| \leq (K^2/8) t^{q-2-2k}\}.$$

Ce « rectangle » est beaucoup plus petit que $\mathcal{D}_{p/q}$ (défini approximativement par $|\varepsilon'| \leq t^6$, $|\nu'| \leq t^6$); le premier des lemmes ci-dessous indique cependant qu'on pourra ne considérer dans la suite que les valeurs de (μ, a, t) telles que (μ, a) appartienne à $\delta_{p/q}(4, K, t^2)$, où K est une constante bien choisie (*). Les lemmes suivants montrent que, pour ces valeurs, la restriction de P_{μ, a, t^*} à un anneau contenant toute sa récurrence non triviale admet, dans des coordonnées bien choisies, une expression débarrassée de tout ornement superflu (**) et donc accessible à l'analyse (je veux dire à la géométrie).

Dans tout ce qui suit, $t = \rho_{p/q}$ est supposé assez petit (et $q \geq 18$).

Lemme 4. — *Si K est assez grand, $\delta_{p/q}(4, K, t^2)$ contient toutes les valeurs de (μ, a) pour lesquelles P_{μ, a, t^*} possède une orbite périodique (forcément bien ordonnée) de nombre de rotation p/q n'appartenant pas à une courbe fermée invariante entourant l'origine. Plus précisément, $\delta_{p/q}(4, K, t^2)$ contient $\hat{C}_{p/q}(t^2) \cap \mathcal{V}(t^2)$ (les notations sont celles de [6] § 1.2, déjà rappelées ici, voir fig. 2).*

Démonstration. — C'est une conséquence directe du lemme 1 de ([6] § 2) et des estimations du § 1.4 de [5] :

$\Gamma_p^\pm(t^2)$ a une équation approchée de la forme

$$8t^4\nu' + \varepsilon'^2 + \dots + O(t^{2p}) = 0,$$

et la largeur horizontale du trou séparant les composantes connexes de $\hat{C}_{p/q}(t^2) \cap \mathcal{H}(t^2)$ est d'ordre $O(t^{q-3}) = O(t^{(q/2)-5})$ dans la coordonnée a , donc d'ordre $O(t^{(q/2)-3})$ dans la coordonnée ε' . Tout ceci est résumé sur la figure 2 ci-dessous qu'on comparera à la figure 3 de [6] en se rappelant que $\nu' \simeq \nu$ et $\varepsilon' \simeq \varepsilon$.

(*) « Moralement », on devrait pouvoir prendre $k = 0$ et K assez grand; l'entier k n'est nécessaire que parce que l'on n'a pas une estimation suffisamment précise de la région où la seule récurrence non triviale appartient à des courbes invariantes.

(**) En fait, certains ne le sont pas, tel le terme xy^3 que contient $yA(\mu, a, t, \theta, y)$ dans la formule (63) : son coefficient x est équivalent à $\gamma t^{(q/2)-3-k}$ (formules (103) et (104) du § 6) dont la non-nullité empêche P_{μ, a, t^*}^q d'avoir un comportement conservatif au voisinage de ses points fixes elliptiques.

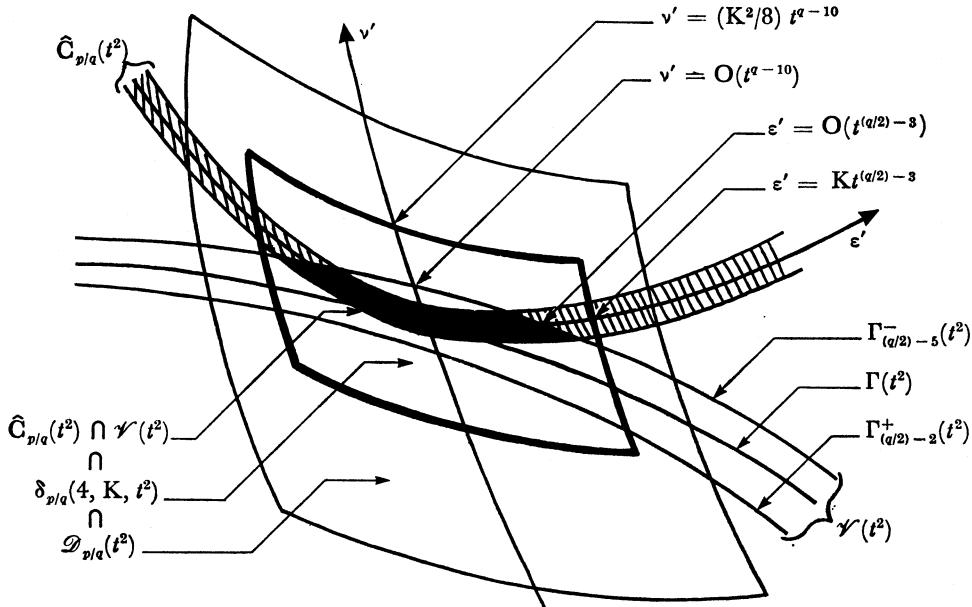


FIG. 2

Lemme 5. — Si (μ, a) appartient à $\delta_{p/q}(k, K, t^2)$, il existe L (dépendant de k et K mais pas de t) tel que toute la récurrence non triviale de P_{μ, a, t^2} (défini par (59)) soit contenue dans l'anneau $|x| \leq Lt^{(q/2)-3-k}$.

Démonstration. — Notons

$$P_{\mu, a, t^2}(\theta, x) = (\theta + (p/q) + \tau_{p/q} x, x + \Pi(\theta, x)).$$

Dans l'anneau $|x| \leq Bt$ (B constante) qui, ainsi qu'on l'a rappelé au début du § 1, contient toute la récurrence non triviale de P_{μ, a, t^2} pour $(\mu, a) \in \mathcal{D}_{p/q}(t^2)$, on a (se rappeler que $s' = -2t^4 + O(t^6)$ et $|a'_i| \leq C_i t^{2i-2}$ pour $i \geq 3$) :

$$\Pi(\theta, x) \leq v' + \epsilon' x + (3/4) s' x^2 + v'_0,$$

où $v'_0 = \eta_0 t^{q-2}$, $\eta_0 = 2 \sup |\eta(\mu, a, t, \theta, x)|$,

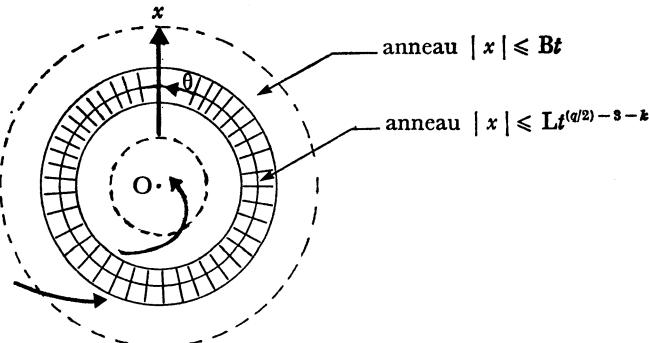


FIG. 3

le sup étant pris sur l'ensemble $\{(\mu, a, t, \theta, x) \mid (\mu, a) \in \mathcal{D}_{p/q}(t^2), t \text{ voisin de } 0, |x| \leq Bt\}$, et donc $\Pi(\theta, x) \leq -v'_0$ dès que x est à l'extérieur de l'intervalle défini par les racines $(2/3s')(-\varepsilon' \pm [(\varepsilon')^2 - 3s'(v' + 2v'_0)]^{1/2})$ du polynôme $v' + 2v'_0 + \varepsilon' x + (3/4)s'x^2$. Si (μ, a) appartient à $\delta_{p/q}(k, K, t^2)$, la plus grande des valeurs absolues des racines est majorée par

$$(2/3 |s'|) \{ Kt^{(q/2)+1-k} + [K^2 t^{q+2-2k} + 3 |s'| ((K^2/8) t^{q-2-2k} + 2\eta_0 t^{q-2})]^{1/2} \} \leq L t^{(q/2)-3-k};$$

la dynamique de P_{μ, a, t^2} n'a donc pas de récurrence (à l'exception du point fixe 0) hors de l'anneau $|x| \leq L t^{(q/2)-3-k}$ (fig. 3) ce qui démontre le lemme.

Lemme 6. — Le changement de coordonnées

$$x = t^{(q/2)-3-k} y, \quad |y| \leq L,$$

conduit à la « forme canonique » suivante de P_{μ, a, t^2} , analytique en $\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t, \theta, y$:

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a, t^2}(\theta, y) = (\Theta, Y), \quad \begin{cases} \mu = \mu(\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t^2), \quad a = a(\tilde{v}, \tilde{\varepsilon}, t^2), \\ (\mu, a) \in \delta_{p/q}(k, K, t^2) \end{cases} \\ \Theta = \theta + (p/q) + wy, \\ Y = \alpha + (1 + \beta)y + \gamma y^2 + \delta \xi(\mu, a, t, \theta) \\ \quad + yA(\mu, a, t, \theta, y) + B(\mu, a, t, \theta, y), \\ w = \tau_{p/q} t^{(q/2)-3-k} = b_1(0, 0, 0) t^{(q/2)-1-k} + O(t^{(q/2)+1-k}), \\ |\alpha| = |v'| t^{-(q/2)+3+k} \leq (K^2/8) t^{(q/2)+1-k}, \\ |\beta| = |\varepsilon'| \leq K t^{(q/2)+1-k}, \\ \gamma = s' t^{(q/2)-3-k} = -2t^{(q/2)+1-k} + O(t^{(q/2)+3-k}), \\ \delta = 2c_1 t^{q-2} t^{-(q/2)+3+k} = 2c_1 t^{(q/2)+1+k}, \\ \xi(\mu, a, t, \theta) = \cos(2\pi q\theta) + O(t^2), \quad (1/q)\text{-périodique en } \theta, \\ \int_0^{1/q} \xi(\mu, a, t, \theta) d\theta = 0, \\ A(\mu, a, t, \theta, y) = O(t^{q-2-2k}), \quad (1/q)\text{-périodique en } \theta, \\ B(\mu, a, t, \theta, y) = O(t^q), \quad Q = (3q/2) - 7 + k. \end{array} \right.$$

De plus, si Φ_{μ, a, t^2}^s est le flot de l'équation différentielle du second ordre invariante par $R_{p/q}$

$$(E_{\mu, a, t^2}) \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = wy, \\ \frac{dy}{ds} = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta \xi(\mu, a, t, \theta), \end{cases}$$

les orbites périodiques de P_{μ, a, t^*} de nombre de rotation p/q coïncident exactement avec les points singuliers de E_{μ, a, t^*} , et P_{μ, a, t^*} est très bien approchée dans l'anneau $|y| \leq L$ par la composée

$$R_{p/q} \circ \Phi_{\mu, a, t^*}^1 = \Phi_{\mu, a, t^*}^1 \circ R_{p/q}$$

de la rotation $R_{p/q}$ et du « temps 1 » de E_{μ, a, t^*} .

Plus précisément, $(P_{\mu, a, t^*} - R_{p/q} \circ \Phi_{\mu, a, t^*}^1)(\theta, x)$ est de la forme $(O(t^{a-2k}), O(t^{a-2-2k}))$

ainsi que ses dérivées partielles (avec bien sûr des constantes dépendant de l'ordre de dérivation).

Démonstration. — Le changement de coordonnées indiqué conduit évidemment à la forme canonique donnée dans le lemme, avec

$$\begin{aligned} \delta\xi(\mu, a, t, \theta) &= t^{(a/2)+1+k} \eta(\mu, a, t, \theta, 0), \\ yA(\mu, a, t, \theta, y) &= \sum_{i \geq 3} a'_i (t^{(a/2)-3-k})^{i-1} y^i \\ &\quad + t^{(a/2)+1+k} [\eta(\mu, a, t, \theta, t^{(a/2)-3-k} y) - \eta(\mu, a, t, \theta, 0)] \\ B(\mu, a, t, \theta, y) &= t^{(3a/2)-7+k} \gamma(\mu, a, t, \theta, t^{(a/2)-3-k} y). \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation différentielle E_{μ, a, t^*} : l'assertion sur les points singuliers découlant de (61), il reste à évaluer la solution au temps 1 ; il suffit pour cela de considérer E_{μ, a, t^*} comme perturbation de l'équation linéaire

$$\frac{d\theta}{ds} = wy, \quad \frac{dy}{ds} = \beta y.$$

Les calculs sont sans mystère et, n'utilisant pas explicitement dans la suite la dernière assertion du lemme, nous ne les reproduirons pas ici.

Remarques. — (i) Travailler, comme dans [15] ou [3] dans l'anneau plus petit $|x| \leq O(t^{(a/2)-2})$, pour $(\mu, a) \in \delta_{p/q}(-1, K, t^2)$, revient à repousser dans le reste le terme quadratique γy^2 et donc à ne plus s'intéresser aux orbites périodiques qui, dans le modèle équation différentielle, jouent le rôle des courbes invariantes de P_{μ, a, t^*} dont on étudie l'élimination. Lorsque $\alpha = \beta = 0$, on retrouve alors l'équation du pendule hamiltonien

$$\frac{d\theta}{ds} = wy, \quad \frac{dy}{ds} = \delta \cos(2\pi q\theta)$$

qu'utilise implicitement Zehnder.

(ii) Que $P_{0, 0, 0}(z)$ soit, en $z = 0$, approché par une forme normale formelle de la forme $R_{p/q} \circ \Phi^1(z) = \Phi^1 \circ R_{p/q}(z)$, où Φ^1 est le « temps 1 » d'une équation différentielle formelle ayant pour seule singularité l'origine, c'est-à-dire l'unique orbite de nombre de rotation p/q de $P_{0, 0, 0}$, est bien connu (voir une discussion du cas hamiltonien dans [14]). On a ici un résultat analogue après déploiement, le voisinage infinitésimal de 0 étant remplacé par un voisinage tubulaire d'une courbe fermée contenant les orbites périodiques de nombre de rotation p/q de P_{μ, a, t^*} .

(iii) Dans les coordonnées α, β , l'ensemble $\hat{C}_{p/q}(t^2) \cap \delta_{p/q}(k, K, t^2)$ des $(\mu, a) \in \delta_{p/q}(k, K, t^2)$ pour lesquels P_{μ, a, t^2} possède une orbite périodique (forcément bien ordonnée) de nombre de rotation p/q est défini par

$$\delta \inf_{\theta \in \mathbb{T}^1} \xi(\mu, a, t, \theta) \leq \alpha \leq \delta \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} \xi(\mu, a, t, \theta),$$

c'est-à-dire, à $O(\delta t^2) = O(t^{(q/2)+3+k})$ près, $-\delta \lesssim \alpha \lesssim \delta$.

Rappelons (Remarque (iii) à la fin du § 2.1) que son bord est analytique.

(iv) Le paramètre t étant fixé, w est indépendant de α, β ; quant à γ, δ , ils le sont presque, puisque l'on déduit de (63) et de la définition de ν', ε' dans [5] que

$$(63 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \frac{\partial s'}{\partial \nu'} \cdot t^{q-6-2k} = O(t^{q-8-2k}), & \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \frac{\partial s'}{\partial \varepsilon'} \cdot t^{(q/2)-3-k} = O(t^{(q/2)-5-k}), \\ \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = 2 \frac{\partial c_1}{\partial \nu'} \cdot t^{q-2} = O(t^{q-4}), & \frac{\partial \delta}{\partial \beta} = 2 \frac{\partial c_1}{\partial \varepsilon'} \cdot t^{(q/2)+1+k} = O(t^{(q/2)-1+k}). \end{cases}$$

3. FONCTIONS DE LIAPUNOV

Ce paragraphe et le suivant représentent pour les bons rationnels l'analogue du § 2.3 de [5] dans lequel nous montrions l'existence de beaucoup de « bons » chemins d'élimination le long desquels $P_{\mu, a}$ « ressemble », pour toutes les valeurs du paramètre, à une forme normale.

Bien entendu, dans le cas présent, l'existence générique d'orbites périodiques isolées exclut que les régions (respectivement $\mathcal{A}_{p/q} - \hat{C}_{p/q}$ et $\mathcal{B}_{p/q}^0 - \hat{C}_{p/q}$) dans lesquelles $P_{\mu, a, t}$ « ressemble » à une forme normale se touchent en un point $\tilde{\gamma}_{p/q}$, mais on montre que ces régions sont aussi grandes que possible, venant embrasser de chaque côté la langue de résonance $\hat{C}_{p/q}$ (comparer les figures 4 et 12 à la figure 12 de [5]). Nous avons déjà dit dans l'introduction que ceci implique un contrôle parfait sur le premier et le dernier point de bifurcation d'une famille à un paramètre d'élimination (*i.e.* traversant $\hat{C}_{p/q}$) passant par ces régions (fig. 20).

Il est recommandé au lecteur de prendre connaissance de l'Appendice avant de poursuivre son chemin.

Dorénavant, on suppose que $t > 0$ est assez petit, que (μ, a) appartient au rectangle $\delta_{p/q}(k, K, t^2)$, et on étudie la dynamique de $P_{\mu, a, t}$: $\mathbf{T}^1 \times [-L, L] \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ défini par (63).

$\alpha = \nu' t^{-(d/2)+3+k}$ et $\beta = \varepsilon'$ sont des coordonnées sur $\delta_{p/q}(k, K, t^2)$, qui est défini par les inégalités $|\alpha| \leq (K^2/8) t^{(d/2)+1-k}$, $|\beta| \leq K t^{(d/2)+1-k}$.

On supposera w et δ positifs.

Pour alléger, on omettra souvent d'indiquer la dépendance en t , ou même en (μ, a, t) , écrivant par exemple $\hat{C}_{p/q}$ au lieu de $\hat{C}_{p/q}(t^2)$, $\xi(\theta)$ au lieu de $\xi(\mu, a, t, \theta)$, etc.

3.1. Loin des îles de nombre de rotation p/q

Nous utiliserons de plusieurs façons dans la suite l'approximation de $R_{p/q}^{-1} \circ P_{\mu, a, t}$ par le « temps 1 » $\Phi_{\mu, a, t}^1$ de l'équation différentielle $E_{\mu, a, t}$. Pour le moment, elle va nous suggérer des fonctions de Liapunov qui permettront plus tard de déterminer complètement les bassins des attracteurs et des répulseurs de $P_{\mu, a, t}$ pour certaines valeurs des paramètres.

Définissons les régions $\mathcal{A}_{p/q} = \mathcal{A}_{p/q}(k, K, t^2)$, $\mathcal{B}_{p/q}^\pm = \mathcal{B}_{p/q}^\pm(k, K, t^2)$, $\mathcal{B}_{p/q}^0 = \mathcal{B}_{p/q}^0(k, K, t^2) = \mathcal{B}_{p/q}^+ \cap \mathcal{B}_{p/q}^-$ de $\delta_{p/q} = \delta_{p/q}(k, K, t^2)$ par

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{p/q} = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \beta^2 - 4(\alpha + K_1 t^{q-2-2k}) \gamma \leq 0\}, \\ \mathcal{B}_{p/q}^0 = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha - K_1 t^{q-2-2k} \geq |\gamma| c^2 t^{2+2k} + ct^{1+k} |\beta|\}, \\ \mathcal{B}_{p/q}^\pm = \left\{ \begin{array}{l} (\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha - K_1 t^{q-2-2k} \geq |\gamma| c^2 t^{2+2k} \mp ct^{1+k} \beta \text{ si } \alpha \geq K_1 t^{q-2-2k} \\ (\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha - K_1 t^{q-2-2k} \geq \frac{\beta^2}{4\gamma} - \frac{\gamma^3 c^4 t^{4+4k}}{4\beta^2} \text{ si } \alpha \leq K_1 t^{q-2-2k} \end{array} \right\}, \end{array} \right.$$

où K_1 est une constante positive assez grande, et $c = \left(\frac{8c_1(0, 0, 0)}{b_1(0, 0, 0) \pi q} \right)^{1/2}$.

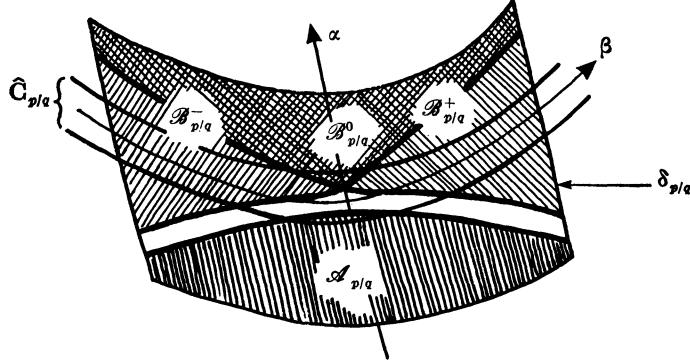


FIG. 4 $[\mathcal{B}_{p/q}^0 = \mathcal{B}_{p/q}^+ \cap \mathcal{B}_{p/q}^-]$.

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mu, a, t} : \mathbf{T}^1 \times [-L, L] \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie (voir l'appendice) par

$$\mathcal{L}(\theta, y) = y^2 - \frac{2\delta}{w} \chi(\theta),$$

où $\chi(\theta) = \chi(\mu, a, t, \theta) = \int_0^\theta \xi(\mu, a, t, u) du = \frac{1}{2\pi q} \sin(2\pi q\theta) + O(t^2)$.

Puisque ξ est $(1/q)$ -périodique, et qu'on a supposé $\int_0^{1/q} \xi(u) du = 0$, χ est $(1/q)$ -périodique en θ .

Considérons, pour $M^2 > \frac{2\delta}{w} (\sup \chi - \inf \chi) = O(t^{2+2k})$, les domaines (fig. 5)

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_+^M = \left\{ (\theta, y) \in \mathbf{T}^1 \times [0, M], \mathcal{L}(\theta, y) \geq -\frac{2\delta}{w} \inf \chi \right\}, \\ D_-^M = \left\{ (\theta, y) \in \mathbf{T}^1 \times [-M, 0], \mathcal{L}(\theta, y) \geq -\frac{2\delta}{w} \inf \chi \right\}. \end{array} \right.$$

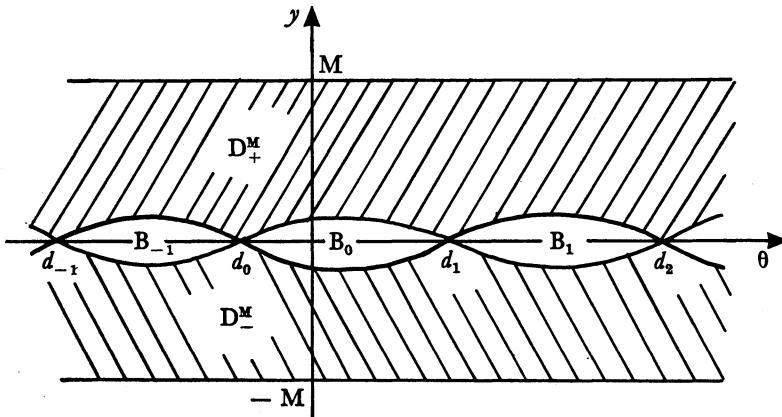


FIG. 5

Nous notons $d_i \simeq -\frac{1}{4q} + \frac{i}{q}$, $i \in \mathbf{Z}$, les points de $D_+^M \cap D_-^M$, et B_i les composantes connexes de $\mathbf{T}^1 \times [-L, L] - (D_+^L \cup D_-^L) = \left\{ (\theta, y) \in \mathbf{T}^1 \times [-L, L], \mathcal{L}(\theta, y) < -\frac{2\delta}{w} \inf \chi \right\}$.

Lemme 7. — (i) Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q}$, P_{μ, a, t^*}^{-1} (resp. P_{μ, a, t^*}) applique D_+^L dans D_+^{L+1} (resp. D_-^L dans D_-^{L+1}) et \mathcal{L} est une fonction de Liapunov (croissante sur les orbites) pour les restrictions $P_{\mu, a, t^*}^{-1}|_{D_+^L}$ et $P_{\mu, a, t^*}|_{D_-^L}$.

(ii) Si $(\mu, a) \in \mathcal{B}_{p/q}^0$, P_{μ, a, t^*} (resp. P_{μ, a, t^*}^{-1}) applique D_+^L (resp. D_-^L) dans lui-même et \mathcal{L} est une fonction de Liapunov (croissante sur les orbites) pour les restrictions $P_{\mu, a, t^*}|_{D_+^L}$ et $P_{\mu, a, t^*}^{-1}|_{D_-^L}$, où

$$M_{\pm} = \frac{1}{2\gamma} [-\beta \mp (\beta^2 - 4(\alpha - K_1 t^{q-2-2k}) \gamma)^{1/2}].$$

En particulier, les anneaux (voir fig. 7 la signification de k_{M_+} et k_{M_-})

$$A_+ = \{y \in \mathbf{T}^1 \times [0, L], \mathcal{L}(\theta, y) \geq k_{M_+}\},$$

$$A_- = \{y \in \mathbf{T}^1 \times [-L, 0], \mathcal{L}(\theta, y) \geq k_{M_-}\},$$

sont respectivement laissés invariants par P_{μ, a, t^*} et P_{μ, a, t^*}^{-1} .

(iii) Si $(\mu, a) \in \mathcal{B}_{p/q}^{\pm 1}$, $P_{\mu, a, t^*}^{\pm 1}$ applique dans lui-même A_{\pm} . Si de plus $\alpha \geq K_1 t^{q-2-2k}$, \mathcal{L} est une fonction de Liapunov croissante pour $P_{\mu, a, t^*}^{\pm 1}$ dans $D_{\pm}^{M\pm}$.

Corollaire. — (i) Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q}$, les orbites des points d'intersection d_i , $i \in \mathbf{Z}$, de D_+^L et D_-^L vont d'un bord à l'autre de l'anneau $\mathbf{T}^1 \times [-L, L]$; il n'y a donc pas d'ensemble invariant de P_{μ, a, t^*} qui « sépare » dans cet anneau (i.e. tel que les bords de l'anneau appartiennent à des composantes connexes distinctes du complémentaire).

(ii) Si $(\mu, a) \in \mathcal{B}_{p/q}^0$, les orbites des points d_i vont de A_- à A_+ ; il n'y a donc pas d'ensemble invariant de P_{μ, a, t^*} qui « sépare » le complémentaire dans $\mathbf{T}^1 \times [-L, L]$ de $A_- \cup A_+$.

