JEAN-PIERRE SERRE

Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 12 (1962), p. 69-85

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1962__12__69_0>

ENDOMORPHISMES COMPLÈTEMENT CONTINUS DES ESPACES DE BANACH p-ADIQUES

par JEAN-PIERRE SERRE

Dans le mémoire de Dwork [3] sur la rationalité des fonctions zêta, un rôle essentiel est joué par la fonction analytique p-adique $\det(1-tu)$, où u est une certaine matrice infinie. Cette fonction analytique est une *fonction entière*, exactement comme dans la théorie classique de Fredholm. Il était naturel de poursuivre cette analogie et d'étendre à u la théorie spectrale de F. Riesz; c'est ce que vient de faire Dwork ([4], § 2). Dans ce qui suit, je montre que ces résultats proviennent simplement du fait que u est la matrice d'un endomorphisme *complètement continu* d'un espace de Banach; il se trouve en effet que, en analyse p-adique, les théories de Riesz et de Fredholm ont le même domaine de validité : il n'y a pas à distinguer entre applications nucléaires (ou « à trace ») et applications complètement continues.

1. Espaces de Banach.

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps valué complet, non archimédien; on note A l'anneau de valuation de K (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathrm{K}$ tels que $|x| \leqslant 1$), $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k le corps résiduel $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$, et G l'image de K^* dans $\mathbf{R}_+^*$ par l'application $x \to |x|$. On suppose en outre que K n'est pas discret, c'est-à-dire que $\mathrm{G} \neq \{1\}$.

Nous appellerons *espace de Banach* sur K un espace vectoriel normé complet sur K dont la norme vérifie l'inégalité ultramétrique

$$|x+y| \leqslant \operatorname{Sup}(|x|, |y|).$$

Si E est un tel espace, et si E_0 désigne l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $|x| \leqslant 1$, il est clair que E_0 est un A-module, et que la topologie de E est définie par les sous-modules $c_n \mathrm{E}_0$, où c_n est une suite d'éléments de A tendant vers 0.

Nous aurons à considérer la propriété suivante :

(N) — *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $|x|$ *appartient à l'adhérence* $\overline{\mathrm{G}}$ *de* G.

On observera que cette propriété est automatiquement vérifiée lorsque G n'est pas discret, c'est-à-dire lorsque la valuation de K n'est pas une « valuation discrète ». De plus, toute norme est équivalente à une norme vérifiant (N). En effet, si $|x|$ est la norme donnée, on définit $|x|'$ comme la borne inférieure des éléments $r \in \mathrm{G}$ qui sont $\geqslant |x|$, et l'on obtient ainsi une norme équivalente à l'ancienne et vérifiant (N).

Exemple. — Soit I un ensemble, et soit $c(\mathrm{I})$ l'ensemble des familles $x=(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$, $x_i\in \mathrm{K}$, telles que x_i tende vers o suivant le filtre des complémentaires des parties finies (ce que nous écrirons $x_i \to 0$ pour $i\to\infty$). Posons $|x| = \operatorname*{Sup}_{i\in \mathrm{I}} |x_i|$. On définit ainsi sur $c(\mathrm{I})$ une structure d'espace de Banach vérifiant la condition (N). Le module E_0 correspondant est l'ensemble des $x=(x_i)$ tels que $x_i\in\mathrm{A}$ pour tout $i\in\mathrm{I}$, et $x_i\to 0$.

Proposition **1** (cf. Monna [8] et Fleischer [5]). — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Alors tout espace de Banach* E *sur* K *qui vérifie la condition* (N) *est isomorphe (avec sa norme) à un espace* $c(\mathrm{I})$.

Tout revient à trouver dans E une famille $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ jouissant de la propriété suivante :

(B) — *Tout* $x\in\mathrm{E}$ *s'écrit de façon unique comme somme d'une série*

$$x = \sum_{i\in \mathrm{I}} x_i e_i, \quad \textit{avec } x_i \to 0 \textit{ et } |x| = \operatorname*{Sup}_{i\in\mathrm{I}} |x_i|.$$

Une telle famille sera appelée une *base orthonormale* de E. L'existence de bases orthonormales résulte du lemme suivant :

Lemme **1**. — *Soit* E_0 *l'ensemble des* $x\in\mathrm{E}$ *tels que* $|x|\leqslant 1$, *et soit* $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0/\mathfrak{m}\mathrm{E}_0$. *Pour qu'une famille* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *d'éléments de* E *soit une base orthonormale de* E, *il faut et il suffit que les* e_i *appartiennent à* E_0, *et que leurs images* $\overline{e}_i$ *dans* $\overline{\mathrm{E}}$ *forment une base* (au sens algébrique) *du k-espace vectoriel* $\overline{\mathrm{E}}$.