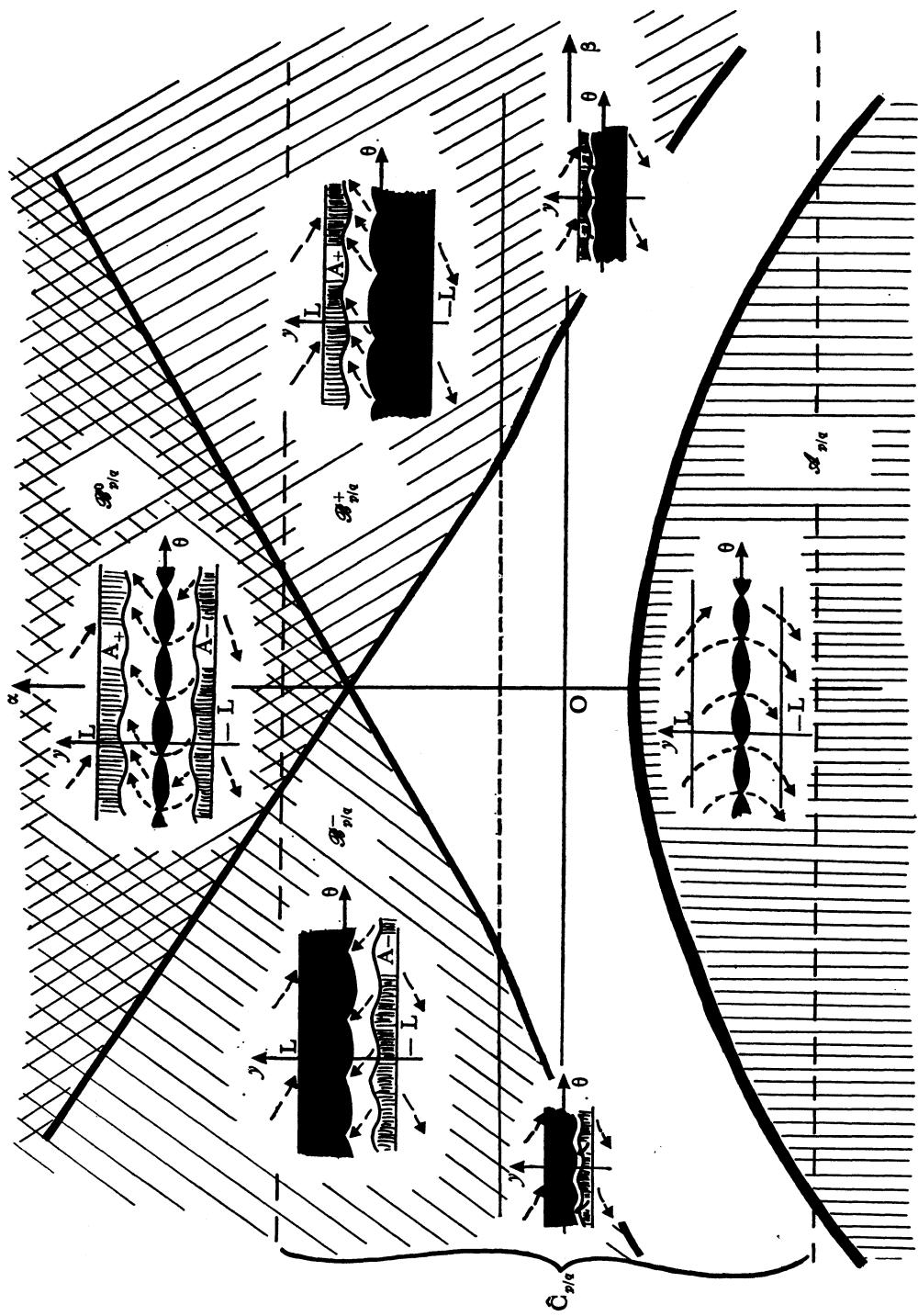


FIG. 6

La figure 6 résume le lemme 7 et son corollaire : on a représenté dans chaque fenêtre les renseignements qu'on a sur la dynamique pour les valeurs correspondantes des paramètres.

Les flèches indiquent la dynamique de $R_{p/q}^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}$ (ou celle de P_{μ, a, t^*}^q). Les ordres de grandeur ne sont pas respectés (cf. fig. 7).

Démonstration. — Nous noterons

$$\begin{aligned} P_{\mu, a, t^*}(\theta, y) &= (\theta + (p/q) + wy, y + \Pi(\theta, y)), \\ \Pi(\theta, y) &= \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta) + \gamma A(\theta, y) + B(\theta, y) \\ &= \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta) + O(t^{q-2-2k}) = O(t^{(q/2)+1-k}). \end{aligned}$$

(i) *Supposons tout d'abord $y \leq 0$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_{\mu, a, t^*}(\theta, y)) - \mathcal{L}(\theta, y) &= 2y\Pi(\theta, y) + \Pi(\theta, y)^2 - \frac{2\delta}{w}[\chi(\theta + wy) - \chi(\theta)] \\ &= 2y\Pi(\theta, y) + \Pi(\theta, y)^2 - 2\delta \xi(\theta) y + y^2 O(\delta w) \\ &= 2y[\Pi(\theta, y) - \delta \xi(\theta) + yO(t^q)] + \Pi(\theta, y)^2. \end{aligned}$$

Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q}$, on a pour tout y

$$\alpha + K_1 t^{q-2-2k} + \beta y + \gamma y^2 \leq 0;$$

en particulier, si t est assez petit et K_1 assez grande,

$$\Pi(\theta, y) - \delta \xi(\theta) + yO(t^q) \leq - (K_1/2) t^{q-2-2k},$$

donc $\mathcal{L}(P_{\mu, a, t^*}(\theta, y)) - \mathcal{L}(\theta, y) \geq K_1 |y| t^{q-2-2k} + \Pi(\theta, y)^2$.

Si $(\theta, y) \in D_-^L$, y ne peut s'annuler qu'en l'un des points d_i (fig. 5) ; mais alors $\chi(\theta) = \inf \chi(\theta)$, donc $\xi(\theta) = \chi'(\theta) = 0$, et

$$\Pi(\theta, 0)^2 = [\alpha + \delta \xi(\theta) + B(\theta, 0)]^2 = [\alpha + O(t^q)]^2 \geq (K_1^2/2) t^{2q-4-4k} > 0.$$

On en déduit que, dans D_-^L , limité par une courbe de niveau de \mathcal{L} et évidemment envoyé dans D_-^{L+1} , P_{μ, a, t^*} admet \mathcal{L} comme fonction de Liapunov croissante.

Supposons maintenant $y \geq 0$:

On vérifie immédiatement par identification (ou comme conséquence de la dernière partie du lemme 6) que

$$P_{\mu, a, t^*}^{-1}(\theta, y) = (\theta - (p/q) - wy + O(t^{q-2k}), y - \Pi(\theta, y) + O(t^{q-2-2k})).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_{\mu, a, t^*}^{-1}(\theta, y)) - \mathcal{L}(\theta, y) &= - 2y[\Pi(\theta, y) + O(t^{q-2-2k})] \\ &\quad + [\Pi(\theta, y) + O(t^{q-2-2k})]^2 - \frac{2\delta}{w}[\chi(\theta - wy + O(t^{q-2k})) - \chi(\theta)] \\ &= - 2y[\Pi(\theta, y) - \delta \xi(\theta) + O(t^{q-2-2k}) + \gamma O(t^q) + O(t^{(q/2)+1-k})] + O(t^{q+2}) \xi(\theta) \\ &\quad + [\Pi(\theta, y) + O(t^{q-2-2k})]^2 + O(t^{2q+2-2k}), \end{aligned}$$

et donc, si t est assez petit et K_1 assez grande,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_{\mu, a, t^*}^{-1}(\theta, y)) - \mathcal{L}(\theta, y) &\geq \{K_1 t^{a-2-2k} y + O(t^{a+2}) \xi(\theta)\} \\ &\quad + \{[\Pi(\theta, y) + O(t^{a-2-2k})]^2 + O(t^{2a+2-2k})\}. \end{aligned}$$

Mais, dans D_+^L ,

$$y \geq \left(\frac{2\delta}{w} (\chi(\theta) - \inf \chi(\theta)) \right)^{1/2} \geq t^{k+2} |\xi(\theta)|,$$

$$\text{donc } K_1 t^{a-2-2k} y + O(t^{a+2}) \xi(\theta) \geq (K_1/2) t^{a-k} |\xi(\theta)|.$$

Alors,

$$\text{ou bien } (K_1/2) t^{a-k} |\xi(\theta)| \geq (K_1/2) t^{2a+1-2k} \geq O(t^{2a+2-2k}),$$

$$\text{ou bien } |\xi(\theta)| < t^{a+1-k}, \text{ donc } |\delta \xi(\theta)| \leq O(t^{(3a/2)+2}),$$

$$\text{et } \Pi(\theta, y) + O(t^{a-2-2k}) = \Pi(\theta, y) - \delta \xi(\theta) + O(t^{a-2-2k}) \leq - (K_1/2) t^{a-2-2k},$$

$$\text{c'est-à-dire } [\Pi(\theta, y) + O(t^{a-2-2k})]^2 \geq (K_1^2/4) t^{2a-4-4k} \geq O(t^{2a+2-2k}).$$

Dans les deux cas, $\mathcal{L}(P_{\mu, a, t^*}^{-1}(\theta, y)) - \mathcal{L}(\theta, y) > 0$, ce qui termine la démonstration de (i).

(ii) Dans l'intervalle $M_- \leq y \leq M_+$, on a

$$\alpha - K_1 t^{a-2-2k} + \beta y + \gamma y^2 \geq 0.$$

Retenant les calculs de (i), on voit que ceci entraîne

$$\mathcal{L}(P_{\mu, a, t^*}^{-1}(\theta, y)) - \mathcal{L}(\theta, y) > 0 \text{ si } (\theta, y) \in D_+^M,$$

$$\mathcal{L}(P_{\mu, a, t^*}^{-1}(\theta, y)) - \mathcal{L}(\theta, y) > 0 \text{ si } (\theta, y) \in D_-^M.$$

La condition $M_{\pm}^2 > \frac{2\delta}{w} (\sup \chi - \inf \chi)$ (voir la définition de D^M avant le lemme 7)

est (largement) assurée si $M_{\pm}^2 \geq c^2 t^{2+2k} = \frac{4\delta}{w\pi q} (1 + O(t^2))$, c'est-à-dire

$$\beta + (\beta^2 - 4(\alpha - K_1 t^{a-2-2k}) \gamma)^{1/2} \geq 2 |\gamma| ct^{1+k} \text{ pour } M_+,$$

$$\beta - (\beta^2 - 4(\alpha - K_1 t^{a-2-2k}) \gamma)^{1/2} \leq -2 |\gamma| ct^{1+k} \text{ pour } M_-,$$

$$\text{c'est-à-dire } (\beta^2 - 4(\alpha - K_1 t^{a-2-2k}) \gamma)^{1/2} \geq |\beta| + 2 |\gamma| ct^{1+k},$$

d'où l'on déduit la définition de $\mathcal{B}_{p/q}^0$.

L'assertion sur l'invariance des anneaux A_+ et A_- est une conséquence directe de ce qui précède (fig. 7), ainsi que le corollaire.

(iii) La seule différence avec (ii) est que, si $\alpha < K_1 t^{a-2-2k}$, M_+ et M_- sont de même signe; il faut alors s'assurer que l'anneau $M_- \leq y \leq M_+$ est assez large pour contenir une courbe de niveau de \mathcal{L} . Il suffit pour cela que

$$|M_+^2 - M_-^2| \geq c^2 t^{2+2k},$$

$$\text{c'est-à-dire } |\beta| (\beta^2 - 4(\alpha - K_1 t^{a-2-2k}) \gamma)^{1/2} \geq \gamma^2 c^2 t^{2+2k},$$

d'où l'on déduit la définition de $\mathcal{B}_{p/q}^+$ et $\mathcal{B}_{p/q}^-$.

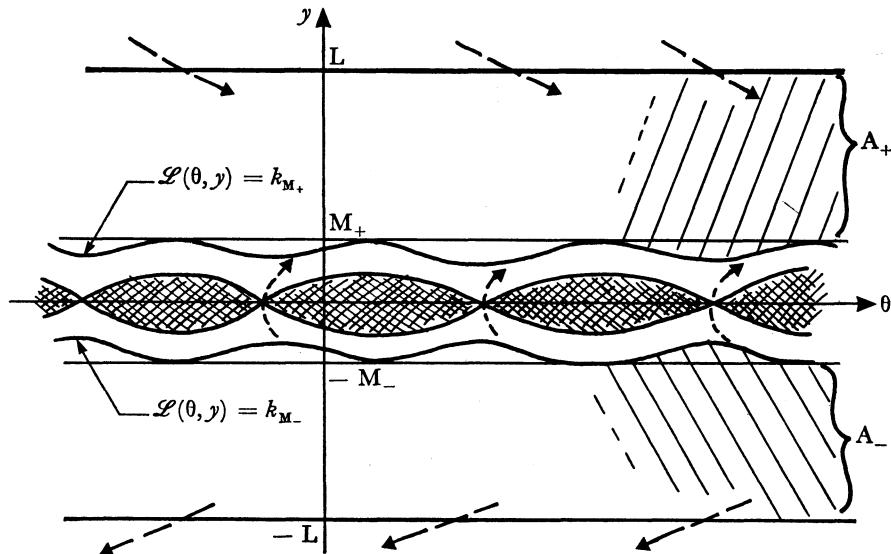
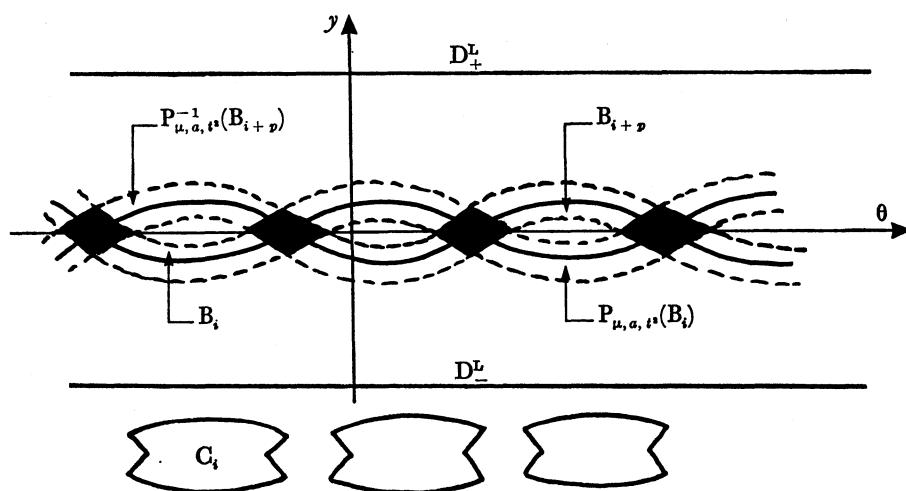


FIG. 7

Remarques. — 1) Si (μ, a) appartient à $\mathcal{A}_{p/q}$, la dynamique de P_{μ, a, t^*} est parfaitement contrôlée en dehors d'une réunion d'îles C_i réellement disconnectées les unes des autres (fig. 8). [Il en est bien sûr de même lorsque (μ, a) appartient à $\mathcal{B}_{p/q}^0$, à l'extérieur de $A_+ \cup A_-$].

Ces îles ont le nombre de rotation p/q dans le sens suivant : si un point $(\theta, y) \in B_i$ a toutes ses images (resp. images réciproques) dans $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_j$, on a $\forall k \geq 0$, $P_{\mu, a, t^*}^k(\theta, y) \in B_{i+kp}$ (resp. $P_{\mu, a, t^*}^{-k}(\theta, y) \in B_{i-kp}$).

FIG. 8 $((\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q})$

2) Le lecteur pourra, à l'instar du *referee*, s'étonner de la conservation des termes $K_1 t^{a-2-2k}$ dans la définition de $\mathcal{B}_{p/q}^0$ et $\mathcal{B}_{p/q}^\pm$: dans $\mathcal{B}_{p/q}^0$, par exemple, ce terme peut évidemment être négligé devant $|\gamma| c^2 t^{2+2k} = O(t^{(a/2)-3+k})$. On ne les a conservés que parce que l'articulation des deux parties du bord de $\mathcal{B}_{p/q}^\pm$ se fait alors naturellement suivant la droite $\alpha = K_1 t^{a-2-2k}$ qui intervient dans l'énoncé du (iii) du lemme 7. Ce bord s'étudie d'ailleurs plus commodément dans les coordonnées

$$\tilde{\alpha} = \frac{\beta^2 - 4(\alpha - K_1 t^{a-2-2k})\gamma}{4\gamma^2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{2|\gamma|},$$

analogues à celles suggérées par le *referee*; la définition de $\mathcal{B}_{p/q}^\pm$ devient en effet

$$\tilde{\alpha} \geq (\tilde{\beta} \mp ct^{1+k})^2 \quad \text{si } \alpha \geq K_1 t^{a-2-2k},$$

$$\tilde{\alpha} \geq \frac{c^4 t^{4+4k}}{16\tilde{\beta}^2} \quad \text{si } \alpha \leq K_1 t^{a-2-2k}.$$

3.2. Dans les îles de nombre de rotation p/q

Rappelons que, par définition ([5] § 2-3), P_{μ, a, t^2} « ressemble » à la forme normale N_{μ', a', t^2} si les deux difféomorphismes locaux ont, dans un voisinage uniforme (indépendant des paramètres) de l'origine, le même nombre de courbes fermées invariantes et la même décomposition en bassins.

Lemme 8. — (i) Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} - \hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$, P_{μ, a, t^2} « ressemble » à une forme normale sans courbe invariante.

Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} \cap \partial\hat{C}_{p/q}$, P_{μ, a, t^2} « ressemble » à une forme normale sans courbe invariante, à l'exception près d'une unique orbite périodique de nombre de rotation p/q .

(ii) Si $(\mu, a) \in \mathcal{B}_{p/q}^0 - \hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$, P_{μ, a, t^2} « ressemble » à une forme normale avec deux courbes fermées invariantes, au remplacement près des deux courbes par les anneaux A_+ et A_- (respectivement positivement et négativement invariants).

Si $(\mu, a) \in \mathcal{B}_{p/q}^0 \cap \partial\hat{C}_{p/q}$, la conclusion est la même à l'exception près, entre A_+ et A_- , d'une unique orbite périodique de nombre de rotation p/q .

Démonstration. — Il suffit de trouver une fonction de Liapunov pour $R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^2}^q$ dans chacune des régions B_i définies sur la figure 5 : on sera en effet assuré de ce que les orbites de $R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^2}^q$ (et donc celles de P_{μ, a, t^2}) traversent ces régions sans y revenir à l'exception près, si $(\mu, a) \in \partial\hat{C}_{p/q}$, des points fixes (qui correspondent exactement aux orbites périodiques de P_{μ, a, t^2} de nombre de rotation p/q).

Cela vient de ce que la Remarque 1) du paragraphe 3.1 exclut toute possibilité de passage de B_i à B_j pour $j \neq i$ lorsqu'on applique $R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^2}^q$; si par exemple $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q}$, on a (fig. 8) :

$$\forall k \geq 0, \quad (R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^2}^q)^k(B_i) \subset B_i \cup D_-^L,$$

$$(R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^2}^q)^{-k}(B_i) \subset B_i \cup D_+^L.$$

Notons comme précédemment

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a, t^2}(\theta, y) = (\theta_1, y_1), \\ \theta_1 = \theta + (p/q) + wy = \theta + (p/q) + O(t^{(a/2)-1-k}), \\ y_1 = y + \Pi(\theta, y) = y + \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta) + O(t^{a-2-2k}) \\ \qquad \qquad \qquad = y + O(t^{(a/2)+1-k}); \end{array} \right.$$

on a

$$\begin{cases} P_{\mu, a, t}^i(\theta, y) = (\theta_i, y_i), \\ \theta_i = \theta + i(p/q) + w [iy + (i-1) \Pi(\theta, y) + (i-2) \Pi(\theta_1, y_1) \\ \quad + \dots + \Pi(\theta_{i-2}, y_{i-2})], \\ y_i = y + \Pi(\theta, y) + \Pi(\theta_1, y_1) + \dots + \Pi(\theta_{i-1}, y_{i-1}). \end{cases}$$

De plus, q étant fixé, on voit immédiatement par récurrence que

$$\Pi(\theta_i, y_i) = \Pi(\theta, y) + O(t^{a-2-2k}),$$

donc

$$(66) \quad \mathbf{R}_p^{-1} \circ \mathbf{P}_{\mu, a, t^q}^q(\theta, y) = \left(\theta + qw \left[y + \frac{q-1}{2} \Pi(\theta, y) + \mathbf{O}(t^{q-2-2k}) \right], \right. \\ \left. y + q\Pi(\theta, y) + \mathbf{O}(t^{q-2-2k}) \right).$$

Une dernière estimation évidente montre que le changement de variables défini par

$$(67) \quad x = y + \frac{q-1}{2} \Pi(\theta, y) + O(t^{a-2-2k}) = y + O(t^{(a/2)+1-k})$$

conduit à la formule

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^2}^q(\theta, x) = (\theta + qwx, x + q\Pi(\theta, x) + O(t^{q-2-2k})) \\ \qquad \qquad \qquad = (\theta + qwx, x + q[\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta \xi(\theta) + C(\theta, x)]), \\ \text{où } C(\theta, x) = C(\mu, a, t, \theta, x) = O(t^{q-2-2k}). \end{array} \right.$$

Remarquons maintenant que $\hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$ est défini par

$$\inf_{\theta \in T^1} [\delta\xi(\mu, a, t, \theta) + C(\mu, a, t, \theta, 0)] \leq \alpha \\ \leq \sup_{\theta \in T^1} [\delta\xi(\mu, a, t, \theta) + C(\mu, a, t, \theta, 0)];$$

on en déduit que

$$\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0) < 0 \quad \text{dans } \mathcal{A}_{p/q} - (\hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}),$$

$$\text{et } \alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0) > 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_{p/q}^0 - (\hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}).$$

Plus précisément, conservant les notations de la figure 5, appelons

$$\theta_i = \theta_i(\mu, a, t) \in [d_i, d_{i+1}],$$

le point où la restriction de $\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0)$ à l'intervalle $[d_i, d_{i+1}]$ atteint son maximum si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q}$, son minimum si $(\mu, a) \in \mathcal{B}_{p/q}^0$ (fig. 9); si $(\mu, a) \in \partial\mathcal{C}_{p/q}$, θ_i est l'intersection avec B_i de l'unique orbite périodique de nombre de rotation p/q de $P_{\mu, a, t}$. Il existe $K_3 > 0$ possédant les propriétés suivantes :

(i) Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} - \text{int}(\mathcal{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q})$, il existe $a_0 = a_0(\mu, a, t) \geq 0$, ne s'annulant que si $(\mu, a) \in \partial\mathcal{C}_{p/q}$, tel que

$$(69) \quad \forall i \in \mathbf{Z}, \quad \forall \theta \in [d_i, d_{i+1}],$$

$$\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0) \leq -a_0 - K_3 |\delta|(\theta - \theta_i)^2;$$

(ii) Si $(\mu, a) \in \mathcal{B}_{p/q}^0 - \text{int}(\mathcal{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q})$, il existe $a_0 = a_0(\mu, a, t) \geq 0$, ne s'annulant que si $(\mu, a) \in \partial\mathcal{C}_{p/q}$, tel que

$$(70) \quad \forall i \in \mathbf{Z}, \quad \forall \theta \in [d_i, d_{i+1}],$$

$$\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0) \geq a_0 + K_3 |\delta|(\theta - \theta_i)^2.$$

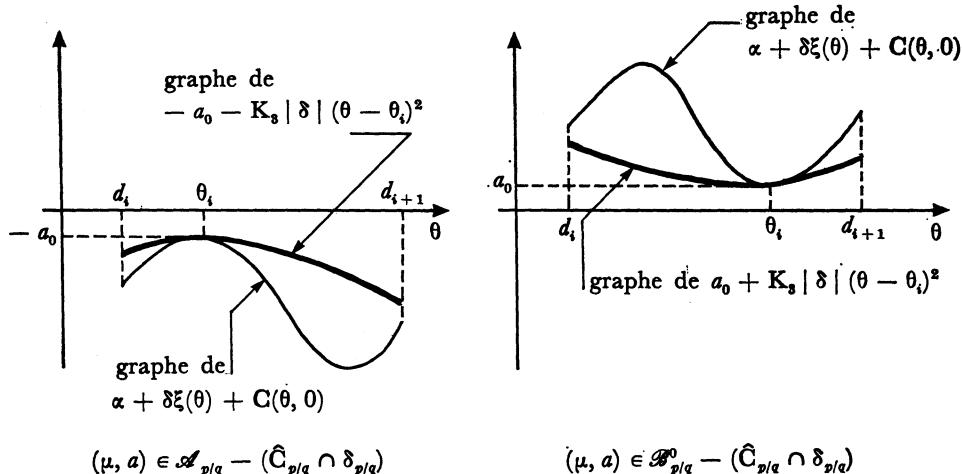


FIG. 9

Considérons alors la fonction $L_i : \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$(71) \quad L_i(\theta, x) = x - \frac{\beta + \beta_1(\theta_i)}{w} (\theta - \theta_i),$$

où on a noté $\beta_1(\theta) = \frac{\partial C}{\partial x}(\theta, 0)$, et calculons (à l'aide de (68))

$$\begin{aligned} L_i(R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}^q(\theta, x)) - L_i(\theta, x) &= x + q[\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0)] \\ &\quad + q(\beta + \beta_1(\theta)) x + q(\gamma + \gamma_1(\theta, x)) x^2 \\ &\quad - \frac{\beta + \beta_1(\theta_i)}{w} (\theta + qwx - \theta_i) - x + \frac{\beta + \beta_1(\theta_i)}{w} (\theta - \theta_i), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} [L_i(R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}^q(\theta, x)) - L_i(\theta, x)] \\ = [\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0)] + [\gamma + \gamma_1(\theta, x)] x^2 + [\beta_1(\theta) - \beta_1(\theta_i)] x. \end{aligned}$$

Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} - \text{int}(\widehat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q})$, et si $(\theta, x) \in B_i$ (donc $\theta \in]d_i, d_{i+1}[$), cette expression est majorée par

$$-a_0 - Q(\theta - \theta_i, x) + K_4 t^{q-2-2k} |(\theta - \theta_i) x|,$$

où la forme quadratique

$$(72) \quad Q(\theta - \theta_i, x) = K_3 |\delta| (\theta - \theta_i)^2 - \frac{\gamma}{2} x^2$$

est définie positive et a pour coefficients

$$K_3 \delta = 2K_3 |c_1| t^{(q/2)+1+k}, \quad -\frac{\gamma}{2} = t^{(q/2)+1-k} + O(t^{(q/2)+3-k}).$$

En particulier, $K_4 t^{q-2-2k} |(\theta - \theta_i) x|$ est, sur tout le domaine B_i , une petite perturbation quadratique de Q , et ne détruit pas sa positivité. On en déduit que, si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} - \text{int}(\widehat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q})$, et si $(\theta, x) \in B_i$,

$$L_i(R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}^q(\theta, x)) - L_i(\theta, x) \leq -a_0 - \frac{1}{2} Q(\theta - \theta_i, x) \leq -a_0 \leq 0,$$

l'annulation n'ayant lieu que si $a_0 = 0$ (i.e. $(\mu, a) \in \partial \widehat{C}_{p/q}$), et $\theta = \theta_i$, $x = 0$ (i.e. au point fixe de $R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}^q$ dans B_i).

Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q}^0 - \text{int}(\widehat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q})$, la démonstration précédente ne marche plus car, K_3 devenant $-K_3$, Q est remplacée par une forme quadratique indéfinie. La mise sous forme normale d'une singularité de champ de vecteurs du type « Bogdanov » (voir la remarque qui suit la démonstration) suggère cependant, si $(\theta, x) \in B_i$, le changement de variables

$$(\theta, x) \mapsto \left(\theta, z = x \left(1 - \frac{2\gamma(\theta - \theta_i)}{w} \right) \right),$$

qui a la vertu de remplacer essentiellement γ par $-\gamma$.

On est ainsi conduit aux fonctions

$$(73) \quad \tilde{L}_i(\theta, x) = \left(1 - \frac{2\gamma(\theta - \theta_i)}{w}\right)x - \frac{\beta + \beta_1(\theta_i)}{w} \left((\theta - \theta_i) - \frac{\gamma}{w}(\theta - \theta_i)^2\right),$$

qui vérifient

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i(R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}^q(\theta, x)) - \tilde{L}_i(\theta, x) \\ = q \left(1 - \frac{2\gamma(\theta - \theta_i + qwx)}{w}\right) [\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0) \\ + (\beta + \beta_1(\theta))x + (\gamma + \gamma_1(\theta, x))x^2] \\ - 2\gamma qx^2 - \frac{\beta + \beta_1(\theta_i)}{w} \left[\left(1 - \frac{2\gamma}{w}(\theta - \theta_i)\right)qwx - \frac{\gamma}{w}q^2w^2x^2\right] \\ = q(1 + O(t^2))(\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0)) - q\gamma(1 + O(t^2))x^2 \\ + q \left(1 - \frac{2\gamma(\theta - \theta_i)}{w}\right)(\beta_1(\theta) - \beta_1(\theta_i))x \\ - 2(\beta + \beta_1(\theta))\gamma q^2x^2 + (\beta + \beta_1(\theta_i))\gamma q^2x^2. \end{aligned}$$

On a donc comme précédemment, si $(\theta, x) \in B_i$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} [\tilde{L}_i(R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}^q(\theta, x)) - \tilde{L}_i(\theta, x)] \\ \geq \frac{2}{3}(a_0 + K_3 |\delta|(\theta - \theta_i)^2) \\ - \frac{\gamma}{2}x^2 - K_4 t^{q-2-2k} |(\theta - \theta_i)x| - K_5 t^{q+2-2k}x^2 \\ \geq \frac{2a_0}{3} + \frac{1}{2}Q(\theta - \theta_i, x) \geq \frac{2a_0}{3} \geq 0, \end{aligned}$$

l'annulation n'ayant lieu que si $(\mu, a) \in \partial\hat{C}_{p/q}$, $\theta = \theta_i$, $x = 0$. Ceci termine la démonstration du lemme 8.

Remarques. — (i) Il existe une unique valeur de (μ, a) appartenant à $\mathcal{A}_{p/q} \cap \partial\hat{C}_{p/q}$ (resp. $\mathcal{B}_{p/q}^0 \cap \partial\hat{C}_{p/q}$) telle que l'unique orbite périodique de P_{μ, a, t^*} de nombre de rotation p/q soit de type « Bogdanov », c'est-à-dire qu'en chaque point $(\theta_0, 0)$ de l'orbite, la dérivée $D(R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}^q)(\theta_0, 0)$ soit un bloc de Jordan. En effet, cette dérivée s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & qw \\ 0 & 1 + q(\beta + \beta_1(\theta_0)) \end{pmatrix},$$

le 0 en bas à gauche venant de ce que $\frac{\partial}{\partial\theta}(\alpha + \delta\xi(\theta) + C(\theta, 0))$ s'annule pour $\theta = \theta_0$.

Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha + \delta \xi(\theta_0) + C(\theta_0, 0) \text{ (ou } \alpha + \delta \xi(\theta_0) = 0, \\ \beta + \beta_1(\theta_0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha + \delta \xi(\theta) + C(\theta, 0))|_{\theta=\theta_0} \text{ (ou } \delta \frac{\partial \xi}{\partial \theta}(\theta_0) = 0. \end{cases}$$

Ce système, qui ne distingue pas entre $\mathcal{A}_{p/q}$ et $\mathcal{B}_{p/q}^0$, s'écrit

$$\begin{cases} \alpha + \delta \cos(2\pi q \theta_0) + t^{(a/2)+s+k} \varphi_1(\alpha, \beta, t, \theta_0) = 0, \\ \beta + t^{a-2-2k} \varphi_2(\alpha, \beta, t, \theta_0) = 0, \\ \sin(2\pi q \theta_0) + t^s \varphi_3(\alpha, \beta, t, \theta_0) = 0. \end{cases}$$

À t fixé, le théorème des fonctions implicites fournit α et β comme fonctions de θ_0 ; la troisième équation détermine alors θ_0 modulo $1/q$ (le signe de $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\alpha + \delta \xi(\theta) + C(\theta, 0))|_{\theta=\theta_0}$ est déterminé par la composante de $\partial \hat{C}_{p/q}$ à laquelle appartient (μ, a)).

Il reste à vérifier que les valeurs ainsi obtenues de α et β correspondent à des couples (μ, a) appartenant bien à $\mathcal{A}_{p/q} \cap \partial \hat{C}_{p/q}$ ou $\mathcal{B}_{p/q}^0 \cap \partial \hat{C}_{p/q}$, ce qui est évident puisque $|\beta| \leq O(t^{a-2-2k})$ (utiliser (64) et la remarque (iii) à la fin du § 2.2).

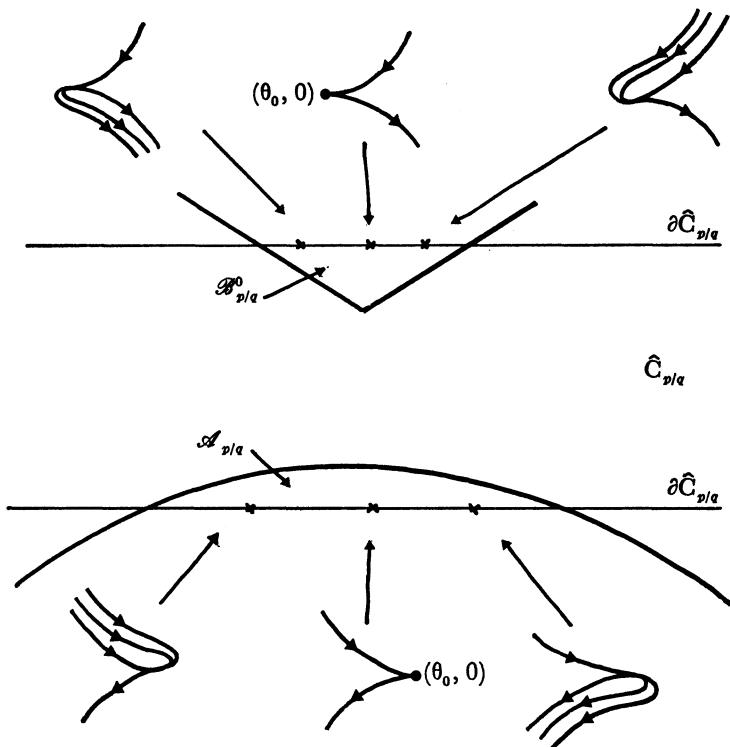


FIG. 10

Remarquons que, plus on s'approche de cette situation singulière, moins on a le choix des fonctions L_i, \tilde{L}_i : pour une telle valeur de (μ, a) , la pente $(1/w)(\beta + \beta_1(\theta_0)) = 0$ en $(\theta_0, 0)$ des courbes de niveau de L_i (ou \tilde{L}_i) est en effet complètement déterminée. Il existe en fait un « cusp » invariant par $R_p^{-1} \circ P_{\mu, a, t}^a$ (voir [8]) singulier en $(\theta_0, 0)$, auquel la courbe de niveau de L_i (\tilde{L}_i) passant par ce point est nécessairement tangente (fig. 10).

Pour les autres valeurs de $\mathcal{A}_{p/q} \cap \partial\hat{C}_{p/q}$ ($\mathcal{B}_{p/q}^0 \cap \partial\hat{C}_{p/q}$), les orbites correspondantes sont du type nœud-col (saddle-node).

(ii) Basée sur les modèles locaux

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = wy \\ \frac{dy}{dt} = \hat{\alpha} + \gamma y^2 \mp \delta \theta^2, \quad \gamma < 0, \delta > 0, \end{cases}$$

la figure 11 montre géométriquement la nécessité de choisir \tilde{L}_i différente de L_i . [Les pointillés représentent les courbes de niveau de L_i ou \tilde{L}_i , les traits gras l'ensemble des points où le champ de vecteurs est horizontal. Le cas $\mathcal{B}_{p/q}^0$ est hyperbolique, le cas $\mathcal{A}_{p/q}$ elliptique].

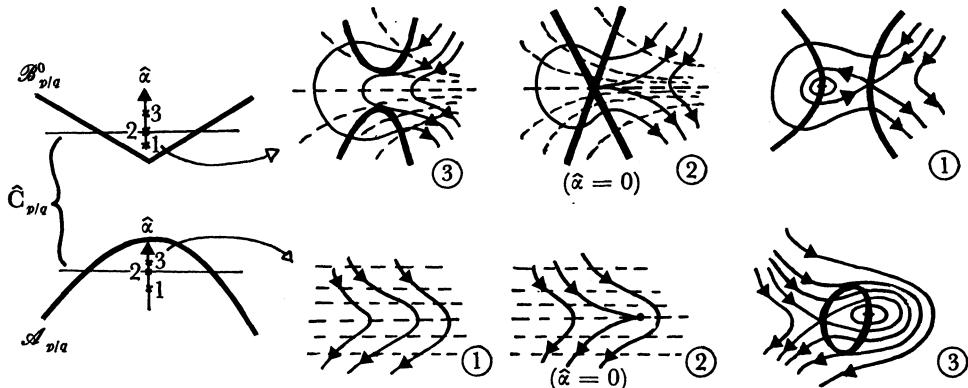


FIG. 11

(iii) Il serait naturel de chercher directement une fonction de Liapunov pour $P_{\mu, a, t}$ sur $\bigcup_j B_j$. Dans le cas où $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} - \text{int}(\hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q})$, on est tenté de poser, pour $(\theta, y) \in B_i$, $L(\theta, y) = y - (1/w)(\beta + \beta_1(\theta_i))(\theta - \theta_i)$, où θ_i est bien choisi. Malheureusement, on voudrait que $\theta_{i+1} = \theta_i + (1/q)$, et on se heurte à la non $(1/q)$ -périodicité de l'analogue pour $P_{\mu, a, t}$ de la fonction $\beta_1(\theta)$.

4. EXISTENCE DE BONS CHEMINS D'ÉLIMINATION RÉSONNANTE

Nous étudions dans ce paragraphe la dynamique de $P_{\mu,a,\epsilon}$ dans les anneaux A_+ et A_- introduits dans le lemme 7. Afin de garder aux estimations une forme suffisamment simple, nous restreindrons très légèrement les domaines $\mathcal{B}_{p/q}^+, \mathcal{B}_{p/q}^-, \mathcal{B}_{p/q}^0 = \mathcal{B}_{p/q}^+ \cap \mathcal{B}_{p/q}^-$ en les remplaçant respectivement par $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+, \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^-, \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0 = \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+ \cap \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^-$ définis ci-dessous (on remarquera que les ordres de grandeur ne sont pas modifiés : la taille de guêpe séparant $\mathcal{A}_{p/q}$ de $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$ reste remarquablement fine (de l'ordre de δt^2) par rapport à la largeur de $\tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$ (équivalente à 2δ) !

$$(74) \quad \mathcal{B}_{p/q}^{\pm} = \left\{ (\mu, a) \in \mathfrak{d}_{p/q}, \begin{array}{l} \alpha \geq 12\alpha_1 \mp \sqrt{\frac{12\alpha_1}{|\gamma|}} \cdot \beta, \\ \alpha \geq \frac{3}{4} \left(\frac{\beta^2}{4\gamma} \right), \\ \alpha \geq -\frac{3\beta^2}{4\gamma} \text{ si } \pm \beta \leq 0. \end{array} \right\}$$

$(\alpha_1 = (1/4) \mid \gamma \mid c^2 t^{2+2k} (1 + O(t^2)) = O(\delta t^2)$ est défini dans l'Appendice, formule A8; voir aussi (76)).

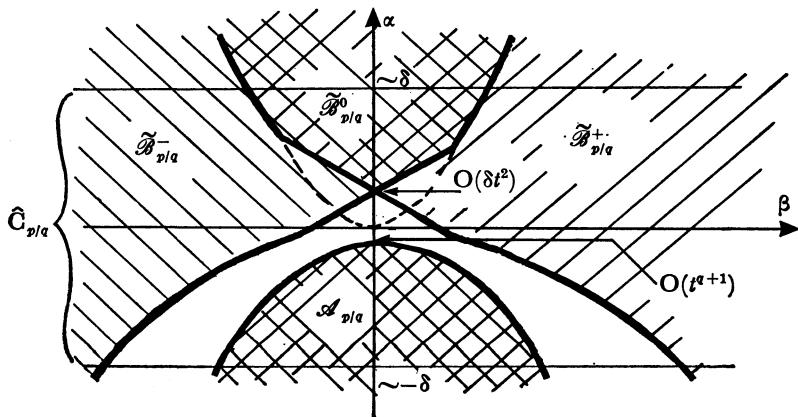


FIG. 12

Dans la suite du paragraphe nous utiliserons les notations suivantes suggérées par le *referee* :

$$(R) \quad \begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\gamma^2}, \\ \hat{\beta} = \frac{\beta}{2|\gamma|}, \\ \hat{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{|\gamma|}, \\ \hat{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{|\gamma|}. \end{cases}$$

Dans $\delta_{p/q}$, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont des $O(1)$ et l'équation approximative de $\hat{C}_{p/q}$ devient $|\hat{\alpha} - \hat{\beta}^2| \lesssim \hat{\delta}$, où $\hat{\delta} = \delta/|\gamma| = c_1 t^{2k} + O(t^{2+2k})$.

Les équations de $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm$ deviennent ainsi

$$(74 \text{ bis}) \quad \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm = \left\{ (\mu, a) \in \delta_{p/q}, \begin{array}{l} \hat{\alpha} \geq (\hat{\beta} \mp \sqrt{12\hat{\alpha}_1})^2, \\ \hat{\alpha} \geq \frac{1}{4}\hat{\beta}^2, \\ \hat{\alpha} \geq 4\hat{\beta}^2 \text{ si } \pm \hat{\beta} \leq 0. \end{array} \right\}.$$

Remarquons que les deux premières inégalités impliquent

$$(74 \text{ ter}) \quad \hat{\alpha} \geq \hat{\alpha}_1.$$

4.1. Existence des courbes invariantes

Nous utilisons à nouveau l'approximation de $R_{p/q}^{-1} \circ P_{\mu, a, t^*}$ par le temps 1 de l'équation différentielle E_{μ, a, t^*} , cette fois pour obtenir de suffisamment bonnes approximations des courbes fermées invariantes que nous cherchons dans A_+ ou A_- ; de telles approximations sont en effet données par les orbites périodiques $y = p_\pm(\theta)$ de E_{μ, a, t^*} étudiées dans l'Appendice.

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'aux courbes invariantes positives (*i.e.* situées dans A_+) et supposerons donc que $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+$. Le cas où $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^-$ et $(\theta, y) \in A_-$ est similaire.

Rappelons (Appendice, lemme A 3) que, puisque $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+ \subset \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^+$, $E_{\mu, a, t^*} = E(\alpha, \beta)$ possède dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ une unique orbite périodique (en fait $(1/q)$ -périodique) $y = p_+(\theta)$, attractive, et située dans l'anneau $\mathcal{A}_+(\alpha, \beta)$ bordé inférieurement (resp. supérieurement) par l'unique orbite périodique positive $y = q_+^\alpha(\theta)$ de $E^{\alpha, 0}(\alpha, \beta)$ (resp. l'unique orbite périodique positive $y = q_+^{\alpha''}(\theta)$ de $E^{\alpha'', 0}(\alpha, \beta)$, où

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} q''_+(\theta) = \left(-\frac{x}{\gamma} + \frac{\delta}{\pi q w} (\sin(2\pi q\theta) + O(t^2)) \right)^{1/2}, \\ \alpha' = |\gamma| \hat{\alpha}', \quad \alpha'' = |\gamma| \hat{\alpha}'', \\ \hat{\alpha}' = \begin{cases} -\hat{\alpha}_2 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2})^2 & \text{si } \hat{\beta} \leq 0, \\ \hat{\alpha}_1 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1})^2 & \text{si } \hat{\beta} \geq 0, \end{cases} \\ \hat{\alpha}'' = \begin{cases} \hat{\alpha}_1 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1})^2 & \text{si } \hat{\beta} \leq 0, \\ -\hat{\alpha}_2 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2})^2 & \text{si } \hat{\beta} \geq 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

(voir (A6), (A7) et (A10)), $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ étant tous deux de la forme

$$(76) \quad \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2 = \left| \frac{\delta}{\pi q w} \right| (1 + O(t^2)) = \frac{1}{4} c^2 t^{2+2k} (1 + O(t^2)) > 0$$

(voir (A8) et (A9)). On voit en particulier que l'orbite $y = p_+(\theta)$ vit dans l'anneau $\mathbf{T}^1 \times [y'_+, y''_+]$, où l'intervalle $[y'_+, y''_+]$, dont le lecteur vérifiera qu'il contient dans son intérieur la plus grande racine positive $y_+ = \hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}}$ du polynôme $\Pi(y) \equiv \alpha + \beta y + \gamma y^2 = \gamma[(y - \hat{\beta})^2 - \hat{\alpha}]$, est défini par

$$(77) \quad y'_+ = \sqrt{\hat{\alpha}' - \hat{\alpha}_1}, \quad y''_+ = \sqrt{\hat{\alpha}'' + \hat{\alpha}_2}.$$

Lemme 9. — Si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(78) \quad \begin{aligned} (i) \quad & y_+ \geq \sqrt{12\hat{\alpha}_1} = O(t^{k+1}); \\ (ii) \quad & \frac{1}{3} y_+ \leq \sqrt{\hat{\alpha}} \leq 2y_+; \\ (iii) \quad & y'_+ \geq \frac{3}{4} y_+; \\ (iv) \quad & y''_+ - y'_+ \leq \frac{3}{y_+} \left(\hat{\alpha}_1 + \frac{\hat{\alpha}_2}{2} \right) = O\left(\frac{t^{2k+2}}{y_+}\right) \leq O(t^{1+k}). \end{aligned}$$

Corollaire. — Si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+$, on a pour tout $\theta \in \mathbf{T}^1$ et tout entier $\ell \geq 1$,

$$(79) \quad |p_+^{(\ell)}(\theta)| \leq O\left(\frac{\delta}{wy_+}\right) = O\left(\frac{t^{2k+2}}{y_+}\right) \leq O(t^{k+1}).$$

Remarque. — Si dans la définition de $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+$ on remplace $\alpha_1 = O(\delta t^2)$ par un terme $O(\delta)$ (par ex. $12\alpha_1$ par $(1/2)\delta$), on obtient un domaine $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+ \subset \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+$ dans lequel on vérifie sans peine que $y_+ \geq O(t^k)$, et que $p_+(\theta)$ admet le développement

$$(80) \quad \begin{cases} p_+(\theta) = y_+ + z_+ \sin(2\pi q\theta) + O(y_+ t^4), \quad \text{où} \\ z_+ = \frac{\delta}{2\pi q w y_+} = O(y_+ t^2). \end{cases}$$

En faisant des estimations plus fines, nous avons gagné un ordre de grandeur et obtenu une région $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm$ dont la taille est d'ordre optimal (comparer à ce qui se passe pour $E_{\mu, a, t}$, où l'analogue des régions $\mathcal{A}_{p/q}$ et $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$ se rejoignent en l'unique point $\alpha = \alpha_1$, $\beta = 0$ (fig. A3)).

Démonstration du lemme 9.

- (i) $\hat{\alpha} \geq (\hat{\beta} - \sqrt{12\hat{\alpha}_1})^2$, donc $y_+ = \hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}} \geq \sqrt{12\hat{\alpha}_1}$.
- (ii) $(\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}})/3 \leq \sqrt{\hat{\alpha}}$ est évident si $\hat{\beta} \leq 0$ et équivaut à $\hat{\alpha} \geq \hat{\beta}^2/4$ si $\hat{\beta} \geq 0$. $\sqrt{\hat{\alpha}} \leq 2(\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}})$ est évident si $\hat{\beta} \geq 0$ et équivaut à $\hat{\alpha} \geq 4\hat{\beta}^2$ si $\hat{\beta} \leq 0$.
- (iii) Si $\hat{\beta} \leq 0$, on calcule

$$\begin{aligned} 0 \leq y_+^2 - y_+'^2 &= (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}})^2 - (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2})^2 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \\ &= \hat{\alpha}_1 + 2\hat{\beta}[\sqrt{\hat{\alpha}} - \sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2}] \\ &= \hat{\alpha}_1 + \frac{2|\hat{\beta}|\hat{\alpha}_2}{\sqrt{\hat{\alpha}} + \sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2}} \leq \hat{\alpha}_1 + \frac{|\hat{\beta}|\hat{\alpha}_2}{\sqrt{\hat{\alpha}}} \leq \hat{\alpha}_1 + \frac{\hat{\alpha}_2}{2} \end{aligned}$$

d'après la dernière inégalité de (74 bis). On en déduit que, si $\hat{\beta} \leq 0$,

$$0 \leq y_+ - y_+^* \leq \frac{2\hat{\alpha}_1}{y_+ + y_+^*} \leq \frac{2\hat{\alpha}_1}{y_+}.$$

Si $\hat{\beta} \geq 0$, on calcule

$$\begin{aligned} 0 \leq y_+ - y_+^* &= \hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}} - (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1}) \\ &= \frac{\hat{\alpha}_1}{\sqrt{\hat{\alpha}} + \sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1}} \leq \frac{\hat{\alpha}_1}{\sqrt{\hat{\alpha}}} \leq \frac{3\hat{\alpha}_1}{y_+} \end{aligned}$$

d'après (ii).

Dans les deux cas, $0 \leq y_+ - y_+^* \leq y_+^*/4$ dès que $3\hat{\alpha}_1/y_+ \leq y_+^*/4$, c'est-à-dire $y_+ \geq \sqrt{12\hat{\alpha}_1}$ qui est vérifié d'après (i); on a donc démontré (iii).

(iv) Les mêmes calculs qu'en (iii) montrent que si $\hat{\beta} \leq 0$,

$$0 \leq y_+'^2 - y_+^2 = \hat{\alpha}_2 + \frac{2|\hat{\beta}|\hat{\alpha}_1}{\sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1} + \sqrt{\hat{\alpha}}} \leq \hat{\alpha}_2 + \frac{2|\hat{\beta}|\hat{\alpha}_1}{\sqrt{\hat{\alpha}}} \leq \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2,$$

donc $0 \leq y_+'' - y_+ \leq \frac{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2}{2y_+}$;

si $\hat{\beta} \geq 0$,

$$0 \leq y_+'' - y_+ = \frac{\hat{\alpha}_2}{\sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2} + \sqrt{\hat{\alpha}}} \leq \frac{\hat{\alpha}_2}{2\sqrt{\hat{\alpha}}} \leq \frac{3\hat{\alpha}_2}{2y_+}.$$

On obtient ainsi dans tous les cas

$$\begin{aligned} 0 \leq y_+'' - y_+^* &\leq \frac{3}{y_+} \left(\hat{\alpha}_1 + \frac{\hat{\alpha}_2}{2} \right) = O\left(\frac{t^{2+2k}}{y_+}\right) \\ &\leq O(t^{1+k}) \quad \text{d'après (i).} \end{aligned}$$

Démonstration du corollaire.

Ecrivant que $p_+(\theta)$ (qu'on notera p pour abréger) est solution de $E(\alpha, \beta)$, on obtient l'identité

$$(81) \quad wpp' = \alpha + \beta p + \gamma p^2 + \delta \xi \equiv \Pi(p) + \delta \xi,$$

et par récurrence

$$wpp^{(\ell)} = \Pi'(p) p^{(\ell-1)} + \delta \xi^{(\ell-1)} + wP_1(p', \dots, p^{(\ell-1)}) + \gamma P_2(p', \dots, p^{(\ell-2)}),$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes homogènes de degré 2 à coefficients entiers universels.

D'autre part,

$$\Pi(p) = (\beta + 2\gamma y_+)(p - y_+) + \gamma(p - y_+)^2 = 2\gamma\sqrt{\hat{\alpha}}(p - y_+) + \gamma(p - y_+)^2,$$

et donc $|\Pi(p)| \leq 2|\gamma|\sqrt{\hat{\alpha}}(y_'' - y_') + |\gamma|(y_'' - y_+)^2$

$$\leq 12\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right) + \frac{9}{|\gamma|y_+^2}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right)^2 = O(\alpha_1) = O(\delta t^2);$$

puisque $p \geq y'_+ \geq (3/4)y_+$, on en déduit

$$|p'| \leq O\left(\frac{\delta}{wy_+}\right).$$

Enfin,

$$\Pi'(p) = 2\gamma\sqrt{\hat{\alpha}} + 2\gamma(p - y_+),$$

donc $|\Pi'(p)| \leq 2|\gamma|\sqrt{\hat{\alpha}} + 2|\gamma|(y_'' - y_+)$

$$\leq 4|\gamma y_+| + \frac{6}{y_+}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right)$$

$$\leq 4|\gamma y_+| + \frac{12\alpha_1}{y_+} \leq 5|\gamma y_+|,$$

et par récurrence,

$$|p^{(\ell)}| \leq O\left(\frac{|\gamma y_+|}{wy_+} \frac{\delta}{wy_+}\right) + O\left(\frac{\delta}{wy_+}\right) + O\left(\frac{w}{wy_+} \left(\frac{\delta}{wy_+}\right)^2\right) \leq O\left(\frac{\delta}{wy_+}\right)$$

C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Si $y_+ \geq O(t^k)$, on trouve bien que les dérivées $p_+^{(\ell)}(\theta)$ sont $O(t^{k+2}) = O(y_+ t^2)$, en accord avec la remarque qui suit l'énoncé du corollaire.

2) Sur le cas $\beta = 0$, où $p_+(\theta)$ est connue explicitement, on voit immédiatement que la majoration obtenue est optimale; remarquons pour finir qu'une évaluation grossière majorant $|\Pi(p)|$ par $O(|\gamma|)$ aurait donné seulement $|p'_+| \leq (1/t^2) O(\delta/wy_+)$!

Lemme 10. — Si $(\mu, a) \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\nu/\alpha}^+$, P_{μ, a, t^2} possède (nécessairement dans A_+) une courbe fermée invariante attrayante régulière proche du graphe de $p_+(\theta)$, dont le bassin d'attraction contient le voisinage $|y - p_+(\theta)| \leq t^3 y_+$.

Démonstration.

Le changement de variables

$$(81) \quad y = p_+(\theta) + \sigma$$

transforme P_{μ, a, t^a} (définie par (63)) en une application de la forme

$$(82) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t^a}(\theta, \sigma) = (\theta, \mathfrak{S}), \\ \theta = \theta + (p/q) + wp_+(\theta) + w\sigma, \\ \mathfrak{S} = [1 + \Pi'(p_+(\theta)) - p'_+(\theta) w] \sigma + \gamma\sigma^2 + O(t^{a-2-2k}). \end{cases}$$

Le même changement de variables transforme E_{μ, a, t^a} en

$$(83) \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = wp_+(\theta) + w\sigma, \\ \frac{d\sigma}{dt} = [\Pi'(p_+(\theta)) - p'_+(\theta) w] \sigma + \gamma\sigma^2. \end{cases}$$

Posons

$$(84) \quad \begin{cases} \varpi = \left(\int_0^1 \frac{d\theta}{p_+(\theta)} \right)^{-1}, \\ u = \varpi \int_0^1 \frac{\Pi'(p_+(\theta)) - p'_+(\theta) w}{p_+(\theta)} d\theta = \beta + 2\gamma\varpi, \\ h(\theta) = \varpi \int_0^\theta \frac{d\theta}{p_+(\theta)}, \\ K(\theta) = \exp \left(\int_0^\theta \frac{u - \Pi'(p_+(\theta)) + p'_+(\theta) w}{wp_+(\theta)} d\theta \right). \end{cases}$$

Il est clair que, pour tout θ , $h(\theta + 1) = h(\theta) + 1$, et $h'(\theta) > 0$; h définit donc un difféomorphisme de \mathbf{T}^1 . Quant à K , c'est une fonction périodique strictement positive. Bien entendu, $h(\theta) - \theta$ et $K(\theta)$ sont $(1/q)$ -périodiques puisqu'il en est ainsi de $p_+(\theta)$.

Lemme 11. — *Les estimations suivantes sont vérifiées si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{R}}_{p/q}^+$:*

$$(85) \quad \begin{aligned} (i) \quad & y'_+ \leq \varpi \leq y''_+, \\ (ii) \quad & 0 \geq \frac{1}{6} \gamma y_+ \geq u \geq \frac{9}{2} \gamma y_+, \\ (iii) \quad & h' = O(1), \quad h^{(t)} = O(t^{2k+2}/y_+^2) \leq O(1) \quad \text{si } t \geq 2, \\ (iv) \quad & K^{(t)} = O(t^{2k+2}/y_+^2) \leq O(1) \quad \text{si } t \geq 1. \end{aligned}$$

Démonstration. — (i) découle de l'inégalité analogue pour $p_+(\theta)$ et implique

$$|\varpi - y_+| \leq \sup(y_+ - y'_+, y''_+ - y_+) \leq 3\hat{\alpha}_1/y_+ = O(t^{2k+2}/y_+)$$

d'après la démonstration des points (iii) et (iv) du lemme 9. On en déduit que

$$\begin{aligned} |u - 2\gamma\sqrt{\hat{\alpha}}| &= |u - (\beta + 2\gamma y_+)| = |2\gamma(\varpi - y_+)| \\ &\leq 6|\gamma|\hat{z}_1/y_+ \leq \frac{1}{2}|\gamma y_+| \quad \text{d'après (78 i);} \end{aligned}$$

(ii) découle alors de (78 ii). Quant à (iii) et (iv), ils se déduisent sans peine de (79) par récurrence.

Remarques. — 1) L'estimation de ϖ peut être améliorée par une évaluation des intégrales elliptiques

$$\int_0^1 \frac{d\theta}{q_+^{\alpha'}(\theta)} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{d\theta}{q_+^{\alpha''}(\theta)}$$

[où $q_+^{\alpha'}(\theta)$ et $q_+^{\alpha''}(\theta)$ sont définies en (75)]. On montre ainsi que

$$\begin{aligned} (86) \quad &\left(m \left[\frac{\alpha'}{|\gamma|} - \frac{\delta}{\pi q w} (1 + O(t^2)), \frac{\alpha'}{|\gamma|} + \frac{\delta}{\pi q w} (1 + O(t^2)) \right] \right)^{1/2} \leq \varpi \\ &\leq \left(m \left[\frac{\alpha''}{|\gamma|} - \frac{\delta}{\pi q w} (1 + O(t^2)), \frac{\alpha''}{|\gamma|} + \frac{\delta}{\pi q w} (1 + O(t^2)) \right] \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où $m[x, y]$ désigne la moyenne arithmético-géométrique de x et y . (Merci à Lannes de m'avoir indiqué comment faire ce calcul connu de Gauss.)

2) Si de plus $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^+$ (voir formule (80)), on a

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi = y_+ + O(y_+ t^4), \\ u = \beta + 2\gamma y_+ + O(|\gamma y_+| t^4), \\ h(\theta) = \theta + \frac{z_+}{2\pi q y_+} \cos(2\pi q \theta) + O(t^4) = \theta + O(t^2), \\ K(\theta) = 1 - \frac{2\gamma z_+}{w y_+} \sin(2\pi q \theta) - 2\pi q \frac{z_+}{y_+} \cos(2\pi q \theta) + O(t^4) = 1 + O(t^2). \end{array} \right.$$

Les estimations (85 iii) et (85 iv) montrent qu'en choisissant

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = h(\theta), \\ \rho = K(\theta) \sigma, \end{array} \right.$$

comme nouvelles variables, on transforme P_{μ, a, t^2} en

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a, t^2}(\varphi, \rho) = (\Phi, R), \\ \Phi = \varphi + (p/q) + w\varpi + \frac{w h'(\hat{h}^{-1}(\varphi))}{K(\hat{h}^{-1}(\varphi))} \rho + O(t^{a-2-2k}), \\ R = (1 + u) \rho + \left[w \frac{K'(\hat{h}^{-1}(\varphi))}{K(\hat{h}^{-1}(\varphi))^2} + \frac{\gamma}{K(\hat{h}^{-1}(\varphi))} \right] \rho^2 + O(t^{a-2-2k}). \end{array} \right.$$

Le même changement de variables transforme bien entendu E_{μ, a, t^*} en

$$(90) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = w\varpi + \frac{wh'(h^{-1}(\varphi))}{K(h^{-1}(\varphi))} \rho, \\ \frac{d\rho}{dt} = u\rho + \left[w \frac{K'(h^{-1}(\varphi))}{K(h^{-1}(\varphi))^2} + \frac{\gamma}{K(h^{-1}(\varphi))} \right] \rho^2. \end{cases}$$

Finalement, le changement d'échelle

$$(91) \quad \rho = t^3 y_+ x$$

conduit à

$$(92) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t^*}(\varphi, x) = (\Phi, X), \\ \Phi = \varphi + (p/q) + w\varpi + O(wt^3 y_+) x + O(t^{q-2-2k}), \\ X = (1+u) x + O(wt^3 y_+) x^2 + O(t^{q-2-2k}), \end{cases}$$

où les O sont dans la C' -topologie.

Puisque $|u| \geq (1/6) |\gamma y_+|$ et $|\gamma| = O(wt^2) = O(t^{(q/2)+1-k})$, on obtient

$$(93) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t^*}(\varphi, x) = (\Phi, X), \\ \Phi = \varphi + (p/q) + w\varpi + o(|u|), \\ R = (1+u) x + o(|u|), \end{cases}$$

et la méthode des transformées de graphes donne une courbe fermée de classe C'^{-1} invariante par P_{μ, a, t^*} , dont le bassin d'attraction contient un anneau $|\rho| \leq A t^3 y_+$, si t est assez petit. Revenant aux variables (θ, y) , on déduit de (85 iii et iv) qu'un tel anneau contient, dès que A est assez grand, l'anneau $|y - p_+(\theta)| \leq t^3 y_+$. Le lemme 10 est donc démontré.

4.2. Recollement des bassins lorsque $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$

Utilisant une dernière fois l'approximation de P_{μ, a, t^*} par l'équation $E_{\mu, a, t^*} = E(\alpha, \beta)$, nous montrons que, lorsque $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, le bassin d'attraction de la courbe invariante dont l'existence est affirmée par le lemme 10 contient l'anneau A_+ défini dans le lemme 7.

Nous prendrons modèle sur le comportement de l'équation $E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta)$: la fonction $K(\theta, y) = (2/w) H(\theta, y) e^{2(\gamma/w)\theta} = y^2 - q_+^{\alpha'}(\theta)^2$ (voir le lemme A2) est une fonction de Liapunov pour $E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta)$; on vérifie en effet que

$$\frac{d}{dt} \left(K(\theta(t), y(t)) = \frac{4\gamma}{w} y K(\theta, y) \right),$$

qui est du signe opposé à celui de $K(\theta, y)$ lorsque $y > 0$.

Par analogie, considérons la fonction $K \equiv K_{\alpha, \beta}$ définie par

$$(94) \quad K(\theta, y) = y^2 - p_+(\theta)^2,$$

où $p_+(\theta)$ est l'orbite périodique positive de $E(\alpha, \beta)$ utilisée dans le paragraphe précédent. Dans les variables (θ, σ) définies par (81), K s'écrit

$$(95) \quad K(\theta, \sigma) = 2p_+(\theta) \sigma + \sigma^2.$$

Un calcul immédiat montre que

$$(96) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} [K(P_{\mu, a, t^*}(\theta, \sigma)) - K(\theta, \sigma)] \\ = \gamma\sigma^3 + (\beta + 3\gamma p_+(\theta)) \sigma^2 + (\beta + 2\gamma p_+(\theta)) p_+(\theta) \sigma + O(t^{a-2-2k}), \end{cases}$$

alors que le long des courbes intégrales de $E(\alpha, \beta)$,

$$(97) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (K(\theta(t), \sigma(t))) = \gamma\sigma^3 + (\beta + 3\gamma p_+(\theta)) \sigma^2 + (\beta + 2\gamma p_+(\theta)) p_+(\theta) \sigma.$$

Les racines du deuxième membre de (97) sont évidemment

$$\sigma = 0, -p_+(\theta), \frac{1}{|\gamma|} (\beta + 2\gamma p_+(\theta)).$$

Ainsi, le signe de ce deuxième membre est $-$ si $\sigma > 0$, $+$ si σ est compris entre $-p_+(\theta)$ et 0 .

Car, si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, $(1/|\gamma|)(\beta + 2\gamma p_+(\theta)) \leq -p_+(\theta)$; en effet, ceci équivaut à $\beta + \gamma p_+(\theta) \leq 0$, or $\beta + \gamma p_+(\theta) \leq \beta + \gamma y'_+ \leq \beta + (3/4) \gamma y_+$, majoré par $(3/4) \gamma y_+$ si $\beta \leq 0$ et par $(1/12) \gamma y_+$ si $\beta \geq 0$; la dernière majoration vient de ce que, dans $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, on a $2\hat{\beta} \leq \sqrt{\hat{\alpha}}$, donc $3\hat{\beta} \leq \hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}} = y_+$, qui permet de remplacer (78 ii) par

$$(98) \quad \frac{2}{3} y_+ \leq \sqrt{\hat{\alpha}} \leq 2y_+$$

et implique la conclusion puisque $\beta + 2\gamma y_+ = 2\gamma \sqrt{\hat{\alpha}}$.

Quant à (96), le plus simple est encore de remarquer que, puisque

$$|\beta + 2\gamma p_+(\theta)| p_+(\theta) \geq |\beta + 2\gamma y'_+| y'_+ \geq \frac{5}{8} |\gamma| y_+^2 \geq O(t^{(a/2)+3+k}),$$

son second membre est compris entre A et B dès que $\sigma \leq -t^{(a/2)-6-3k}$, inférieur ou égal à A dès que $\sigma \geq t^{(a/2)-6-3k}$, où (h étant une constante positive assez grande)

$$A = \gamma\sigma^3 + (\beta + 3\gamma p_+(\theta)) \sigma^2 + (\beta + 2\gamma p_+(\theta)) p_+(\theta) (1 - ht) \sigma$$

$$\text{et} \quad B = \gamma\sigma^3 + (\beta + 3\gamma p_+(\theta)) \sigma^2 + (\beta + 2\gamma p_+(\theta)) p_+(\theta) (1 + ht) \sigma$$

ont pour racines 0 et $(1/2\gamma) [-(\beta + 3\gamma p_+(\theta)) \pm ((\beta + \gamma p_+(\theta))^2 + O(\gamma^2 p_+(\theta)^2 t))^{1/2}]$, c'est-à-dire, $0, -p_+(\theta) (1 + O(t))$, $(1/|\gamma|) (\beta + 2\gamma p_+(\theta)) (1 + O(t))$.

On en déduit que, si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, on a

$$(99) \quad \begin{cases} K(P_{\mu, a, t^*}(\theta, \sigma)) - K(\theta, \sigma) > 0 & \text{si } -p_+(\theta) (1 + O(t)) < \sigma < -t^{(a/2)-6-3k}, \\ K(P_{\mu, a, t^*}(\theta, \sigma)) - K(\theta, \sigma) < 0 & \text{si } \sigma > t^{(a/2)-6-3k}. \end{cases}$$

Etant donné que les courbes de niveau de K proches de $\sigma = 0$ oscillent très peu et que le bassin d'attraction fourni par le lemme 10 est de la forme $|\sigma| \leq t^3 y_+$, où $t^3 y_+ \geq O(t^{k+4}) \geq t^{(q/2)-6-3k}$, nous serons assurés que l'anneau A_+ tout entier se trouve dans le bassin d'attraction de la courbe invariante donnée par le lemme 10 (et ce, même si (μ, a) appartient seulement à $\tilde{\mathcal{B}}_{p/a}^+$) dès que nous saurons que son bord inférieur $y = f_+(\theta)$ est au-dessus d'une courbe de niveau $\sigma = -p_+(\theta) + \sqrt{p_+(\theta)^2 + k_0}$ de K , elle-même au-dessus de $\sigma = -p_+(\theta)(1 + O(t))$.

On peut prendre $k_0 = -(y_+^*)^2(1 + O(t^2))$, ce qui nous laisse à montrer

$$(100) \quad f_+(\theta) \geq \sqrt{p_+(\theta)^2 - y_+^*(1 + O(t^2))},$$

qui est impliqué par

$$(101) \quad f_+(\theta)^2 - q_+^{*\prime\prime}(\theta)^2 \geq -y_+^*(1 + O(t^2)),$$

c'est-à-dire, en utilisant (75) et les formules du lemme 7,

$$k_{M_+} + \frac{\alpha''}{\gamma} + O\left(\frac{\delta t^2}{\pi q w}\right) \geq -y_+^*(1 + O(t^2)).$$

Mais $k_{M_+} = M_+^2 - \frac{\delta}{\pi q w}(1 + O(t^2))$,

et
$$0 \leq y_+ - M_+ = \hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}} - \left(\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} - \frac{K_1}{|\gamma|} t^{q-2-2k}} \right) \\ \leq \frac{K_1 t^{q-2-2k}}{|\gamma| \sqrt{\hat{\alpha}}} \leq \frac{3K_1 t^{q-2-2k}}{2 |\gamma| y_+}$$

d'après (98), donc

$$0 \leq 1 - \frac{M_+^2}{y_+^2} \leq \frac{3K_1 t^{q-2-2k}}{|\gamma| y_+^2} \leq O(t^{(q/2)-5-3k})$$

d'après (78 i). Avec (76), on en déduit que

$$k_M^+ = y_+^2(1 + O(t^{(q/2)-5-3k})) - \hat{\alpha}_2(1 + O(t^2)),$$

c'est-à-dire, se rappelant (77),

$$k_M^+ + \frac{\alpha''}{\gamma} + O\left(\frac{\delta t^2}{\pi q w}\right) = y_+^2(1 + O(t^{(q/2)-5-3k})) - y_+^{\prime 2}(1 + O(t^2)).$$

Enfin, de la démonstration de (78 iv), et de (78 i), on tire

$$y_+^{\prime 2} \leq y_+ + \frac{3\hat{\alpha}_1}{2y_+}(1 + O(t^2)) \leq y_+ + \frac{1}{8}y_+(1 + O(t^2)) = \frac{9}{8}y_+(1 + O(t^2)).$$

Ainsi,
$$k_{M_+} + \frac{\alpha''}{\gamma} + O\left(\frac{\delta t^2}{\pi q w}\right) \geq y_+^2(1 + O(t^{(q/2)-5-3k})) - \left(\frac{9}{8}\right)^2 y_+^2(1 + O(t^2)) \\ \geq -\frac{17}{64}y_+^2(1 + O(t^2)).$$

Puisque, d'après (78 iii), $y_+''^2 \geq (36/64) y_+^2$, (101) est évidemment vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

Bien entendu, des résultats analogues sont valables dans A_- . Rassemblant les résultats des §§ 3 et 4 qui concernent $\mathcal{A}_{p/q}$ et $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, on obtient le théorème suivant, qui précise le lemme 8 et la remarque qui clôt le § 3.1. Ce théorème est à comparer au théorème 3 de [5] : il montre que les « bons » rationnels sont presque aussi gentils que les « bons » irrationnels, en fait aussi gentils qu'on pouvait décentement l'espérer. On conseille au lecteur de se reporter aux figures 19 et 20 qui se trouvent à la fin du § 5; il y trouvera la représentation d'une « bulle avec taille de guêpe » et de la dynamique le long d'un chemin la coupant transversalement au plus étroit, c'est-à-dire en passant par les deux points de bifurcation du type Bogdanov dont on a montré l'existence à la fin du § 3.2.

Théorème 1. — (i) Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} - \tilde{\mathcal{C}}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$, P_{μ, a, t_1} « ressemble » à une forme normale sans courbe fermée invariante.

Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} \cap \partial \tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$, il en est de même à l'existence près d'une unique orbite périodique de nombre de rotation p/q .

Si $(\mu, a) \in \mathcal{A}_{p/q} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$, il en est de même à l'extérieur de la réunion de q îles disjointes C_i de « nombre de rotation p/q » (fig. 8).

(ii) Si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0 - \tilde{\mathcal{C}}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$, P_{μ, a, t_1} « ressemble » à une forme normale avec deux courbes fermées invariantes.

Si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0 \cap \partial \tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$, il en est de même à l'existence près entre les deux courbes d'une unique orbite périodique de nombre de rotation p/q .

Si $(\mu, a) \in \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0 \cap \tilde{\mathcal{C}}_{p/q}$, il en est de même à l'extérieur de la réunion de q îles disjointes C_i de « nombre de rotation p/q » situées entre les deux courbes.

5. ORBITES PÉRIODIQUES HYPERBOLIQUES ET LEURS ORBITES HOMOCLINES

5.1. Existence d'orbites homoclines

Fixons t positif assez petit : pour tout (μ, a) dans l'intérieur de $\hat{C}_{p/q}$, le difféomorphisme local $P_{\mu, a, t}$ possède deux orbites périodiques de nombre de rotation p/q dont l'une est « hyperbolique réelle » (ses valeurs propres λ_1, λ_2 vérifient $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$). Si $(\mu, a) \in \hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$, cette orbite est constituée des points $(\theta_h + (i/q), 0)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, où θ_h est l'unique solution de l'équation $\alpha + \delta\xi(\theta) = 0$ qui vérifie $\xi'(\theta_h) > 0$ (rappelons qu'avec les notations de (63), on a également

$$\alpha + \delta\xi(\theta_h) + B(\theta_h, 0) = 0;$$

la dérivée de $P_{\mu, a, t}$ en l'un de ces points a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ \delta\xi'(\theta_h) & 1 + \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial B}{\partial \theta}(\theta_h + (i/q), 0) & A(\theta_h) \end{pmatrix}.$$

Nous noterons $\tilde{H}_+ \cup \tilde{H}_-$ l'ensemble des valeurs de (μ, a) dans $\hat{C}_{p/q}$ pour lesquelles l'orbite périodique hyperbolique réelle de $P_{\mu, a, t}$ de nombre de rotation p/q possède des orbites homoclines (*i.e.* les variétés stables et instables de deux points consécutifs de l'orbite s'intersectent) ; la signification des indices + et - se lit sur la figure 13. On déduit immédiatement du lemme 4 et du théorème 1 que $\tilde{H}_+ \cup \tilde{H}_-$ est contenu dans $\hat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q} = (\mathcal{A}_{p/q} \cup \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0)$.

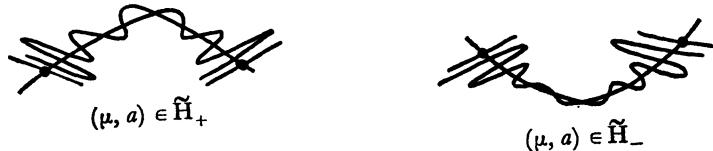
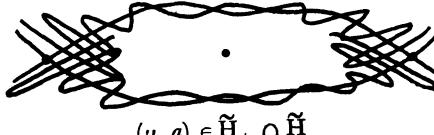


FIG. 13
(situation générique)

D'autre part, nous avions annoncé dans [3] et [4] qu'un voisinage de $\alpha = 0$ rencontre \tilde{H}_+ et \tilde{H}_- . Nous montrons ici un résultat plus précis (théorème 2) : en particulier, $\tilde{H}_+ \cap \tilde{H}_-$ est non vide et contenu dans un petit voisinage \tilde{P} de $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

La figure 14 représente la situation générique lorsque $(\mu, a) \in \tilde{H}_+ \cap \tilde{H}_-$; une telle dynamique se rencontre lorsqu'un pendule sans frottement est perturbé périodiquement, et c'est précisément celle que Zehnder met en évidence dans le cas conservatif ([15]).



$(\mu, a) \in \tilde{H}_+ \cap \tilde{H}_-$
FIG. 14
(situation générique)

Lemme 12. — Il existe une constante positive M telle que $\tilde{H}_+ \cup \tilde{H}_-$ ne rencontre pas l'ensemble $\mathcal{P}_{p/q} \subset \hat{\mathcal{P}}_{p/q}$ défini par

$$\mathcal{P}_{p/q} = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha = \alpha_1(\alpha, \beta), |\beta| \geq M t^{a-2-2k}\}.$$

Démonstration. — Calculons $K_1(P_{\mu, a, t^a}(\theta, y)) - K_1(\theta, y)$, où

$$K_1(\theta, y) = y^2 - q_+^{\alpha_1}(\theta)^2 \quad (\text{voir (75), (A8)})$$

a précisément pour singularités de sa surface de niveau 0 les singularités hyperboliques de $E^{\alpha_1, 0}(\alpha, \beta)$ qui nous intéressent, c'est-à-dire si $\alpha = \alpha_1(\alpha, \beta)$, les orbites périodiques hyperboliques de P_{μ, a, t^a} dont nous voulons étudier le comportement.

Posant comme en 3.2

$$\Pi(\theta, y) = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta) + y A(\theta, y) + B(\theta, y),$$

et tenant compte de l'identité

$$w q_+^{\alpha_1}(\theta) (q_+^{\alpha_1})'(\theta) = \alpha_1 + \gamma q_+^{\alpha_1}(\theta)^2 + \delta \xi(\theta),$$

il vient

$$\begin{aligned} K_1(P_{\mu, a, t^a}(\theta, y)) - K_1(\theta, y) &= K_1(\theta, y) - \alpha_1 - \gamma q_+^{\alpha_1}(\theta)^2 - \delta \xi(\theta) + \Pi(\theta, y)^2 + O(w^2 y^2) \\ &= 2y[\Pi(\theta, y) - \alpha_1 - \gamma q_+^{\alpha_1}(\theta)^2 - \delta \xi(\theta)] + \Pi(\theta, y)^2 + O(w^2 y^2) \\ &= 2y[(\alpha - \alpha_1) + \beta y + \gamma K_1(\theta, y) + O(t^{a-2-2k}) y] \\ &\quad + 2y B(\theta, y) + \Pi(\theta, y)^2. \end{aligned}$$

Si $\alpha = \alpha_1$ et $K_1 = 0$, on a donc

$$K_1(P_{\mu, a, t^a}(\theta, y)) - K_1(\theta, y) = 2[\beta + O(t^{a-2-2k})] y^2 + 2y B(\theta, y) + \Pi(\theta, y)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \Pi(\theta, y) &= \Pi(\theta, 0) + \beta y + \gamma y^2 + \gamma O(t^{a-2-2k}) \\ &= \Pi(\theta, 0) + O(t^{(a/2)+1-k}) y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \Pi(\theta, 0) &= \alpha_1 + \delta \xi(\theta) + B(\theta, 0) = \delta(\cos(2\pi q\theta) + O(t^2)) \leq O(t^{a/2}) q_+^{\alpha_1}(\theta)^{1/2} \\ &= O(t^{a/2}) \left(\frac{\alpha_1}{|\gamma|} + \frac{\delta}{\pi q w} (\sin(2\pi q\theta) + O(t^2)) \right)^{1/2} \\ &= O(t^{a/2}) \left(\frac{\delta}{\pi q w} (1 + \sin(2\pi q\theta) + O(t^2)) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \Pi(\theta, y) = O(t^{a/2}) q_+^{\alpha_1}(\theta) + O(t^{(a/2)+1-k}) y \quad \text{si } \alpha = \alpha_1,$$

et sur $K_1 = 0$, c'est-à-dire $y = \pm q_+^\alpha(\theta)$,

$$|\Pi(\theta, y)| \leq mt^{(a/2)-k} \cdot |y|,$$

où m est une constante positive. D'autre part, $B(\theta, y)$ s'annule sur les orbites périodiques de P_{μ, a, t^a} , et s'écrit donc au voisinage d'un point $(\theta_h + (i/q), 0)$

$$B(\theta, y) = O(t^a)y + O(t^a)(\theta - \theta_h - (i/q)).$$

Supposons M assez grand pour que

$$\beta + O(t^{a-2-2k}) + m^2 t^{a-2k} \geq \frac{\beta}{2} \geq \frac{M}{2} t^{a-2-2k};$$

il vient

$$K_1(P_{\mu, a, t^a}(\theta, y)) - K_1(\theta, y) \geq Mt^{a-2-2k}y^2 - 2|y| |B(\theta, y)|,$$

certainement positif dès que

$$|y| > \frac{2}{M} \frac{|B(\theta, y)|}{t^{a-2-2k}} = O(t^{a-a+2+2k}) = O(t^{(a/2)-5+3k}).$$

Si maintenant $|y| \leq \text{constante.}t^{(a/2)-5+3k}$, on se trouve, puisque $K_1 = 0$, au voisinage de l'un des points $(\theta_h + (i/q), 0)$; plus précisément,

$$y = \left(\frac{\alpha_1}{|\gamma|} (1 + \sin(2\pi q\theta) + O(t^2)) \right)^{1/2} = O(t^{k+1}) (\theta - \theta_h - (i/q)),$$

donc

$$\begin{aligned} K_1(P_{\mu, a, t^a}(\theta, y)) - K_1(\theta, y) &\geq Mt^{a-2-2k}y^2 - m_1 t^a y^2 - m_2 t^a |y| |\theta - \theta_h - (i/q)| \\ &\geq Mt^{a-2-2k}y^2 - m_3 t^{a-1-k} y^2 > 0. \end{aligned}$$

Si nous supposons

$$\beta + O(t^{a-2-2k}) + m^2 t^{a-2k} \leq \frac{\beta}{2} \leq -\frac{M}{2} t^{a-2-2k},$$

le raisonnement est le même avec les inégalités inverses.

La conclusion se lit sur la figure 15 :

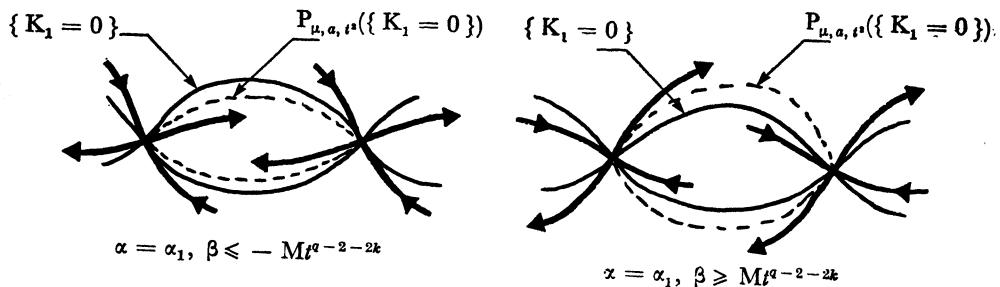


FIG. 15

Pour mimer le lemme A7 de l'Appendice, notons \tilde{I} , \tilde{II} , \tilde{III} , \tilde{IV} , les composantes connexes du complémentaire de $\mathcal{A}_{p/q} \cup \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0 \cup \mathcal{P}_{p/q}$ dans l'ensemble $\{(\mu, a) \in \tilde{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}, |\beta| \geq M t^{a-2-2k}\}$.

Notons de même \tilde{P} le complémentaire de $\mathcal{A}_{p/q} \cup \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^0$ dans l'ensemble $\{(\mu, a) \in \tilde{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}, |\beta| < M t^{a-2-2k}\}$ (fig. 16).

Théorème 2. — \tilde{H}_+ et \tilde{H}_- sont respectivement contenus dans $\tilde{P} \cup \tilde{II} \cup \tilde{IV}$ et $\tilde{P} \cup \tilde{I} \cup \tilde{III}$. Tout chemin allant du bord gauche au bord droit de $\tilde{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$ en restant dans $\tilde{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$ rencontre \tilde{H}_+ et \tilde{H}_- . Enfin, $\tilde{H}_+ \cap \tilde{H}_- \subset \tilde{P}$ n'est pas vide.

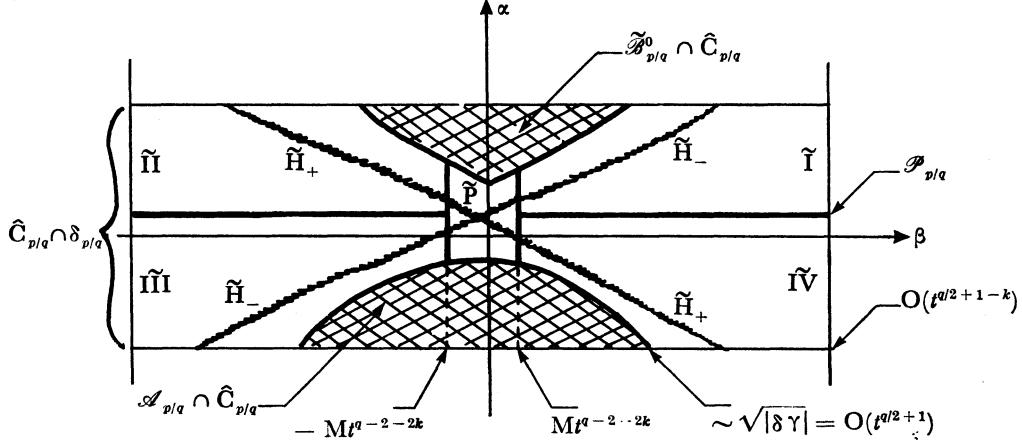


FIG. 16

Démonstration. — 1) Commençons par montrer que $\tilde{H}_+ \cap (\tilde{I} \cup \tilde{III})$ et $\tilde{H}_- \cap (\tilde{II} \cup \tilde{IV})$ sont vides.

Supposons que $\beta \geq M t^{a-2-2k}$: le calcul qui précède donne

$$K_1(P_{\mu, a, t}(\theta, y)) - K_1(\theta, y) = 2y[(\alpha - \alpha_1) + \beta y + \gamma K_1(\theta, y) + O(t^{a-2-2k})y] + 2yB(\theta, y) + \Pi(\theta, y)^2,$$

où

$$\Pi(\theta, y) = \alpha - \alpha_1 + O(t^{q/2}) q_+^{\alpha_1}(\theta) + O(t^{(q/2)+1-k}) y.$$

Comme dans le lemme 12, on en déduit que sur $K_1 = 0$,

$$K_1(P_{\mu, a, t}(\theta, y)) - K_1(\theta, y) = 2[\beta + O(t^{a-2-2k})]y^2 + 2yB(\theta, y) + [2 + O(t^{(q/2)-k})]y(\alpha - \alpha_1) + (\alpha - \alpha_1)^2$$

qui est positif si $y(\alpha - \alpha_1)$ l'est. On conclut alors comme dans le lemme A7.

Supposons maintenant $\beta \leq -M t^{a-2-2k}$: la figure A4 rend manifeste la nécessité de travailler avec $P_{\mu, a, t}^{-1}$; nous laissons ce soin au lecteur minutieux.

2) La deuxième partie du théorème se démontre comme dans [3], [4] : nous avons obtenu le lemme A7 en remarquant que, le long de tout chemin dans $\tilde{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$

allant d'un bord latéral à l'autre, les variétés stable et instable de deux singularités hyperboliques réelles consécutives de E_{μ, a, t^*} se traversaient nécessairement; il suffit donc de montrer que le même phénomène se produit lorsque E_{μ, a, t^*} est remplacée par P_{μ, a, t^*} , autrement dit, que, si t est assez petit, les variétés invariantes de P_{μ, a, t^*} approchent *sur une assez longue distance* celles de E_{μ, a, t^*} . Mais ceci est (par exemple) une conséquence sans mystère de la méthode de [15], c'est-à-dire de la recherche, *via* le théorème des contractions, desdites variétés invariantes sous la forme $y = g_{\pm}(\theta) + \exp(-K\theta) u(\theta)$, où $y = g_{\pm}(\theta)$ est un paramétrage sur un intervalle assez long d'une variété invariante de l'équation différentielle E_{μ, a, t^*} .

On en déduit que \tilde{H}_+ et \tilde{H}_- sont respectivement « proches » de H_+ et H_- .

Détailler ceci ne pourrait que fatiguer le lecteur et nous nous contenterons d'une remarque qui permet d'éviter toute itération effective : ainsi que nous l'avons dit dans la remarque (ii) à la fin du § 2.1, dans la formule (63) qui fait apparaître P_{μ, a, t^*} comme perturbation d'ordre t^Q d'un difféomorphisme local $R_{p/q} \circ \tilde{P}_{\mu, a, t^*}$ ayant les mêmes orbites périodiques de nombre de rotation p/q , mais de surcroît commutant à la rotation $R_{p/q}$, l'entier Q peut être choisi arbitrairement grand.

En particulier, toute méthode de transformées de graphes fournissant les variétés invariantes de ces orbites périodiques pour $R_{p/q} \circ \tilde{P}_{\mu, a, t^*}$ les fournit également pour P_{μ, a, t^*} ; mais de par sa commutation à $R_{p/q}$, $R_{p/q} \circ \tilde{P}_{\mu, a, t^*}$ peut être remplacé par \tilde{P}_{μ, a, t^*} , ce qui transforme les orbites périodiques considérées en points fixes.

3) La dernière affirmation du théorème se montre par la même méthode; pour changer un peu, considérons maintenant des chemins verticaux du type de celui représenté sur la figure 17.

Aux extrémités d'un tel chemin, la dynamique est bien contrôlée par le théorème 1 et implique que les variétés invariantes de E_{μ, a, t^*} (et donc celles de P_{μ, a, t^*}) se traversent lorsqu'on va d'un bord à l'autre; autrement dit, on rencontre nécessairement H_+ , H_- , \tilde{H}_+ , \tilde{H}_- . De plus, le chemin vertical $[a, d]$ ne rencontre \tilde{H}_+ (resp. \tilde{H}_-) que sur le sous-chemin $[a', e]$ (resp. $[e, d']$), et le chemin vertical $[b, c]$ ne rencontre \tilde{H}_+ (resp. \tilde{H}_-) que sur le sous-chemin $[f, c']$ (resp. $[b', f]$). On en déduit que $[a', e]$ et $[f, c']$ sont connectés dans $\tilde{H}_+ \cap \tilde{P}$, et que $[e, d']$ et $[b', f]$ sont connectés dans $\tilde{H}_- \cap \tilde{P}$, d'où il suit que $\tilde{H}_+ \cap \tilde{H}_-$, forcément contenu dans \tilde{P} , n'est pas vide.

Remarque. — Dans [3], [4], nous ne considérons que le cas où α est très voisin de 0, en se limitant à un voisinage $|y| \leq O(t^{k+1})$, ce qui suffit pour voir les variétés invariantes qui nous intéressent. La famille E_{μ, a, t^*} est alors remplacée par la famille à un paramètre

$$\frac{d\theta}{dt} = wy, \quad \frac{dy}{dt} = \beta y + \delta \xi(\theta),$$

simple équation du pendule avec « frottement » β . Cette simplicité se paie par l'impossibilité de démontrer dans ce cadre que $\tilde{H}_+ \cap \tilde{H}_-$ est non vide.

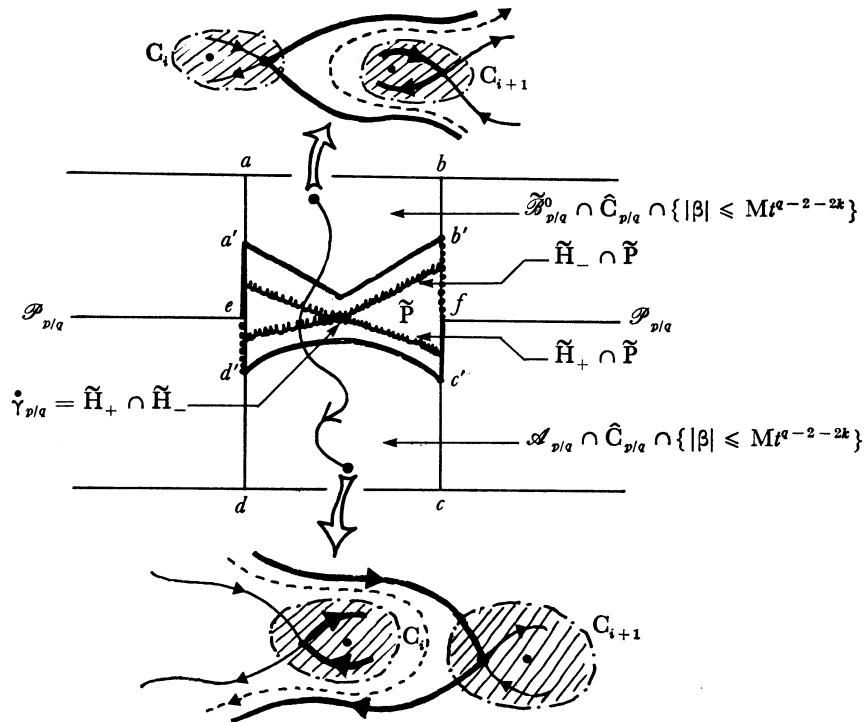


FIG. 17

On a représenté la dynamique de $P_{\mu, a, t}^q$ ou $R_{p/q}^{-1} \circ P_{\mu, a, t}$

Corollaire. — Si les connexions homoclines dont il est question dans \tilde{H}_+ et \tilde{H}_- ne sont pas dégénérées (i.e. si les variétés stables et instables s'intersectent transversalement ou avec un contact d'ordre fini), le sous-ensemble $\tilde{C}'_{p/q}$ de $\hat{C}_{p/q}$, formé des couples (μ, a) pour lesquels $P_{\mu, a, t}$ possède une courbe fermée C^0 invariante de nombre de rotation p/q , n'est pas connexe.

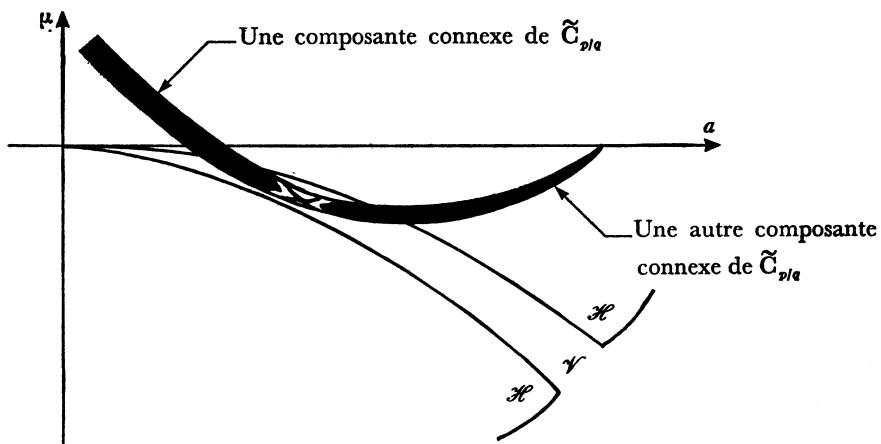


FIG. 18

En particulier, le sous-ensemble $\tilde{C}_{p/q}$ de $\tilde{C}'_{p/q}$ défini dans [5], qui est formé des $(\mu, a) \in \tilde{C}'_{p/q}$ pour lesquels la courbe fermée invariante est un « graphe » (i.e. rencontre en un point et un seul tout rayon issu de l'origine de \mathbf{R}^2) n'est pas connexe.

Démonstration. — L'hypothèse implique que $(\tilde{H}_+ \cup \tilde{H}_-) \cap \tilde{C}'_{p/q} = \emptyset$. Puisque $\tilde{C}_{p/q} \cap \mathcal{H} = \tilde{C}'_{p/q} \cap \mathcal{H} = \tilde{C}_{p/q} \cap \mathcal{H}$ (fig. 18), les deux grosses composantes connexes de $\tilde{C}_{p/q} - (\tilde{H}_+ \cup \tilde{H}_-)$ contiennent chacune une composante au moins de $\tilde{C}'_{p/q}$ (*a fortiori* de $\tilde{C}_{p/q}$). On comparera les figures 18 et A8.

5.2. Les familles génératrices

Dans la fin du paragraphe nous indiquons pourquoi, une topologie analytique très fine étant définie sur l'ensemble des familles à deux paramètres du type considéré dans cette série d'articles, la dynamique décrite dans les théorèmes 1 et 2 et dans le corollaire ci-dessus apparaît génériquement (au sens de Baire) pour une suite infinie p_n/q_n de « bons » nombres de rotation rationnels.

Il s'agit de paraphraser [15] en remplaçant l'hypothèse de conservation des aires par la présence de paramètres et, bien que (ou sans doute à cause de ce que) des différences sensibles existent dans la deuxième partie de la démonstration, nous laisserons au lecteur tout le travail technique, ne lui donnant que le squelette de la preuve, d'où les guillemets.

Une constante $K > 0$ étant fixée, $\mathcal{P}_{2,K}$ sera l'espace des difféomorphismes locaux analytiques de $(\mathbf{R}^2, 0)$

$$P(z) = \sum_{i+j \geq 1} P_{ij} z^i \bar{z}^j, \quad P_{ij} \in \mathbf{C}, \quad |P_{ij}| < K^{i+j}$$

(donc convergeant sur le disque D_K de rayon $1/2K$ de \mathbf{R}^2) ayant les deux propriétés suivantes :

1) L'origine 0 est un point fixe elliptique ne présentant pas de résonance forte; autrement dit, le spectre de la dérivée $DP(0)$ est contenu dans le cercle unité de \mathbf{C} et ne contient pas de racine q -ième de l'unité pour $q \leq 4$.

2) Dans une (et donc toute) mise sous forme normale de P ,

$$P = H^{-1} \circ (N + 0(|z|^4)) \circ H,$$

$$N(z) = z[1 + a_1 |z|^2] e^{2\pi i(b_0 + b_1 |z|^2)},$$

le coefficient a_1 s'annule.

La topologie sur $\mathcal{P}_{2,K}$ sera la topologie fine de Whitney sur l'ensemble des coefficients considéré comme application de \mathbf{N}^2 dans \mathbf{C} : une boule ouverte de centre

$$P^0(z) = \sum_{i+j \geq 1} P_{ij}^0 z^i \bar{z}^j$$

est définie par des inégalités

$$\forall i, j \text{ avec } i + j \geq 1, \quad |P_{ij} - P_{ij}^0| < \varepsilon_{ij},$$

où les ε_{ij} sont des nombres positifs quelconques.

On obtient ainsi un espace de Baire (une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense).

De même, $\mathcal{F}_{2, \mathbb{K}}$ sera l'ensemble des familles locales analytiques à deux paramètres de difféomorphismes locaux analytiques

$$P_{v_1, v_2}(z) = \sum_{i+j \geq 0} P_{ij}(v_1, v_2) z^i \bar{z}^j = \sum_{i+j+k+l \geq 0} P_{ijkl} v_1^k v_2^l z^i \bar{z}^j, \\ P_{ijkl} \in \mathbb{C}, \quad |P_{ijkl}| < K^{i+j+k+l},$$

telles que $P_{0,0}$ appartienne à $\mathcal{P}_{2, \mathbb{K}}$. La topologie, également de Baire, sur $\mathcal{F}_{2, \mathbb{K}}$ est définie de manière identique à celle sur $\mathcal{P}_{2, \mathbb{K}}$: une boule ouverte est de la forme

$$\forall i, j, k, l, \quad |P_{ijkl} - P_{ijkl}^0| < \varepsilon_{ijkl}.$$

Il est clair que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2, \mathbb{K}} &\rightarrow \mathcal{P}_{2, \mathbb{K}} \\ P_{v_1, v_2} &\mapsto P_{0,0} \end{aligned}$$

est continue pour ces topologies.

On vérifie également la continuité des injections canoniques

$$\begin{aligned} i_n : \mathcal{P}_{2, \mathbb{K}} &\rightarrow \text{Diff}^n(D_{\mathbb{K}}), \\ I_n : \mathcal{F}_{2, \mathbb{K}} &\rightarrow \mathcal{Fam}^n(D_{\mathbb{K}}), \end{aligned}$$

dans les espaces de Banach de difféomorphismes (familles de difféomorphismes) de classe C^n munis de la topologie de la convergence uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre n sur le disque de centre 0 et de rayon $1/2K$ dans \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^4).

La seule différence avec [15] est que, n'ayant pas de problème de fonctions génératrices, nous ne séparons pas le jet d'ordre un (ce qui reviendrait à écrire $P = DP(0) \circ Q$ et à mettre notre topologie sur les Q et celle de $SL(2, \mathbb{R})$ sur les $DP(0)$) : on obtient une topologie différente mais les deux coïncident sur les fibres de $P \mapsto DP(0)$.

Théorème 3. — Il existe un G_8 -dense de $\mathcal{F}_{2, \mathbb{K}}$ formé de familles P_{v_1, v_2} ayant la propriété suivante : pour une suite infinie p_n/q_n de « bons » rationnels, la structure de \hat{C}_{p_n/q_n} et la dynamique de P_{v_1, v_2} pour (v_1, v_2) appartenant à \mathcal{D}_{p_n/q_n} sont celles décrites dans les théorèmes 1 et 2, les hypothèses du corollaire du théorème 2 étant également vérifiées. En particulier, pour tout (v_1, v_2) dans l'intérieur de \hat{C}_{p_n/q_n} , P_{v_1, v_2} possède exactement deux orbites périodiques de nombre de rotation p_n/q_n , dont l'une hyperbolique réelle, et les éventuelles intersections homoclines se font avec un contact d'ordre fini (en fait « génériquement » au sens de la théorie des singularités, voir la figure 21).

Remarques. — 1) Notons $\pm 2\pi\omega_0$ l'argument des valeurs propres de $DP_{0,0}(0)$. On sait (§ 1) que la suite p_n/q_n converge nécessairement vers ω_0 .

2) Comme dans [15], on a toutes les chances d'obtenir pour les familles génériques du théorème 3 des nombres ω_0 « super-Liouville » (i.e. extrêmement bien approchés

par les nombres rationnels). Cela suffit pour que les conclusions de [5] et [6] s'appliquent à ces familles mais, en vue en particulier de la remarque qui clôture le § 1, il serait intéressant de comprendre la situation générique à ω_0 fixé (par exemple satisfaisant à une condition diophantienne!); dans le cas d'un difféomorphisme préservant les aires, le problème est très simple dans la topologie C^∞ (voir par exemple [2 *quarto*]), mais beaucoup moins dans la topologie analytique ci-dessus.

3) Comme dans [15], on déduit du théorème 3 un théorème analogue pour les familles locales C^n de difféomorphismes locaux C^n . On laisse au lecteur le soin d'énoncer des théorèmes de généricité dans d'autres topologies.

4) Ainsi qu'on l'a montré dans [6], on déduit du corollaire du théorème 2 que, pour une famille générique P_{v_1, v_2} , il existe une infinité de (« mauvais ») irrationnels ω tels que des membres de la famille P_{v_1, v_2} possèdent un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω mais pas de courbe régulière invariante de ce nombre de rotation (dans les notations de [6], ceci s'écrit $\hat{C}_\omega \neq \emptyset$). Rappelons qu'une telle éventualité est exclue si ω est un « bon » irrationnel (voir [5]).

Il est bon d'interpréter ce théorème à la lumière de la figure 11 de [5] : dans la situation générique, une sous-suite convergeant vers $(0, 0)$ des « bulles » qui y sont représentées rencontre au moins l'un des \hat{C}_{p_n/q_n} (éventuellement un nombre fini). Une telle « bulle avec taille de guêpe » est représentée sur la figure 19 (tirée de [7]). La dynamique le long d'un chemin traversant cette « bulle » au plus étroit est représentée sur la figure 20 (également tirée de [7]) : on a choisi un chemin tel que la première et la dernière bifurcation se fassent en un point du type de Bogdanov (voir § 3.2).

NB. — Dans la figure 20, les n°s 1, 2, 8, 9 sont des représentations complètes de la dynamique; dans 3 et 7 la dynamique « insulaire » n'est pas précisée : on verra dans le § 6 qu'il peut exister de petites courbes fermées invariantes par $P_{v_1, v_2}^{q_n}$ nées par bifurcations de Hopf. Enfin, dans 4, 5, 6, il pourrait *a priori* se trouver encore des courbes fermées régulières invariantes par P_{v_1, v_2} .

Remarquons à ce propos que nous avons représenté sur la figure 20 des intersections homoclines d'un autre type que celles étudiées dans ce paragraphe. Le lecteur courageux complétera notre étude, ce qui l'amènera à enrichir la figure 16 de la manière suivante :

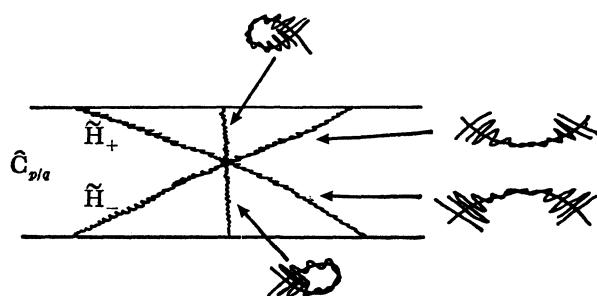


FIG. 16'

Des études numériques des différentes configurations d'intersection ont été faites par J. R. Johnson ([10]).

« *Démonstration* ». — 1) Soit Q_{v_1, v_2} un élément de $\mathcal{F}_{2,k}$ tel que $Q_{0,0}$ s'écrit

$$(102) \quad \begin{cases} Q_{0,0} = H \circ \tilde{Q}_{0,0} \circ H^{-1}, \quad H(0) = 0, \\ \tilde{Q}_{0,0}(z) = ze^{2\pi i(\omega_0 + \omega_1 |z|^2)} + O(|z|^4). \end{cases}$$

Soit $B = B(Q_{v_1, v_2}, \varepsilon_{ijkl})$ une boule ouverte de $\mathcal{F}_{2,k}$ de centre Q_{v_1, v_2} ; il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout rationnel p/q (écrit sous forme irréductible) distant de moins de ε de ω_0 , il existe $P_{v_1, v_2} \in B$ ayant la propriété suivante : après changement de coordonnées et de paramétrage, P_{v_1, v_2} devient une famille P_{μ, a, t_0^*} donnée par une formule du type (36), (41) avec $c_1(0, 0, 0) \neq 0$ et t_0 assez petit pour que les conclusions des théorèmes 1 et 2 soient valides pour tous les $P_{\mu, a, t}$, $0 < t \leq t_0$. En particulier, la langue de résonance $\hat{C}_{p/q}$ de la famille P_{v_1, v_2} est bordée par deux courbes lisses et les valeurs des paramètres situées dans son intérieur correspondent à des difféomorphismes locaux qui ont exactement deux orbites périodiques de nombre de rotation p/q , dont l'une hyperbolique réelle.

Pour démontrer cette affirmation, nous pourrons ne modifier qu'un nombre fini de coefficients Q_{ijkl} du développement de Taylor de Q_{v_1, v_2} : on commence par plonger $Q_{v_1, v_2} = H \circ \tilde{Q}_{v_1, v_2} \circ H^{-1}$ dans la famille à trois paramètres Q_{v_1, v_2, v_3} obtenue en remplaçant le début (jusqu'à l'ordre trois) du développement de Taylor (en z, \bar{z}, v_1, v_2) de Q_{v_1, v_2} par le segment homologue du développement de Taylor de $H \circ R_{(p/q) - \omega_0 + v_3} \circ \tilde{Q}_{v_1, v_2} \circ H^{-1}$ (en particulier, $Q_{v_1, v_2} = Q_{v_1, v_2, \omega_0 - (p/q)}$).

Il suit du théorème des fonctions implicites qu'une petite translation des coordonnées dépendant des paramètres nous ramène au cas où l'origine est fixée par tous les éléments de la famille; un nouveau changement de coordonnées conduit à une forme normale du type

$$z \mapsto z[1 + \sum_{i \geq 0} a_i(v_1, v_2, v_3) |z|^{2i}] e^{2\pi i(\sum_{i \geq 0} b_i(v_1, v_2, v_3) |z|^{2i})} + c_1(v_1, v_2, v_3) \bar{z}^{q-1} + O(|z|^q),$$

avec

$$a_0(0, 0, v_3) = a_1(0, 0, v_3) = 0, \quad b_0(0, 0, v_3) = (p/q) + v_3.$$

Par une éventuelle modification d'un nombre fini de coefficients du développement de Taylor de la famille *initiale* Q_{v_1, v_2} , on peut s'arranger pour que l'application

$$(v_1, v_2) \mapsto (a_0(v_1, v_2, 0), a_1(v_1, v_2, 0))$$

soit un difféomorphisme local, ce qui permet de choisir $\mu = a_0$ et $a = a_1$ comme nouveaux paramètres. De même, on peut obtenir que

$$\begin{aligned} a_2(0, 0, 0) &\neq 0, \quad b_1(0, 0, 0) \neq 0, \\ -2a_2(0, 0, 0) \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0, 0) + b_1(0, 0, 0) &\neq 0, \quad c_1(0, 0, 0) \neq 0. \end{aligned}$$

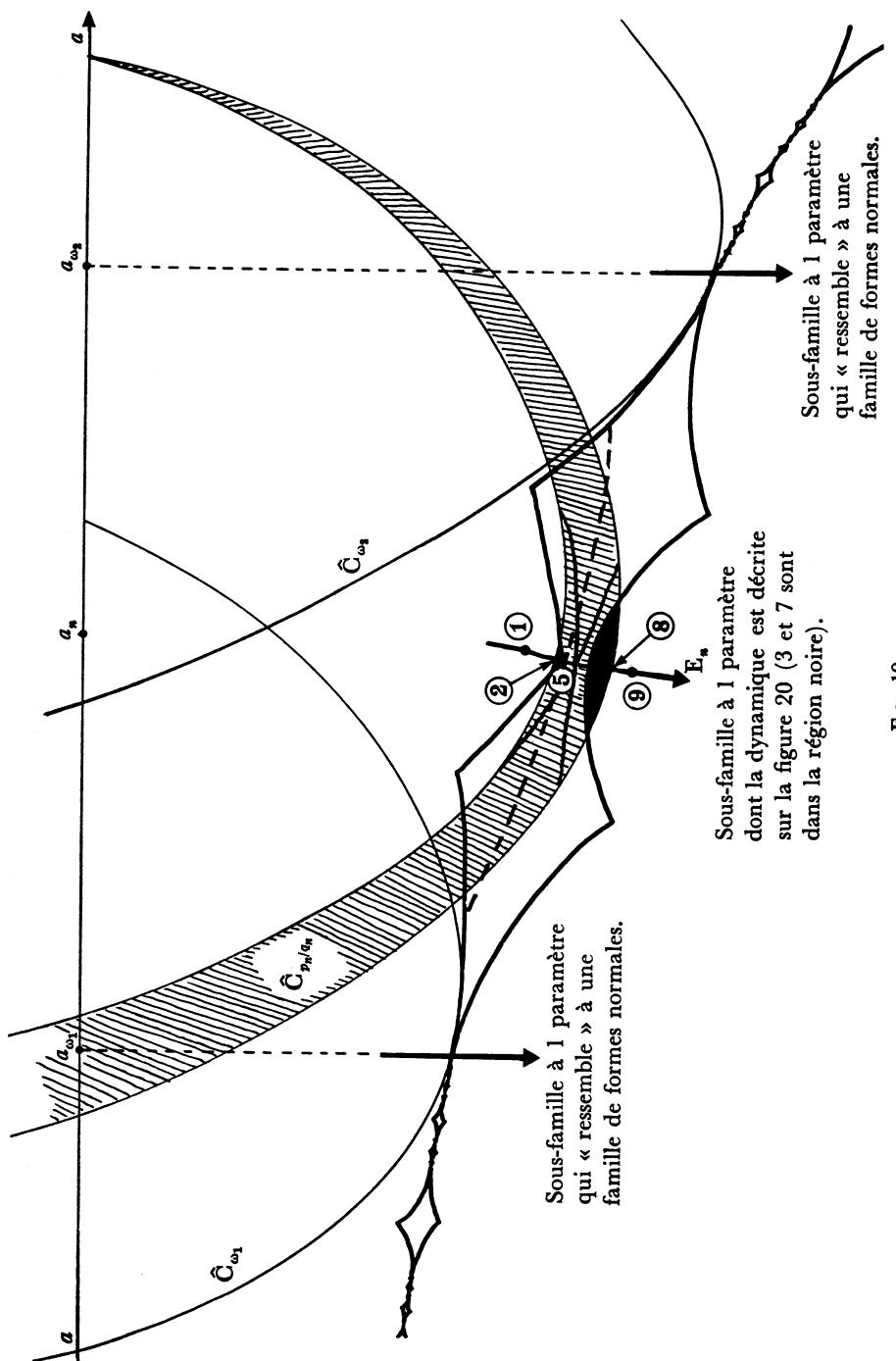


Fig. 19

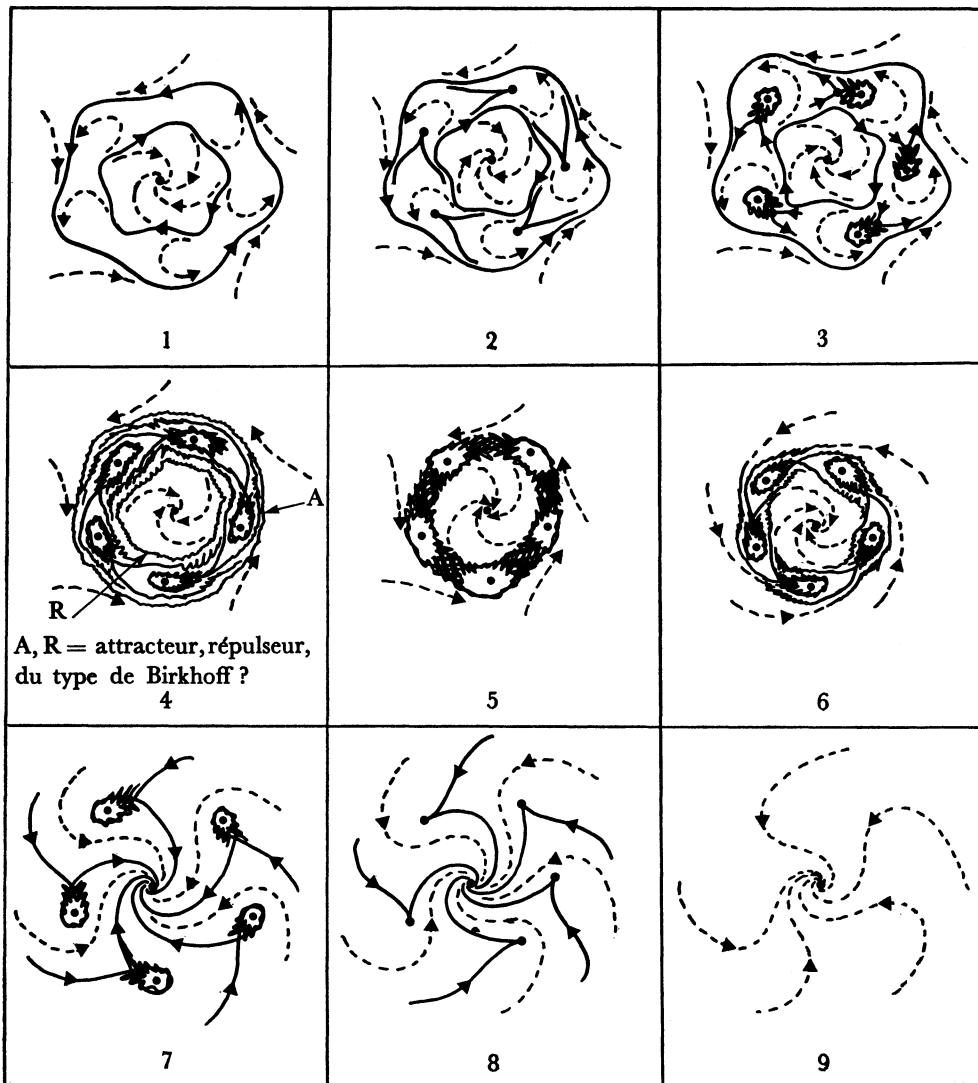


FIG. 20
(dynamique de $P_{v_1, v_2}^{q_n}$)

On définit alors P_{v_1, v_2} à partir de la famille à trois paramètres ainsi modifiée en fixant le troisième paramètre à une valeur assez petite pour que les conclusions des théorèmes 1 et 2 soient valables.

2) Nous avons donc obtenu, en modifiant légèrement un nombre fini de coefficients Q_{ijkl} du développement de Taylor de la famille Q_{v_1, v_2} une famille P_{v_1, v_2} dont la dynamique associée à un rationnel p/q proche de ω_0 est conforme à ce qui est décrit dans les théorèmes 1 et 2. Il nous faut maintenant, par une petite modification d'un nombre fini de coefficients P_{ijkl} du développement de Taylor de la famille P_{v_1, v_2} (dans

ses coordonnées initiales et non après la mise sous forme normale), rendre « génériques » les intersections homoclines associées à l'unique orbite périodique hyperbolique réelle éventuelle de nombre de rotation p/q des éléments de la famille.

Générique signifie ici que les seules configurations rencontrées au voisinage d'une valeur de (v_1, v_2) sont les suivantes (fig. 21) : on a dessiné dans chaque cas la surface obtenue en associant à chaque valeur de (v_1, v_2) la position x des points d'intersection homocline sur l'une des variétés choisie comme référence. On a dessiné également le contour apparent de cette surface sur le plan des paramètres, et les configurations d'intersection correspondant aux régions ainsi délimitées. Rappelons que, comme la transver-

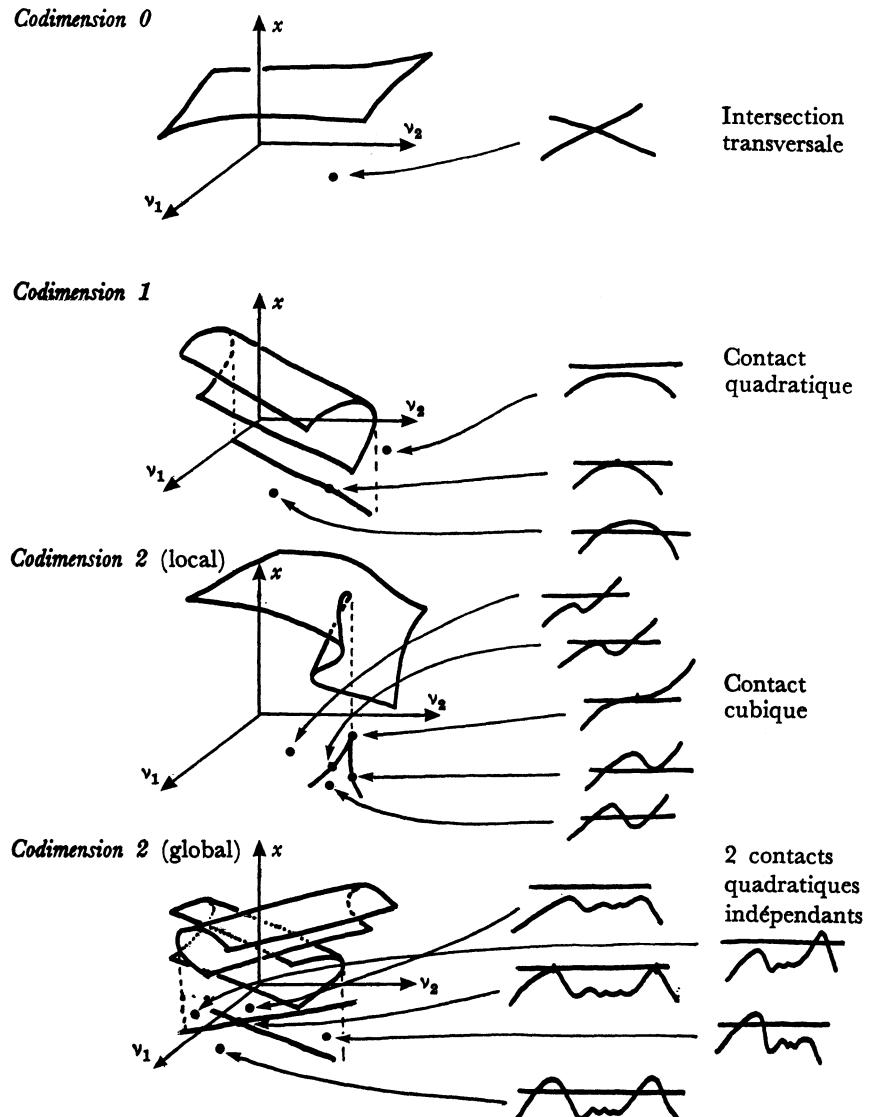


FIG. 21

salité, toutes les configurations locales génériques sont définies par une condition portant sur un jet d'ordre fini au point d'intersection d'une fonction repérant l'une des variétés invariantes par rapport à l'autre.

Comme dans [15], on commence par montrer qu'on peut arriver à ce résultat par une petite perturbation C^∞ à support compact disjoint de $((0, 0), (0, 0))$ dans l'espace $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ de coordonnées z, \bar{z}, v_1, v_2 : la condition sur les supports vient de ce qu'au niveau z, \bar{z} tout se passe dans une couronne contenant l'orbite périodique en question, alors qu'au niveau v_1, v_2 tout se passe dans $\hat{C}_{p/q}$ qui, puisque l'origine est un attracteur faible pour $P_{0,0}$, ne peut rencontrer $(0, 0)$.

Remarquons que, comme précédemment, la stabilité de la situation permet de ne vérifier les conditions de non-dégénérescence que sur l'approximation de P_{v_1, v_2} invariante par un groupe isomorphe au groupe engendré par $R_{p/q}$, et donc de troquer sans itérer les orbites périodiques considérées contre des points fixes. Enfin, on utilise encore une fois cette stabilité pour approcher la perturbation C^∞ par une perturbation polynomiale dont le jet en $((0, 0), (0, 0))$ s'annule à un ordre aussi grand que l'on veut.

3) Les points 1) et 2) « montrent » la densité du sous-espace Ω_ε de $\mathcal{F}_{2, \kappa}$ formé des familles satisfaisant aux conclusions du théorème 3 pour au moins un rationnel p/q tel que $|\omega_0 - (p/q)| < \varepsilon$.

La stabilité des familles à deux paramètres génériques de configurations d'intersection implique l'ouverture des Ω_ε , ce qui termine la démonstration du théorème 3 : on choisit comme G_δ -dense l'intersection des Ω_{ε_n} pour une suite ε_n tendant vers 0.

Remarques. — 1) Les points de contact cubique n'interviennent manifestement pas dans le contour apparent de \tilde{H}_+ et \tilde{H}_- . Dans la situation générique, celui-ci a donc comme seules singularités dans l'intérieur de $\hat{C}_{p/q}$ des points anguleux provenant des paires simultanées de contacts quadratiques.

2) Lorsque β est suffisamment positif, les bords supérieurs de \tilde{H}_- et \tilde{H}_+ correspondent aux arcs ED et $E'D'$ décrits dans les pages 332 et 333 de [2]. Lors de cette comparaison, garder en tête la figure A8 et l'existence du « pli » le long de $\hat{\Gamma}$ qui échange les rôles des deux composantes du bord de \tilde{H}_+ (on suppose ici que \tilde{H}_+ est connexe).

3) Ainsi que l'a noté le *referee*, on peut détailler de la manière suivante les conclusions du théorème 3 :

Si un nombre rationnel p/q est donné, il existe un entier $\ell = \ell(p/q)$ tel que les familles $P_{\mu, a}$ vérifiant *pour ce rationnel* les conclusions désirées forment un ouvert pour la topologie C' sur les familles ; il existe donc un G_δ pour la topologie C^∞ (et toutes les topologies plus fines, en particulier celle du texte) tel que les familles qui lui appartiennent vérifient les conclusions désirées pour une infinité de rationnels ; finalement, cet ensemble G_δ de familles est dense, même pour la topologie extrêmement fine considérée dans le texte.

6. ORBITES PÉRIODIQUES ELLIPTIQUES ET LEURS BIFURCATIONS DE HOPF

Nous revenons dans ce paragraphe à la dynamique des familles à trois paramètres P_{μ, a, t^a} .

Les équations $E_{\mu, a, t^a} = E(\alpha, \beta)$ sont hamiltoniennes (dans \mathbf{R}^2) pour $\beta = 0$; ceci vient de la non-prise en compte, à ce degré d'approximation, de la forme précise des coefficients de y et y^3 dans l'expression (63) de P_{μ, a, t^a} (voir la formule (103)).

On s'attend à ce que cette précision ait pour effet de déployer dans l'espace des paramètres la famille de courbes fermées invariantes qui entourent les points fixes elliptiques de $E(\alpha, 0)$: pour le vérifier, il suffit de s'assurer de la non-nullité « en général » du terme non linéaire qui fournit l'attraction (répulsion) faible nécessaire pour chasser lesdites courbes fermées de la région $\beta = 0$.

Bien entendu, pour P_{μ, a, t^a} , il s'agit d'orbites périodiques et non de points fixes, mais la remarque déjà faite à propos de la recherche des variétés invariantes des orbites périodiques hyperboliques est également valable ici: puisque, dans le reste $O(t^Q)$ de (63), l'entier Q peut être pris arbitrairement grand, les conditions d'attraction (répulsion) faible sont vérifiées pour les points fixes elliptiques de P_{μ, a, t^a}^a dès qu'elles le sont pour ceux (les mêmes!) de \tilde{P}_{μ, a, t^a} , où $R_{p/q} \circ \tilde{P} = P + O(t^Q)$ est la partie de P commutant à $R_{p/q}$. Dans la suite, c'est donc la famille \tilde{P}_{μ, a, t^a} que nous étudions.

Analysant le passage de (59) à (63), on constate que

$$(103) \quad yA(\mu, a, t, \theta, y) = A_1(\theta) y + A_2(\theta) y^2 + (\kappa + A_3(\theta)) y^3 + y^4 \tilde{A}(\theta, y),$$

où $\kappa = \kappa(\mu, a, t)$ et les $A_i(\theta) = A_i(\mu, a, t, \theta)$ vérifient les estimations

$$(104) \quad \begin{cases} \kappa \sim \gamma t^{(q/2)-8-k} = O(t^{q-2-2k}) < 0, \\ |A_1(\theta)| \leq O(t^q), \\ |A_2(\theta)| \leq O(t^{(3q/2)-5-k}), \\ |A_3(\theta)| \leq O(t^{2q-8-2k}), \\ |\tilde{A}(\theta, y)| \leq O(t^{(3q/2)-3-3k}); \end{cases}$$

en effet,

$$yA(\theta, y) = \sum_{i \geq 3} a'_i (t^{(q/2)-8-k})^{i-1} y^i + t^{(q/2)+1+k} [\eta(\theta, t^{(q/2)-8-k} y) - \eta(\theta, 0)],$$

où $a'_3 \sim s'$ (pousser le développement de (48)), et

$$\begin{aligned}\eta(\theta, x) &= \hat{\varphi}(\theta, x) + O(t^{q-8}) \\ &= c_1(1+x)^{(q/2)-1}[2(1+x)-qx]\cos(2\pi q\theta) + O(t^2) \\ &= \eta(\theta, 0) + c_1 x \{[(q/2)-1]2 + (2-q)\}\cos(2\pi q\theta) + O(t^2) + x^2 O(1) \\ &= \eta(\theta, 0) + xO(t^2) + x^2 O(1).\end{aligned}$$

On a donc

$$(105) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t^q}(\theta, y) = R_{p/q} \circ \tilde{P}_{\mu, a, t^q}(\theta, y) + (0, O(t^q)), \\ \tilde{P}_{\mu, a, t^q}(\theta, y) = (\Theta, Y), \\ \Theta = \theta + wy, \\ Y = \alpha + \delta\xi(\theta) + [1 + \beta + A_1(\theta)]y + [\gamma + A_2(\theta)]y^2 \\ \quad + [\kappa + A_3(\theta)]y^3 + y^4 \tilde{A}(\theta, y), \end{cases}$$

où les points fixes de \tilde{P}_{μ, a, t^q} dont on étudie les bifurcations de Hopf sont les $(\theta_0, 0) = (\theta_0(\alpha, \beta), 0)$ tels que

$$(106) \quad \alpha + \delta\xi(\theta_0) = 0, \quad \xi'(\theta_0) < 0.$$

La dérivée $D\tilde{P}_{\mu, a, t^q}(\theta_0, 0)$ s'écrit

$$(107) \quad \begin{cases} D\tilde{P}_{\mu, a, t^q}(\theta_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & w \\ v & 1 + \bar{v} \end{pmatrix}, \\ v = \delta\xi'(\theta_0) < 0, \\ \bar{v} = \beta + A_1(\theta_0); \end{cases}$$

si $\bar{v}^2 + 4vw < 0$, ses valeurs propres sont

$$(108) \quad \lambda, \bar{\lambda} = 1 + \frac{\bar{v}}{2} \pm \frac{iu}{2}, \quad u = \sqrt{-4vw - \bar{v}^2},$$

de module égal à 1 si et seulement si $\lambda\bar{\lambda} = 1 + \bar{v} - vw = 1$, donc

$$(109) \quad \bar{v} = vw \quad (\text{donc } u = \sqrt{-4\bar{v} - \bar{v}^2} \simeq 2\sqrt{\delta w |\xi'(\theta_0)|}),$$

c'est-à-dire

$$(109') \quad \beta = -A_1(\theta_0) + \delta w \xi'(\theta_0).$$

Le passage dans une base propre se fait par l'identification suivante de \mathbf{R}^2 (coordonnées θ, y) à \mathbf{C} (coordonnées z) :

$$(110) \quad \begin{cases} \theta = \theta_0 + w(z + \bar{z}), \\ y = \frac{\bar{v}}{2}(z + \bar{z}) + \frac{iu}{2}(z - \bar{z}), \end{cases} \quad \text{ou } z = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta - \theta_0}{w} - i \left(\frac{2y}{u} - \frac{\bar{v}(\theta - \theta_0)}{wu} \right) \right],$$

qui, au voisinage de $(\theta_0, 0)$, transforme $\tilde{P}_{\mu, a, \iota^*}$ en

$$(111) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_{\mu, a, \iota^*}(z) = Z, \\ Z = \lambda z + A(z + \bar{z})^2 + B(z + \bar{z})(z - \bar{z}) + C(z - \bar{z})^2 + D(z + \bar{z})^3 \\ \quad + E(z + \bar{z})^2(z - \bar{z}) + F(z + \bar{z})(z - \bar{z})^2 + G(z - \bar{z})^3 \\ \quad + O(|z|^4), \text{ où} \\ A = -\frac{i}{2u} \left[\delta w^2 \xi''(\theta_0) + w\bar{v} A'_1(\theta_0) + \frac{\bar{v}^2}{2} (\gamma + A_2(\theta_0)) \right], \\ B = \frac{w}{2} A'_1(\theta_0) + \frac{\bar{v}}{2} (\gamma + A_2(\theta_0)), \\ C = \frac{iu}{4} (\gamma + A_2(\theta_0)), \\ D = -\frac{i}{2u} \left[\frac{\delta w^3}{3} \xi'''(\theta_0) + \frac{w^2 \bar{v}}{2} A''_1(\theta_0) + \frac{w\bar{v}^2}{2} A'_2(\theta_0) + \frac{\bar{v}^3}{4} (\kappa + A_3(\theta_0)) \right], \\ E = \frac{w^2}{4} A''_1(\theta_0) + \frac{w\bar{v}}{2} A'_2(\theta_0) + \frac{3\bar{v}^2}{8} (\kappa + A_3(\theta_0)), \\ F = \frac{iu}{4} \left[wA'_2(\theta_0) + \frac{3\bar{v}}{2} (\kappa + A_3(\theta_0)) \right], \\ G = -\frac{u^2}{8} (\kappa + A_3(\theta_0)), \end{array} \right.$$

qui s'écrit encore

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_{\mu, a, \iota^*}(z) = \lambda z + \sum_{2 \leq i+j \leq 3} a_{ij} z^i \bar{z}^j + O(|z|^4), \text{ avec} \\ a_{20} = A + B + C, \quad a_{11} = 2(A - C), \quad a_{02} = A - B + C, \\ a_{21} = 3D + E - F - 3G. \end{array} \right.$$

Le calcul standard de formes normales montre que l'élimination par changement de variable

$$z \mapsto z + \sum_{i+j=2} \gamma_{ij} z^i \bar{z}^j$$

des termes quadratiques en z, \bar{z} dans (112) transforme le coefficient a_{21} de $z^2 \bar{z}$ en

$$(113) \quad a'_{21} = a_{21} + \frac{2a_{20} a_{11}}{1 - \lambda} + \frac{|a_{11}|^2}{1 - \bar{\lambda}} + \lambda \bar{\lambda} \left[\frac{a_{20} a_{11}}{\lambda(\lambda - 1)} + \frac{2 |a_{02}|^2}{\lambda^2 - \bar{\lambda}} \right].$$

En un point où $\lambda \bar{\lambda} = 1$, la condition de non-dégénérescence (attraction ou répulsion faibles) suffisant à assurer l'existence d'une bifurcation de Hopf est simplement $\operatorname{Re} \left(\frac{a'_{21}}{\lambda} \right) \neq 0$, c'est-à-dire

$$(114) \quad \operatorname{Re}\left(\frac{a_{21}}{\lambda}\right) + \operatorname{Re}\left[\frac{1}{(\lambda-1)}\left\{\frac{\bar{\lambda}-2}{\lambda} a_{20} a_{11} + |a_{11}|^2 + \frac{2|a_{02}|^2}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right\}\right] \neq 0,$$

ou encore

$$(115) \quad \begin{cases} \left(1 + \frac{\bar{v}}{2}\right)(E - 3G) + \frac{u}{2i}(3D - F) + (A^2 - C^2)(1 + O(u^2)) \\ - \frac{4}{iu}B(A - C)(1 + O(u^2)) + 2(A - C)^2 \\ \quad + [(A + C)^2 - B^2](1 + O(u^2)) \neq 0; \end{cases}$$

en effet,

$$(116) \quad \bar{v} = -\frac{u^2}{4}(1 + O(u^2)) = \delta w \xi'(\theta_0) \leq O(t^q),$$

$$\text{donc} \quad \begin{aligned} \frac{\bar{\lambda} - 2}{\lambda(\lambda - 1)} &= \frac{1}{2}(1 + O(u^2)) + \frac{2i}{u}(1 + O(u^2)), \\ \frac{1}{\lambda - 1} &= -\frac{1}{2} + \frac{iu}{2\bar{v}} = -\frac{1}{2} - \frac{2i}{u}(1 + O(u^2)), \\ \frac{1}{\lambda^3 - 1} &= -\frac{1}{2}(1 + O(u^2)) - \frac{2i}{3u}(1 + O(u^2)). \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord α choisi tel que $\xi''(\theta_0) = 0$ [en particulier $\alpha \leq O(\delta t^2)$] et β défini par (109'). Puisque $\xi(\theta) = \cos(2\pi q\theta) + O(t^2)$, on en déduit :

$$\xi'(\theta_0) = -2\pi q + O(t^2) \quad \text{et} \quad \xi'''(\theta_0) = 8\pi^3 q^3 + O(t^2).$$

Évalué à partir de (111), le premier membre de (115) est un $O(t^{2q-2-k})$ qui s'écrit

$$(117) \quad \frac{w^2}{4}[-\delta w \xi'''(\theta_0) + A_1''(\theta_0)] + 3\pi q \delta w \kappa + O(t^{2q-2k}).$$

Supposons maintenant α choisi tel que $\xi'(\theta_0)$ soit très proche de 0 et β toujours défini par (109') (autrement dit, on est très proche de l'un des deux points de Bogdanov sur $\partial\hat{C}_{p/q}$).

Le premier membre de (115) est maintenant un $O\left(\frac{t^{2q-2-2k}}{|\xi'(\theta_0)|}\right)$, plus précisément

$$(118) \quad \frac{w^2 \xi''(\theta_0)}{4 |\xi'(\theta_0)|}[-\delta w \xi''(\theta_0) + A_1'(\theta_0)] + O\left(\frac{t^{2q-2k}}{|\xi'(\theta_0)|}\right),$$

avec $\xi''(\theta_0) = \pm 4\pi^2 q^2$, le signe dépendant de la composante du bord de $\hat{C}_{p/q}$ dont on s'approche.

Le contrôle des expressions (117) et (118) nécessite une évaluation de $A_1(\theta)$: il suffit (*sic !*) pour cela de pousser d'un cran les calculs de formes normales résonnantes du § 2.1 en prenant comme point de départ la forme suivante de (40) :

$$(119) \quad P_{\mu, a, t}(z) = z[\Phi'(\mu, a, t, |z|^2, 0) + D_1 \bar{z}^a + D_2 z^a] + \gamma_1 \bar{z}^{a-1} + O(|z|^{a+3}).$$

Nous noterons

$$(120) \quad \begin{cases} D_1 = D_1(\mu, a, t) = u_1 e^{2\pi i v_1}, \\ D_2 = D_2(\mu, a, t) = u_2 e^{2\pi i v_2}, \end{cases}$$

et oublierons systématiquement de noter les dépendances en μ, a, t des divers coefficients. On obtient, après une rotation des coordonnées de $(1/q)(g(0) - d_1)$, la précision suivante de la formule (44) :

$$(121) \quad \begin{cases} P_{\mu, a, t}(re^{2\pi i \theta}) = Re^{2\pi i \Theta}, \\ \Theta = \theta + g(r^2) - \frac{1}{2\pi(1+f(r^2))} [c_1 r^{q-2} \sin(2\pi(q\theta + g(r^2) - g(0))) \\ \quad + u_1 r^q \sin(2\pi(q\theta + g(r^2) - g(0) + d_1 - v_1)) \\ \quad + u_2 r^q \sin(2\pi(-q\theta + g(r^2) + g(0) - d_1 - v_2))] + O(r^{q+2}), \\ R = r[1 + f(r^2) + c_1 r^{q-2} \cos(2\pi(q\theta + g(r^2) - g(0))) \\ \quad + u_1 r^q \cos(2\pi(q\theta + g(r^2) - g(0) + d_1 - v_1)) \\ \quad + u_2 r^q \cos(2\pi(-q\theta + g(r^2) + g(0) - d_1 - v_2))] + O(r^{q+2}). \end{cases}$$

Posons maintenant, comme en (45), $r = r(p/q) \sqrt{1 + \sigma}$.

Puisque $g(r^2) = g(0) + b_1 r^2 + O(r(p/q)^4)$ et $f(r^2) = \mu + ar^2 + \dots = O(r(p/q)^4)$ (voir 49-1), on peut remplacer $1/(2\pi(1+f(r^2)))$ par $1/2\pi$ et $g(r^2) - g(0)$ par $b_1 r^2 = b_1 r(p/q)^2 (1 + \sigma) = \tau(p/q) (1 + \sigma)$. Il vient $P_{\mu, a, t}(\theta, \sigma) = (\Theta, \Sigma)$, avec

$$(122) \quad \begin{cases} \Theta = \theta + (p/q) + \tau(p/q) \sigma + r(p/q)^q T(\sigma) \\ \quad - \frac{c_1}{2\pi} r(p/q)^{q-2} (1 + \sigma)^{(q-2)/2} \sin(2\pi(q\theta + \tau(p/q) (1 + \sigma))) \\ \quad - \frac{u_1}{2\pi} r(p/q)^q (1 + \sigma)^{q/2} \sin(2\pi(q\theta + \tau(p/q) (1 + \sigma) + d_1 - v_1)) \\ \quad - \frac{u_2}{2\pi} r(p/q)^q (1 + \sigma)^{q/2} \sin(2\pi(-q\theta + \tau(p/q) (1 + \sigma) + 2b_0 - d_1 - v_2)) \\ \quad + O(r(p/q)^{q+2}), \\ \Sigma = v + (1 + \varepsilon) \sigma + s\sigma^2 + r(p/q)^q S(\sigma) \\ \quad + 2c_1 r(p/q)^{q-2} (1 + \sigma)^{q/2} \cos(2\pi(q\theta + \tau(p/q) (1 + \sigma))) \\ \quad + 2u_1 r(p/q)^q (1 + \sigma)^{(q/2)+1} \cos(2\pi(q\theta + \tau(p/q) (1 + \sigma) + d_1 - v_1)) \\ \quad + 2u_2 r(p/q)^q (1 + \sigma)^{q/2+1} \cos(2\pi(-q\theta + \tau(p/q) (1 + \sigma) + 2b_0 - d_1 - v_2)) \\ \quad + O(r(p/q)^{q+2}). \end{cases}$$

Enfin, dans $\delta_{p/q}$ (défini au début du § 2.2), $|r(p/q)^2 - \rho_{p/q}^2|$ et $|\tau(p/q) - \tau_{p/q}|$ sont au plus d'ordre $O(\rho_{p/q}^{(q/2)-1-k})$, et si $F(\theta, \sigma)$ est de classe C^2 et (p/q) -périodique en θ ,

$$F(\Theta, \Sigma) - F(\theta, \sigma) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, \sigma) \tau \rho + O(\rho_{p/q}^4) \rho^2 + O(\rho_{p/q}^4) \rho^3 + O(\rho_{p/q}^6).$$

On en déduit que le changement de variables $(\theta, \sigma) \mapsto (\theta, \rho)$ défini par

$$(123) \quad \rho = \frac{1}{\tau_{p/q}} (\Theta - \theta - (p/q)),$$

conduit à l'expression suivante qui précise (50) (on a posé $\tau = \tau_{p/q}$) :

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\mu, a, t^q}(\theta, \rho) = (\Theta, R), \\ \Theta = \theta + (p/q) + \tau\rho, \\ R = v' + (1 + \varepsilon') \rho + s' \rho^2 + \sum_{i \geq 3} a'_i \rho^i + 2c_1 t^{q-2} \cos(2\pi(q\theta + \tau)) \\ \quad + 2t^q [u_1 \cos(2\pi(q\theta + d_1 - v_1)) + u_2 \cos(2\pi(q\theta - 2b_0 + d_1 + v_2))] \\ \quad + \left[t^{q-2} \left(\frac{s'}{\pi\tau} - 4\pi\tau \right) c_1 \sin(2\pi q\theta) \right] \rho \\ \quad + [2t^q [u_1 \cos(2\pi(q\theta + d_1 - v_1)) \\ \quad + (q+1) u_2 \cos(2\pi(q\theta - 2b_0 + d_1 + v_2))] \rho \\ \quad + O(t^q) \rho^2 + O(t^q) \rho^3 + O(t^{q+2})]. \end{array} \right.$$

Les autres changements de variables, à l'homothétie près faisant passer de x à y , sont suffisamment tangents à l'identité pour ne pas perturber ces formules. On en déduit que $A_1(\theta)$ n'est autre, à $O(t^{q+2})$ près, que le coefficient de ρ dans l'expression ci-dessus de R ; autrement dit, puisque d'après (63) et (104) on a :

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \cos(2\pi q\theta) + O(t^2), \quad \tau = wt^{-(q/2)+3+k}, \quad s' = \gamma t^{-(q/2)+3+k}, \\ 2c_1 t^{q-2} &= \delta t^{(q/2)-3-k}, \quad \kappa \sim \gamma t^{(q/2)-3-k}, \end{aligned}$$

on obtient

$$(125) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1(\theta) = \ell_0 \xi(\theta) + \ell_1 \xi'(\theta) + O(t^{q+2}), \quad \text{où} \\ \ell_0 = 2t^q [u_1 \cos(2\pi(d_1 - v_1)) + (q+1) u_2 \cos(2\pi(-2b_0 + d_1 + v_2))], \\ \ell_1 = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{\gamma t^{(q/2)-3-k}}{4\pi^2 w^2} \right) \delta w \\ \quad + \frac{t^q}{\pi q} [u_1 \sin(2\pi(d_1 - v_1)) + (q+1) u_2 \sin(2\pi(-2b_0 + d_1 + v_2))]. \end{array} \right.$$

En particulier, (117) et (118) deviennent respectivement

$$(117') \quad 2\pi^3 q^3 w^2 (\ell_1 - \delta w) + 3\pi q \delta w \gamma t^{(q/2)-3-k} + O(t^{2q-2k}),$$

$$(118') \quad \frac{4\pi^4 q^4 w^2}{|\xi'(\theta_0)|} (\ell_1 - \delta w) + O\left(\frac{t^{2q-2k}}{|\xi'(\theta_0)|}\right).$$

Supposons comme d'habitude que δ et w sont positifs.

Si, par exemple, $(|\gamma| t^{(q/2)-3-k} / (4\pi^2 w^2)) < 1$, et si $|u_1|$ et $|u_2|$ sont assez petits, $\ell_1 - \delta w$ sera négatif ainsi donc que (117'), (118'), et le second membre de (109') qui vaut $\ell_0 \xi(\theta_0) + (\ell_1 - \delta w) |\xi'(\theta_0)|$.

Cela signifie sans doute que tout le long de la courbe de bifurcation définie par (109'), \tilde{P}_{μ, a, t^*} (et donc également P_{μ, a, t^*}^q) subit une bifurcation de Hopf supercritique

Une telle situation, ainsi d'ailleurs qu'une grande partie de la dynamique décrite dans ce travail, a été observée numériquement dans [11] dont les motivations sont biologiques. La figure 22, qui complète la figure 16', est adaptée de cet article.

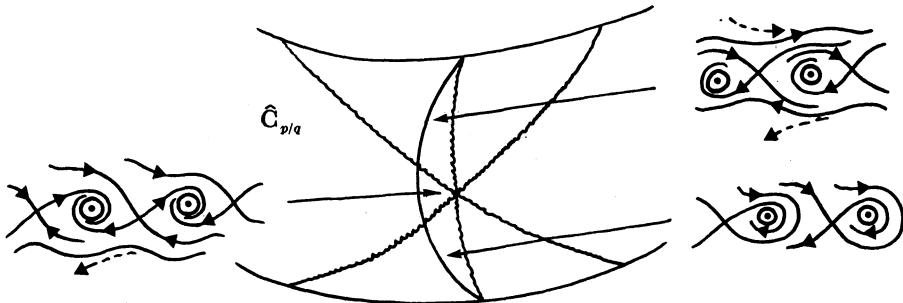


FIG. 22
(adaptée de [11])

Cependant, si $u_2 \sin(2\pi(-2b_0 + d_1 + v_2))$ est assez grand, $\ell_1 - \delta w$ peut très bien devenir positif, et les signes de (117') et (118') peuvent alors différer; moyennant certaines inégalités sur ses coefficients de Taylor, une famille générique P_{v_1, v_2} donnée par le théorème 3 peut donc présenter dans chacune des langues de résonance de la suite \tilde{C}_{p_n/q_n} des bifurcations de Hopf dégénérées de P_{v_1, v_2}^q (annulation du coefficient $\text{Re}(a'_{21}/\lambda)$, qui joue le rôle du paramètre a). Il reste à vérifier que, quitte à restreindre l'ensemble des familles génériques, on peut également supposer que toutes nos conditions de non-dégénérescence sont satisfaites (le coefficient $\text{Im}(a'_{21}/\lambda)$, par exemple, se calcule facilement à partir de nos formules).

Ainsi, de même que dans le cas conservatif les îles elliptiques s'emboîtent, répétant à l'infini une dynamique toujours la même, il semble que dans nos familles à deux paramètres le diagramme de bifurcation puisse contenir des répliques de lui-même de plus en plus petites. Nous laisserons le lecteur poursuivre dans cette voie.

Note. — Tous ces calculs sont bien fastidieux et les causes d'erreur ne manquent pas. On peut, par exemple, vérifier la cohérence de (117) et (118) en remarquant que le terme dominant des deux expressions s'annule bien lorsque \tilde{P}_{μ, a, t^*} est remplacé par le difféomorphisme obtenu à partir du « temps 1 » de l'équation différentielle hamiltonienne $E(\alpha, 0)$ en effectuant le changement de variables qui transforme Θ en $\theta + w\gamma$; on vérifie en effet qu'alors

$$\kappa = O(\gamma^2) = O(t^{q+2-2k}) \quad \text{et} \quad A_1(\theta) = \delta w \xi'(\theta) + O(t^{q+2}).$$

CONCLUSION

Nous avions commencé cette série d'articles en comparant les familles à deux paramètres $P_{\mu, a}$ que nous étudions à un difféomorphisme local H préservant les aires de \mathbf{R}^2 au voisinage d'un point fixe elliptique. Dans ([5], figure 1) nous indiquions l'analogie existant entre la dynamique de H et celle de la famille $P_{\mu, a}$ « le long » de la courbe de non-hyperbolicité Γ .

Nous pouvons maintenant enrichir cette comparaison en faisant intervenir la dynamique de $P_{\mu, a}$ le long de chemins transverses à Γ . Plus précisément, de même que H est une perturbation d'une forme normale N qu'on peut identifier à une famille à un paramètre de rotations du cercle, la restriction de $P_{\mu, a}$ au voisinage \mathcal{V} est une perturbation d'une famille de formes normales $N_{\mu, a}$ qui peut être considérée comme une famille à un paramètre $a \mapsto (\mu \mapsto N_{\mu, a})$ de familles à un paramètre, dans chacune desquelles se produit l'élimination d'un couple de courbes fermées invariantes ([7] figure 1; c'est ce que dans [7] nous avons appelé « chemin standard d'élimination »).

Aux courbes invariantes de H données par la théorie de K. A. M. correspondent les sous-familles à un paramètre $\mu \mapsto P_{\mu, a}$ passant par les points $\tilde{\gamma}_\omega$ de l'ensemble de Cantor $\tilde{\Gamma}$ introduit dans [5] (*i.e.* les familles ne rencontrant aucune « bulle ») : ces familles « ressemblent », en un sens que nous avons rappelé dans le § 3.2, à un chemin standard d'élimination.

Aux ensembles invariants d'Aubry-Mather de H correspondent des sous-familles de $P_{\mu, a}$ rencontrant les ensembles \hat{C}_ω (voir [6]) et subissant *a priori* des bifurcations complexes.

Enfin, nous venons de montrer qu'aux orbites périodiques de Zehnder et à leurs orbites homoclines correspondent des sous-familles de $P_{\mu, a}$ traversant au plus étroit une « bulle avec taille de guêpe ». Le long d'une telle famille à un paramètre, la dynamique s'approche de celle d'un chemin standard d'élimination autant que le permet l'apparition d'orbites périodiques isolées entre les courbes invariantes qui désirent s'éliminer (fig. 19, 20).

De même que nous avons montré que l'apparition de ces orbites périodiques se faisait avant la disparition des courbes fermées invariantes, il serait très intéressant de montrer qu'au moment où apparaissent les premières tangences homoclines correspondant à la traversée de $\partial\tilde{H}_+$ et $\partial\tilde{H}_-$, il n'existe plus au voisinage aucune courbe fermée régulière invariante par $P_{\mu, a}$. On en déduirait qu'avant de s'éliminer, les deux courbes se transforment en une paire d'un attracteur et d'un répulseur du type de Birkhoff ([2 bis]).

De telles « courbes étranges » contiendraient des ensembles invariants d'Aubry-Mather dont les nombres de rotation parcourrent tout un intervalle ([10 bis]), ce qui donnerait, par analogie avec le cas des familles d'endomorphismes du cercle, une première intuition de la façon dont les différents ensembles \hat{C}_ω s'intersectent. La figure 23 décrit, dans ce cadre conjectural, la distribution des nombres de rotation (*i.e.* des ensembles \hat{C}_ω) rencontrés le long du chemin considéré dans les figures 19 et 20. Notons que l'existence d'un intervalle de rotation pour la valeur 5 du paramètre est assurée par le théorème 2 de [2] (voir également [8 bis]).

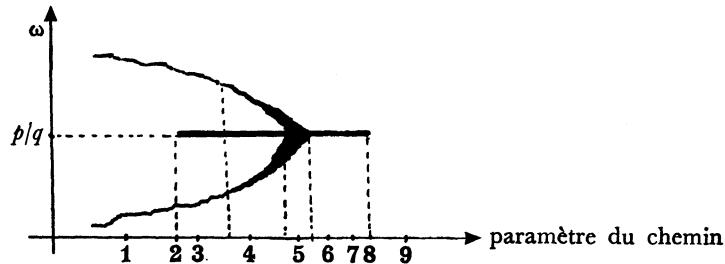


FIG. 23

Cette question sur les attracteurs de Birkhoff est bien dans la ligne de notre principal propos qui aura été d'analyser la tension hyperbolique-elliptique qui se manifeste quand on mélange les influences radiales (coefficients a_i des formes normales, intervenant dans les théories du type de la classique bifurcation de Hopf) et angulaires (coefficients b des formes normales, intervenant dans les théories du type K.A.M.). Nous retiendrons en particulier le grand pouvoir organisateur qu'a sur la dynamique globale la présence de sous-dynamiques de « bon » nombre de rotation, rationnel ou irrationnel, dès que coexistent distorsion et dissipation.

APPENDICE : ZOOLOGIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $E_{\mu, a, t}$

Cet appendice contient divers résultats sur les portraits de phase et les bifurcations des équations $E_{\mu, a, t}$, rebaptisées pour la circonstance $E(\alpha, \beta)$ ($t > 0$ petit est fixé, et μ, a varient dans $\delta_{p/q}$ où α, β sont des coordonnées définies dans le lemme 6) :

$$(A1) \quad E(\alpha, \beta) \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = wy \\ \frac{dy}{dt} = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta). \end{cases}$$

On trouvera la définition de w, γ, δ, ξ dans la formule (63); rappelons en particulier que γ, δ, ξ dépendent (peu) de (μ, a) donc de (α, β) . En fait, tous les résultats que nous démontrerons sont identiques à ceux que l'on obtiendrait en supposant w, γ, δ constants [pour les figures $w > 0, \gamma < 0, \delta > 0$] et $\xi(\theta)$ égale à $\cos(2\pi q\theta)$.

Le § 4 du texte n'utilise que le lemme A3; le détail des bifurcations (en particulier le lemme A7) intervient par contre dans le § 5 où l'on étudie les orbites de $P_{\mu, a, t}$ homoclines aux orbites périodiques hyperboliques de nombre de rotation p/q .

Nous concluons cet appendice par une description du diagramme complet des bifurcations de la famille $E(\alpha, \beta)$ dans le cas où γ, δ ne dépendent pas de α, β , et $\xi(\theta) = \cos(2\pi q\theta)$ (fig. A6); toujours sous ces hypothèses, nous décrivons également la distribution des nombres de rotation du « temps 1 » de $E(\alpha, \beta)$ sur ses courbes fermées invariantes (fig. A8). Les démonstrations se trouvent dans [7 bis].

NB. — La lecture sera grandement facilitée par la contemplation préalable de la figure A6.

Notations. — 1) Nous commettrons souvent l'abus consistant à noter $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$, $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$, $\xi(\theta) = \xi(\alpha, \beta, \theta)$, au lieu de $(\mu, a) \in \mathcal{A}$, $\gamma(\mu, a, t)$, $\xi(\mu, a, t, \theta)$, etc.

2) $E(\alpha, \beta)$ désignera également le champ de vecteurs (dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ ou son revêtement \mathbf{R}^2) définissant l'équation $E(\alpha, \beta)$.

3) $E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta)$ désignera l'équation

$$(A2) \quad E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta) \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = wy \\ \frac{dy}{dt} = \alpha' + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta), \end{cases}$$

où $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$, $\delta = \delta(\alpha, \beta)$, $\xi(\theta) = \xi(\alpha, \beta, \theta)$. $(E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta))$ ne coïncide en général avec $E(\alpha', 0)$ que si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = 0$.

4) On utilisera comme dans le § 4 les notations

$$(R) \quad \begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\gamma^2}, \\ \hat{\beta} = \frac{\beta}{2|\gamma|}, \\ \hat{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{|\gamma|}, \\ \hat{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{|\gamma|}, \end{cases}$$

(α_1 et α_2 sont définis en (A8) et (A9)).

On définit les sous-ensembles suivants de $\delta_{p/q}$:

$$(A3) \quad \begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_{p/q} = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0\}, \\ \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^0 = \left\{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha \geq \alpha_1 + |\beta| \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{|\gamma|}}\right\} = \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^+ \cap \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^-, \\ \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm = \left\{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha \geq \sup \left(\alpha_1 \mp \beta \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{|\gamma|}}, \alpha_1 + \frac{\beta^2}{4\gamma} \right) \right\}, \end{cases}$$

$$(A4) \quad \begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_{p/q}^0 = \left\{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha \leq \alpha_1 - |\beta| \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{|\gamma|}}\right\}, \\ \hat{\mathcal{P}}_{p/q} = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \alpha = \alpha_1\}. \end{cases}$$

On a les inclusions évidentes

$$(A5) \quad \hat{\mathcal{A}}_{p/q} \supset \mathcal{A}_{p/q}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^0 \supset \mathcal{B}_{p/q}^0, \quad \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm \supset \tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm.$$

[$\mathcal{A}_{p/q}$, $\mathcal{B}_{p/q}^0$, $\tilde{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm$ sont définis respectivement en (64) et (74).]

Dans les notations (R), les définitions précédentes deviennent

$$(A' 3) \quad \begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_{p/q} = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \hat{\alpha} \leq 0\}, \\ \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^0 = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2 \geq (|\hat{\beta}| + \sqrt{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2})^2\}, \\ \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^\pm = \left\{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \begin{array}{l} \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2 \geq \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \text{ si } \pm \hat{\beta} \geq 0 \\ \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2 \geq (\mp \hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2})^2 \text{ si } \pm \hat{\beta} \leq 0 \end{array} \right\}, \end{cases}$$

$$(A' 4) \quad \begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_{p/q}^0 = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2 \geq (-|\hat{\beta}| + \sqrt{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2})^2\}, \\ \hat{\mathcal{P}}_{p/q} = \{(\mu, a) \in \delta_{p/q}, \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}^2\}. \end{cases}$$

Lemme A1. — Si $(\alpha, \beta) \in \hat{\mathcal{A}}_{p/q}$, le flot de $E(\alpha, \beta)$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ ne laisse invariante aucune courbe fermée C^0 (orbite périodique ou réunion d'orbites et de singularités) homologue à $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{L}(\theta, y) = y^2 - (2\delta/w) \chi(\theta)$ la fonction définie au § 3.1. On constate que

$$[E(\alpha, \beta) \cdot \mathcal{L}] (\theta, y) = 2(\alpha + \beta y + \gamma y^2) y$$

est du signe de $(-\gamma)$ dès que $(\alpha, \beta) \in \hat{\mathcal{A}}_{p/q}$.

Puisqu'aux points où $\chi(\theta) = \inf \chi(\theta)$ (donc $\xi(\theta) = 0$), $y = 0$, le champ a pour composantes $(0, \alpha)$, on conclut comme dans le corollaire du lemme 7 si $\alpha \neq 0$; si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, le résultat découle du lemme suivant :

Lemme A2. — *Multiplié par le facteur intégrant $\exp(- (2\gamma/w) \theta)$, le champ $E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta)$ (relevé au revêtement universel \mathbf{R}^2 de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$) devient hamiltonien :*

$$(A6) \quad \left\{ \begin{array}{l} wye^{-\frac{2\gamma}{w}\theta} = \frac{\partial H}{\partial y}(\theta, y), \\ (\alpha' + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta)) e^{-\frac{2\gamma}{w}\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta, y), \quad \text{où} \\ H(\theta, y) = \frac{w}{2} (y^2 - h^{\alpha'}(\theta)) e^{-\frac{2\gamma}{w}\theta}, \\ h^{\alpha'}(\theta) = -\frac{\alpha'}{\gamma} + \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + \pi^2 q^2 w^2}} (\sin(2\pi q\theta) + t^2 \zeta(\theta)) \\ \quad = -\frac{\alpha'}{\gamma} + \frac{\delta}{\pi q w} (\sin(2\pi q\theta) + O(t^2)) \\ (\zeta(\theta) = \zeta(\alpha, \beta, \theta) \text{ est } (1/q)\text{-périodique et bornée indépendamment de } t). \end{array} \right.$$

La figure A1 donne le portrait de phase de $E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta)$ en fonction de $\alpha'[\alpha, \beta \text{ n'interviennent pas qualitativement}]$: c'est le *modèle d'élimination résonnante d'un couple de courbes invariantes*.

Démonstration. — Elle est évidente :

$$H(\theta, y) = \frac{w}{2} \left[y^2 + \frac{\alpha'}{\gamma} - \frac{2\delta}{w} e^{\frac{2\gamma}{w}\theta} \int_A^{\theta} \xi(u) e^{-\frac{2\gamma}{w}u} du \right] e^{-\frac{2\gamma}{w}\theta}.$$

Puisque $\xi(u) = \cos(2\pi qu) + t^2 \xi_1(u)$, où ξ_1 est $(1/q)$ -périodique, bornée indépendamment de t , et d'intégrale nulle sur une période (voir (63)), un simple développement en série de Fourier montre que

$$(2\delta/w) e^{\frac{2\gamma}{w}\theta} \int_A^{\theta} \xi(u) e^{-\frac{2\gamma}{w}u} du \\ = (\delta/\sqrt{\gamma^2 + \pi^2 q^2 w^2}) [\cos(2\pi q(\theta - \theta_0)) + t^2 \chi_1(\theta)],$$

où

$$\cos(2\pi q\theta_0) = -\gamma/\sqrt{\gamma^2 + \pi^2 q^2 w^2} = O(t^2),$$

$$\sin(2\pi q\theta_0) = (\pi q w)/\sqrt{\gamma^2 + \pi^2 q^2 w^2} = 1 + O(t^4),$$

d'où la conclusion.

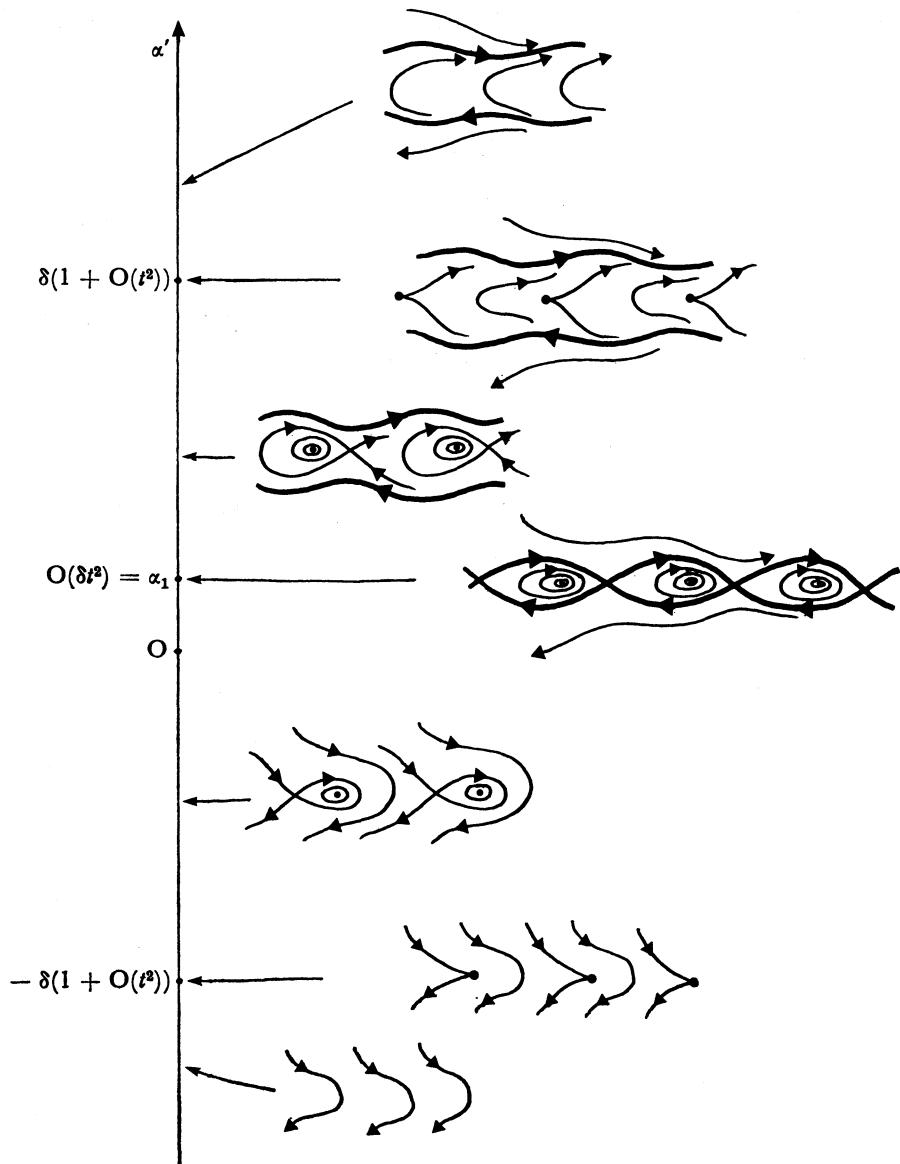


FIG. A1

La figure A1 est alors facile à obtenir : les orbites périodiques dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$ sont de la forme

$$(A7) \quad y = q_{\pm}^{\alpha'}(\theta) = \pm \sqrt{h^{\alpha'}(\theta)},$$

et existent donc tant que $\alpha' \geq \alpha_1$, où

$$(A8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1(\alpha, \beta) = \frac{\delta\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \pi^2 q^2 w^2}} \inf_{\theta \in \mathbf{T}^1} (\sin(2\pi q\theta) + t^2 \zeta(\theta)) \\ = \frac{|\delta\gamma|}{\pi q w} (1 + O(t^2)) = O(\delta t^2). \end{array} \right.$$

On a supposé que $\delta > 0$; dans le cas contraire, le rôle de α_1 est tenu par

$$(A9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \alpha_2(\alpha, \beta) = \frac{|\delta\gamma|}{\sqrt{\gamma^2 + \pi^2 q^2 w^2}} \sup_{\theta \in \mathbf{T}^1} (\sin(2\pi q\theta) + t^2 \zeta(\theta)) \\ = \frac{|\delta\gamma|}{\pi q w} (1 + O(t^2)) = \alpha_1(1 + O(t^2)). \end{array} \right.$$

Définition. — Si $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{B}}_{p/q}^+$, on note $\mathcal{A}_+(\alpha, \beta)$ le sous-anneau de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ bordé inférieurement (resp. supérieurement) par l'unique orbite périodique positive $y = q_+^{\alpha'}(\theta)$ de $E^{\alpha', 0}(\alpha, \beta)$ (resp. l'unique orbite périodique positive $y = q_+^{\alpha''}(\theta)$ de $E^{\alpha'', 0}(\alpha, \beta)$), où $\alpha'' \geq \alpha' \geq \alpha_1$ sont définis par

$$(A10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = |\gamma| \hat{\alpha}', \quad \alpha'' = |\gamma| \hat{\alpha}'', \\ \hat{\alpha}' = \begin{cases} -\hat{\alpha}_2 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2})^2 & \text{si } \hat{\beta} \leq 0, \\ \hat{\alpha}_1 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1})^2 & \text{si } \hat{\beta} \geq 0, \end{cases} \\ \hat{\alpha}'' = \begin{cases} \hat{\alpha}_1 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1})^2 & \text{si } \hat{\beta} \leq 0, \\ -\hat{\alpha}_2 + (\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} + \hat{\alpha}_2})^2 & \text{si } \hat{\beta} \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Lemme A3. — Si $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{B}}_{p/q}^+$, $E(\alpha, \beta)$ possède dans l'anneau $\mathcal{A}_+(\alpha, \beta)$ une unique orbite périodique (en fait $(1/q)$ -périodique) $y = p_+(\theta)$. Cette orbite périodique est attractive.

On laisse au lecteur le soin de définir $\mathcal{A}_-(\alpha, \beta) \subset \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_-$ lorsque $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{B}}_{p/q}^-$ et d'énoncer l'analogue du lemme 3.

Démonstration. — Elle est évidente : cherchons à écrire le plus petit sous-anneau de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ dont les bords soient de la forme $y = q_+^x(\theta)$, $x \geq \alpha_1$, dans lequel rentre le champ $E(\alpha, \beta)$. Les conditions sur α' et α'' sont manifestement

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'' \geq \alpha' \geq \alpha_1 \\ \alpha - \alpha' + \beta y'_M \geq 0 \quad \text{si } \beta \leq 0, \\ \alpha - \alpha'' + \beta y''_M \leq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'' \geq \alpha' \geq \alpha_1 \\ \alpha - \alpha' + \beta y'_M \geq 0 \quad \text{si } \beta \geq 0, \\ \alpha - \alpha'' + \beta y''_M \leq 0 \end{array} \right.$$

où y'_M, y''_M, y'_M, y''_M sont respectivement les inf et les sup de $q_+^{\alpha'}(\theta)$ et $q_+^{\alpha''}(\theta)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} y'_M &= \sqrt{\hat{\alpha}' - \hat{\alpha}_1}, \quad y''_M = \sqrt{\hat{\alpha}'' - \hat{\alpha}_1}, \quad y'_M = \sqrt{\hat{\alpha}' + \hat{\alpha}_2}, \\ y''_M &= \sqrt{\hat{\alpha}'' + \hat{\alpha}_2}. \end{aligned}$$

Des calculs évidents mais fastidieux fournissent alors la définition de $\mathcal{A}_+(\alpha, \beta)$ et les formules (A10).

Le cas où $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{B}}_{p/q}^-$ se déduit du précédent par la transformation

$$(y, \beta) \mapsto (-y, -\beta).$$

Quant à l'unicité, elle vient de ce que

$$q_+^{\alpha'}(\theta) \geq y_m' = \sqrt{\hat{\alpha}' - \hat{\alpha}_1} = \hat{\beta} + \sqrt{\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_1} \geq \hat{\beta} \quad (\text{si } \hat{\beta} \geq 0),$$

qui implique que, pour tout β , l'anneau $\mathcal{A}_+(\alpha, \beta)$ se trouve dans la région où le flot de $E(\alpha, \beta)$, dont la divergence vaut $\beta + 2\gamma y$, contracte les aires. Le raisonnement est le même pour $y < 0$, le flot dilatant les aires dans $\mathcal{A}_-(\alpha, \beta)$.

La figure A2 montre les courbes de niveau de la fonction $\alpha'(\alpha, \beta)$ dans $\mathcal{B}_{p/q}^+$ (celles de α'' s'obtiennent en les prolongeant respectivement du côté $\beta < 0$ et $\beta > 0$).

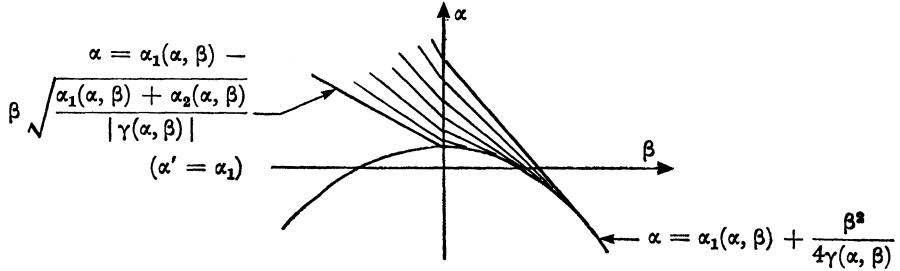


FIG. A2
(la figure est faite comme si $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ étaient constants)

Remarque. — La largeur de $\mathcal{A}_\pm(\alpha, \beta)$ tend vers 0 lorsque β tend vers 0. En effet, α' et α'' tendent tous deux vers α , et

$$q_+^{\alpha''}(\theta) - q_+^{\alpha'}(\theta) = \frac{\hat{\alpha}'' - \hat{\alpha}'}{(q_+^{\alpha''}(\theta) + q_+^{\alpha'}(\theta))}.$$

Lemme A4. — Si $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}_{p/q}^\pm$ et $\alpha \geq \alpha_1$, l'orbite périodique $y = p_\pm(\theta)$ donnée par le lemme A3 est la seule orbite périodique de $E(\alpha, \beta)$ homologue à $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_\pm$ tout entier.

Démonstration. — Supposons que $y = f_i(\theta)$, $i = 1, 2$, soient deux orbites périodiques distinctes de $E(\alpha, \beta)$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ pour un couple (α, β) appartenant à $\mathcal{B}_{p/q}^+$. On a

$$wf_i'(\theta) f_i(\theta) = \alpha + \beta f_i(\theta) + \gamma f_i(\theta)^2 + \delta \xi(\theta), \quad i = 1, 2,$$

et, par différence,

$$\frac{1}{2}w[\psi_1'(\theta) - \psi_2'(\theta)] = \beta[\sqrt{\psi_1(\theta)} - \sqrt{\psi_2(\theta)}] + \gamma[\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)],$$

où $\psi_i(\theta) = f_i(\theta)^2$, $i = 1, 2$. Mais $\psi_1 - \psi_2$ étant périodique, le premier membre s'annule; il existe donc $\tilde{\theta}$ tel que

$$\beta + \gamma [\sqrt{\psi_1(\tilde{\theta})} + \sqrt{\psi_2(\tilde{\theta})}] = 0, \quad \text{c'est-à-dire } f_1(\tilde{\theta}) + f_2(\tilde{\theta}) = -(\beta/\gamma).$$

Il ne peut donc exister deux telles orbites périodiques dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ si l'une d'elles est au-dessus de la courbe $y = -(\beta/\gamma)$.

Mais $p_+(\theta) \geq y'_m \geq -(\beta/\gamma)$ dès que $\alpha \geq \alpha_1$.

Lemme A5. — Si $(\alpha, \beta) \in \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, $E(\alpha, \beta)$ possède exactement deux orbites périodiques [qui deviennent « singulières » pour $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, 0)$], l'une dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$, l'autre dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_-$, et pas d'autre courbe fermée C^0 laissée invariante par son flot, qui soit homologue à $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$.

Démonstration. — Soit $(\alpha, \beta) \in \hat{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_1, 0)$; le lemme A4 montre qu'il y a exactement une orbite périodique $y = p_+(\theta)$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_+$ et une orbite périodique $y = p_-(\theta)$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_-$. Il reste à remarquer que, si $K_1(\theta, y) = y^2 - q_+^{\alpha_1}(\theta)^2$, on a

$$\begin{aligned} [E(\alpha, \beta) \cdot K_1](\theta, y) &= 2y[\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta \xi(\theta)] - 2wyq_+^{\alpha_1}(\theta)(q_+^{\alpha_1})'(\theta) \\ &= 2y[\alpha - \alpha_1 + \beta y + \gamma K_1(\theta, y)]. \end{aligned}$$

Le terme entre parenthèses est minoré par

$$|\beta| \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{|\gamma|}} + \beta y + \gamma K_1(\theta, y),$$

donc par $|\beta| \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{|\gamma|}} \pm \beta q_+^{\alpha_1}(\theta) \geq 0$

sur l'ensemble $K_1 = 0$.

Ajouté à la remarque que $E(\alpha, \beta)$ ne s'annule pas aux points singuliers de $K_1 = 0$ si $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_1, 0)$, ceci montre qu'aucune courbe fermée C^0 invariante homologue à $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ ne peut rencontrer le sous-ensemble $K_1 \leq 0$, ni *a fortiori* $y = 0$, ce qui termine la démonstration.

Supposons maintenant que $(\alpha, \beta) \in \hat{\mathcal{A}}_{p/q}^0$, défini en (A4).

Le terme $[\alpha - \alpha_1 + \beta y + \gamma K_1(\theta, y)]$ est majoré par

$$-|\beta| \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{|\gamma|}} + \beta y + \gamma K_1(\theta, y),$$

donc par $-|\beta| \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{|\gamma|}} \pm \beta q_+^{\alpha_1}(\theta)$

sur l'ensemble $K_1 = 0$.

Avec la remarque précédente, ceci montre qu'aucune courbe fermée invariante par le flot de $E(\alpha, \beta)$ ne peut rencontrer le sous-ensemble $K_1 = 0$, ni *a fortiori* le sous-ensemble $y = 0$.

Supposons enfin que $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_1, 0)$ appartienne à la courbe $\widehat{\mathcal{P}}_{p/q}$ définie en (A4). Les singularités de l'ensemble $K_1 = 0$ sont alors exactement les singularités hyperboliques (*) de $E(\alpha, \beta)$, et

$$[E(\alpha, \beta) \cdot K_1](\theta, y) = 2\beta y^2 \text{ sur } K_1 = 0.$$

On en déduit facilement qu'aucune connexion entre singularités hyperboliques de $E(\alpha, \beta)$ ne peut exister dans ces conditions.

On a en particulier démontré le

Lemme A6. — Si $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{A}}_{p/q}^0 \cup \widehat{\mathcal{P}}_{p/q} \cup \widehat{\mathcal{B}}_{p/q}^0$, $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_1, 0)$, aucune connexion n'existe entre les singularités hyperboliques de $E(\alpha, \beta)$.

Bien entendu, d'après le lemme A1, la conclusion vaut également si $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{A}}_{p/q}$, qui n'est pas entièrement contenu dans $\widehat{\mathcal{A}}_{p/q}^0$.

Notons I, II, III, IV les quatre composantes connexes du complémentaire dans $\widehat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$ de $\widehat{\mathcal{A}}_{p/q}^0 \cup \widehat{\mathcal{P}}_{p/q} \cup \widehat{\mathcal{B}}_{p/q}^0$ (fig. A3).

Notons également P le point défini par l'équation $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, 0)$, et

$$(A11) \quad H_{\pm} = \left\{ (\alpha, \beta) \left| \begin{array}{l} \text{les singularités hyperboliques de } E(\alpha, \beta) \text{ sont} \\ \text{connectées dans } \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}_{\pm} \end{array} \right. \right\}$$

Lemme A7. — H_+ et H_- sont respectivement contenus dans $P \cup II \cup IV$ et $P \cup I \cup III$; tout chemin allant du bord gauche au bord droit de $\widehat{C}_{p/q} \cap \delta_{p/q}$ rencontre à la fois H_+ et H_- .

Remarque. — Si γ, δ, ξ sont indépendants de (α, β) , H_+ et H_- sont des courbes connexes s'intersectant en P; l'adhérence de chacune d'elles rencontre chaque composante du bord de $\widehat{C}_{p/q}$ en un unique point.

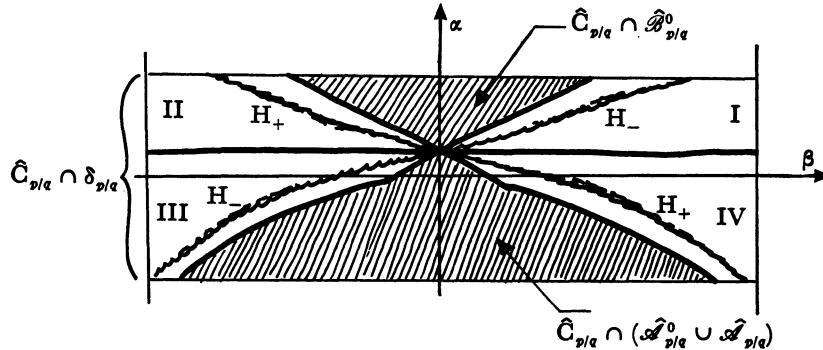


FIG. A3

(*) On entend ici par singularités hyperboliques les singularités de type *col.*

Démonstration. — Que $H_+ \cup H_-$ soit contenue dans la réunion de P , I, II, III, IV est une simple paraphrase du lemme A6.

La démonstration des inclusions $H_- \subset P \cup I \cup III$ et $H_+ \subset P \cup II \cup IV$ est une conséquence de la formule

$$[E(\alpha, \beta) \cdot K_1] (\theta, y) = 2y(\alpha - \alpha_1 + \beta y) \quad \text{sur } K_1 = 0,$$

détaillée sur la figure A4 :

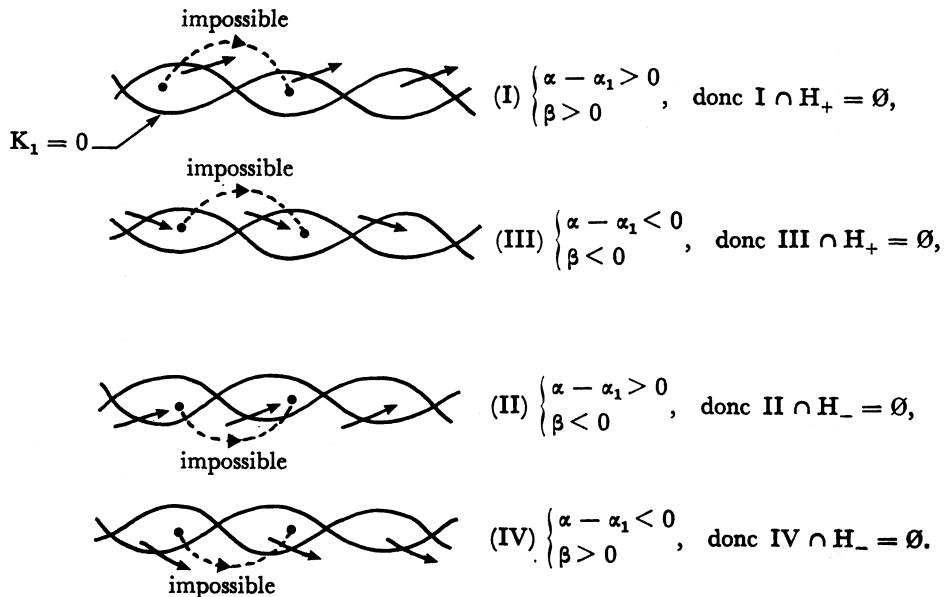


FIG. A4

La deuxième partie du lemme A7 se lit, *via* un argument de continuité, sur la figure A5 qui montre les positions respectives des variétés invariantes de deux singularités hyperboliques consécutives de $E(\alpha, \beta)$ pour différentes valeurs de (α, β) (les dessins correspondant aux valeurs de (α, β) dans $\hat{\mathcal{A}}_{p/q}^0$ ou $\hat{\mathcal{B}}_{p/q}^0$ ne sont pas formellement nécessaires mais ils aident l'intuition).

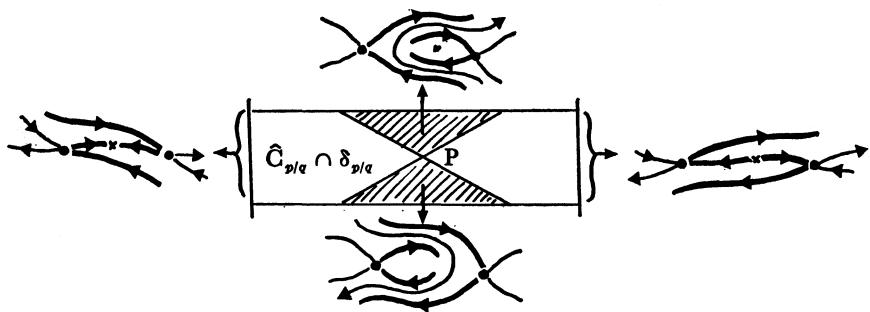


FIG. A5

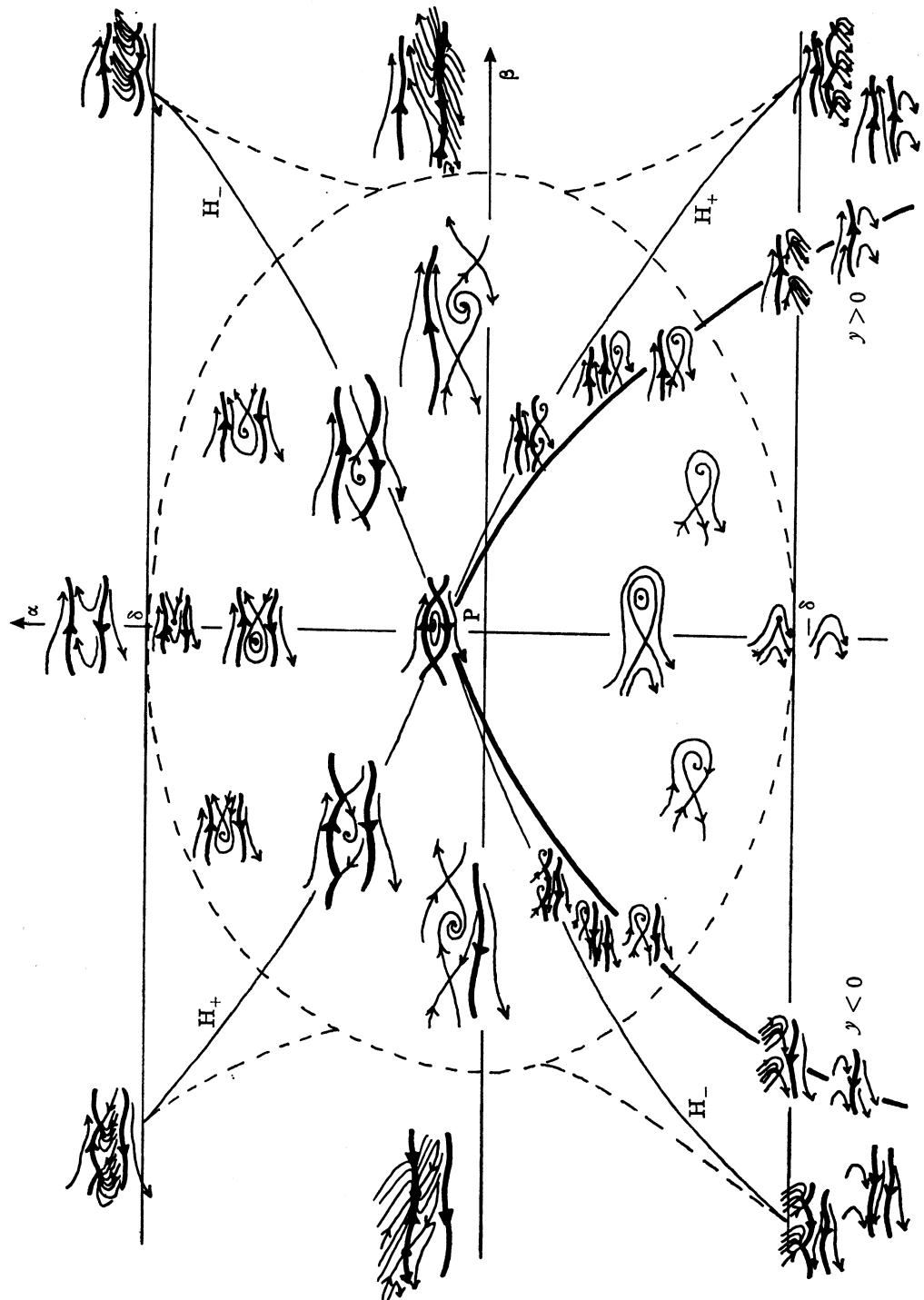


Fig. A6

L'affirmation de la remarque vient de ce que, si γ, δ, ξ sont indépendants de (α, β) , les bords de $\hat{C}_{p/q}$ sont de la forme $\alpha = \text{constante}$, et les dérivées par rapport à β des composantes de $E(\alpha, \beta)$ en un point fixé (θ, y) sont respectivement 0 et y . La pente du vecteur $E(\alpha, \beta)(\theta, y)$ croît donc de façon monotone avec β lorsque y est positif (négatif). Puisque, dans le cas considéré, la position des points singuliers de $E(\alpha, \beta)$ est indépendante de β , la conclusion est évidente. Il est raisonnable de penser que ceci est en fait la situation générale.

Ce qui suit est une description de la famille $E(\alpha, \beta)$ dans le cas où

- 1) $\gamma < 0$ et $\delta > 0$ sont indépendants de α, β .
- 2) $\xi(\theta) = \cos(2\pi q\theta)$.

Le diagramme de bifurcations est décrit dans la figure A6, tirée de [7 bis]. Pour compléter son intuition par des preuves le lecteur pourra consulter ce dernier article (le remplacement de q par 1 est bien entendu totalement inoffensif); il est également recommandé de consulter [2] et [10].

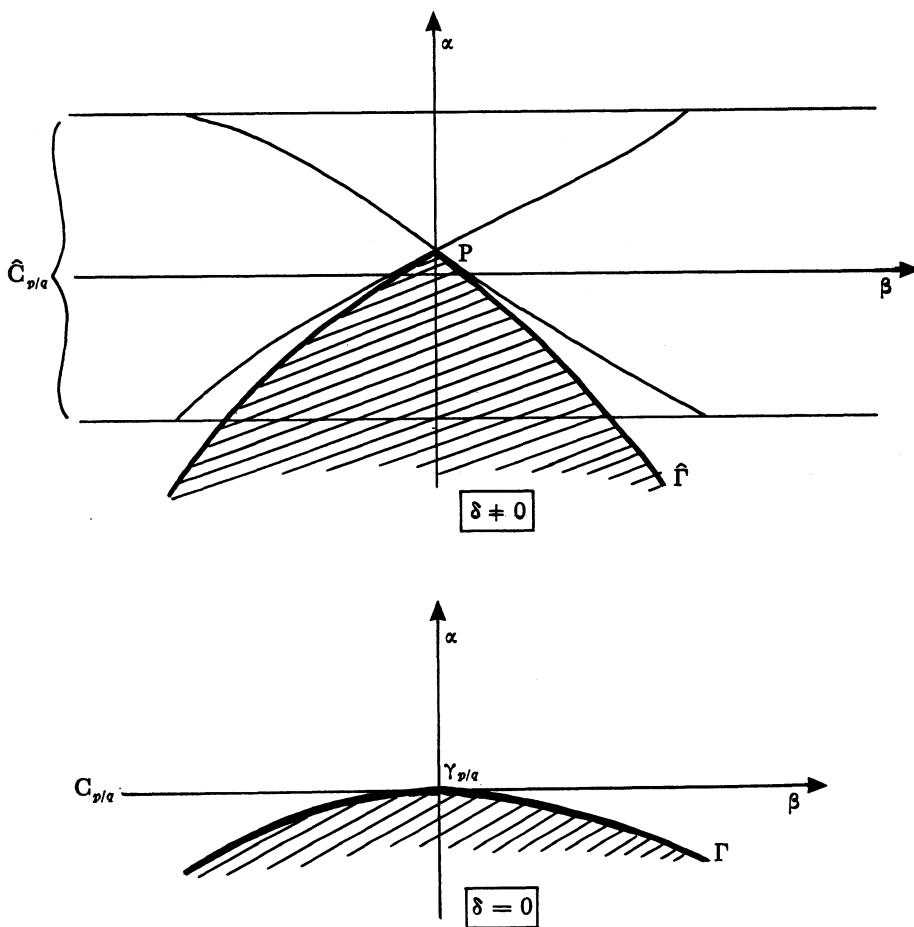


FIG. A7

Sur la figure A7, on compare le diagramme de bifurcations de la figure A6 avec celui qui correspondrait au cas $\delta = 0$, c'est-à-dire à une famille d'équations invariante par toutes les translations en θ (analogie des formes normales $N_{\mu, \alpha}$ invariantes par tout le groupe des rotations). Le rôle de la courbe Γ introduite dans ([5] fig. 4) est tenu par une courbe $\hat{\Gamma}$ dont nous ne savons pas si elle est vraiment singulière au point P .

Enfin, sur la figure A8 on a représenté dans le cas $\delta = 0$ (resp. $\delta \neq 0$) les ensembles C_ω (resp. C'_ω) correspondant à l'existence d'une courbe fermée C^0 homotope à $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$, invariante par le flot de $E(\alpha, \beta)$, sur laquelle le nombre de rotation du temps 1 soit $\omega - (p/q)$ (voir dans [7 bis] la monotonie en fonction de β de la période des orbites périodiques de $E(\alpha, \beta)$). On voit bien que la connexité de $C'_{p/q}$ ne tient qu'à un fil, détruit en général dans le passage de $E_{\mu, \alpha, \delta}$ à $P_{\mu, \alpha, \delta}$ (corollaire du théorème 2), ce qu'on a utilisé dans ([6], fin du § 1).

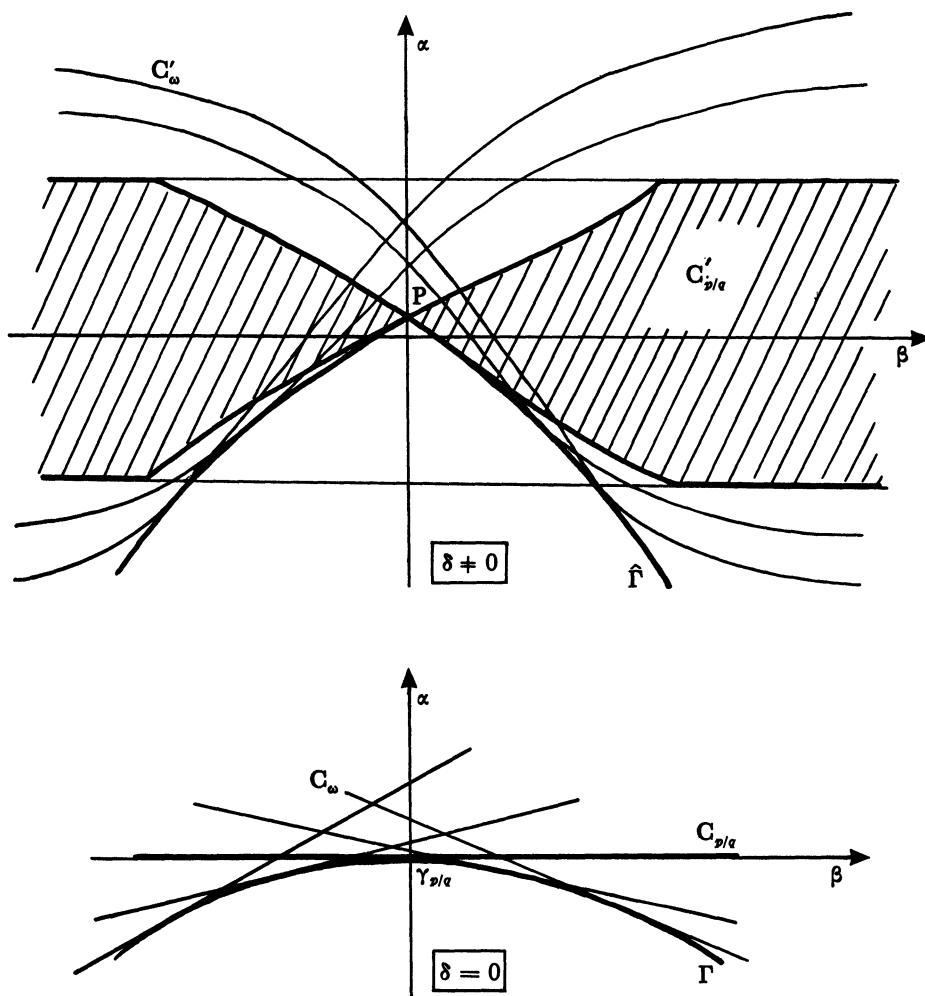


FIG. A8

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, 1980.
- [2] D. G. ARONSON, M. A. CHORY, G. R. HALL, R. P. McGEHEE, Bifurcations from an invariant circle for 2-parameter families of maps of the plane : a computer assisted study, *Commun. Math. Phys.*, **83** (1983), 303-354.
- [2 bis] G. D. BIRKHOFF, Sur certaines courbes fermées remarquables, *Bull. Soc. Math. de France*, **60** (1932), 1-26.
- [2 ter] P. BOYLAND et G. R. HALL, Invariant circles and the order structure of periodic orbits in monotone twist maps, *Topology*, à paraître.
- [2 quarto] H. BROER et F. TAKENS, *Formally symmetric normal forms and genericity*, Prépublication Université de Groningen, 1986.
- [3] A. CHENCINER, Points homoclines au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de \mathbb{R}^2 , *C.R.A.S.*, Série I, **294** (1982), 269-272.
- [4] A. CHENCINER, Bifurcations de difféomorphismes de \mathbb{R}^2 au voisinage d'un point fixe elliptique, in *Les Houches Session XXXVI*, 1981, *Comportement chaotique des systèmes déterministes*, Iooss, Helleman, Stora édit., North Holland, 1983, 273-348.
- [5] A. CHENCINER, Bifurcations de points fixes elliptiques. I : Courbes invariantes, *Publications Math. de l'I.H.E.S.*, **61** (1985), 67-127.
- [6] A. CHENCINER, Bifurcations de points fixes elliptiques. II : Orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants, *Inventiones Math.*, **80** (1985), 81-106.
- [7] A. CHENCINER, Resonant elimination of a couple of invariant closed curves in the neighborhood of a degenerate Hopf bifurcation of diffeomorphisms of \mathbb{R}^2 , *IIASA Workshop on dynamic processes*, Sopron, septembre 1985, *Springer L.N. in Economics and Mathematical Systems*, **287** (1987), 3-9.
- [7 bis] A. CHENCINER, A. GASULL, et J. LLIBRE, Une description complète du portrait de phase d'un modèle d'élimination résonnante, *C.R.A.S.*, Série I, **305** (1987), 623-626.
- [8] F. DUMORTIER, P. R. RODRIGUEZ, R. ROUSSARIE, Germs of diffeomorphisms in the plane, *Springer L.N.*, **902**, 1981.
- [8 bis] K. HOCKETT, P. HOLMES, Josephon's junction, annulus maps, Birkhoff attractors, Horseshoes and rotation sets, *Ergodic theory and dynamical systems*, **6** (1986), 205-239.
- [9] G. IOOSS, *Bifurcation of maps and applications*, North Holland, 1979.
- [10] J. R. JOHNSON, *Some properties of a 3-parameter family of diffeomorphisms of the plane near a transcritical Hopf bifurcation*, Thesis, University of Minnesota, July 1985.
- [10 bis] P. LEGALVEZ, Existence d'orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff, *Commun. Math. Phys.*, **106** (1986), 383-394.
- [11] Hans J. A. METZ, Hans LAUWERIER, *The dynamical behaviour of some parasitoid-host model : k-cycles and a transcritical Hopf bifurcation in a planar difference equation*, Preprint, juin 1984.
- [12] J. MOSER, Non existence of integrals for canonical systems of differential equations, *C.P.A.M.*, **8** (1955), 409-436.
- [13] J. MOSER, Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G. D. Birkhoff, in *Geometry and Topology*, Rio de Janeiro, 1976. *Springer L.N.*, **597** (1977), 464-494.
- [14] J. MOSER, Lectures on Hamiltonian systems, *Memoirs of the A.M.S.*, **81** (1968), 1-60.
- [15] E. ZEHNDER, Homoclinic points near elliptic fixed points, *C.P.A.M.*, **26** (1973), 131-182.

Département de Mathématiques,
 Université Paris VII,
 2, place Jussieu,
 75251 Paris Cedex 05.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1986.