La nécessité est évidente (elle est vraie même si la valuation de K n'est pas discrète). Montrons la suffisance. Soit π une uniformisante de K (c'est-à-dire un générateur de $\mathfrak{m}$). Si $x\in\mathrm{E}_0$, soit $\overline{x}$ l'image de x dans $\overline{\mathrm{E}}$; on a $\overline{x} = \Sigma\xi_i\overline{e}_i$, $\xi_i\in k$, et en relevant les ξ_i dans A, on obtient des éléments $x_i^1\in\mathrm{A}$, nuls sauf un nombre fini d'entre eux, tels que

$$x = \Sigma x_i^1 e_i + \pi x^1, \quad \text{avec} \quad x^1\in\mathrm{E}_0.$$

En recommençant la même opération sur x^1, et en itérant, on obtient

$$x = \Sigma x_i e_i, \quad \text{avec} \quad x_i\in\mathrm{A}, \quad \text{et} \quad x_i\to 0,$$

cette décomposition étant unique. De plus, si $|x|=1$, on a nécessairement $|x| = \operatorname{Sup}|x_i|$, et par homothétie (ce qui est possible à cause de la condition (N)), on en déduit le même résultat pour tout $x\in\mathrm{E}$, *cqfd.*

Corollaire. — *Si la valuation de* K *est discrète, tout espace de Banach sur* K *est isomorphe comme espace vectoriel topologique à un espace* $c(\mathrm{I})$.

En effet, on a vu que l'on peut remplacer toute norme par une norme équivalente vérifiant la propriété (N), ce qui permet d'appliquer la proposition 1.

Ainsi, lorsque la valuation de K est discrète, *on peut se borner à considérer les espaces du type* $c(\mathrm{I})$. C'est ce que nous ferons le plus souvent dans ce qui suit.

Proposition **2**. — *Soit* F *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach* E *vérifiant la condition* (N). *Si la valuation de* K *est discrète, il existe un projecteur continu de* E *sur* F *de norme* $\leqslant 1$.

Soit $E' = E/F$. D'après la proposition 1, il existe une base orthonormale (e'_i) de E'; si l'on choisit dans E des représentants e_i des e'_i tels que $|e_i| \leqslant 1$, l'application $e'_i \to e_i$ se prolonge en une application linéaire continue $s : E' \to E$ de norme $\leqslant 1$ (cf. n° 2). L'espace de Banach E s'identifie alors, avec sa norme, au produit $F \times E'$, d'où la proposition.

Remarques. — 1) D'après Monna [8], la prop. 2 et le cor. à la prop. 1 sont encore vrais lorsque K est « maximalement complet » au sens de Kaplansky.

2) Soit $E = c(I)$, et soit F un sous-espace vectoriel fermé *de dimension finie* de E. Alors, même si la valuation de K n'est pas discrète, il existe un projecteur continu de E sur F de norme $\leqslant 1$, et l'espace E/F est isomorphe à un espace $c(J)$. Cela se voit par récurrence sur la dimension de F, en se ramenant au cas $\dim F = 1$, qui est immédiat.

2. Applications linéaires continues.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On munit $\mathscr{L}(E, F)$ de la norme habituelle

$$|u| = \operatorname{Sup}_{x \neq 0} \frac{|ux|}{|x|}.$$

Lorsque E vérifie la condition (N), on a $|u| = \operatorname{Sup}_{|x| \leqslant 1} |ux|$. On sait que $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace de Banach. Lorsque E et F vérifient la condition (N), il en est de même de $\mathscr{L}(E, F)$.

Supposons maintenant que $E = c(I)$, et soit $(e_i)_{i \in I}$ la base orthonormale canonique de E. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, posons $f_i = ue_i$. Les f_i forment une famille bornée d'éléments de F.

Proposition **3**. — *L'application qui associe à un élément* $u \in \mathscr{L}(E, F)$ *la famille* $(ue_i)_{i \in I}$ *est un isomorphisme de l'espace de Banach* $\mathscr{L}(E, F)$ *sur l'espace des familles bornées* $(f_i)_{i \in I}$ *d'éléments de* F, *muni de la norme* $\operatorname{Sup}_{i \in I} |f_i|$.

Soit $b_I(F)$ l'espace de Banach formé par ces familles bornées, et soit

$$\pi : \mathscr{L}(E, F) \to b_I(F)$$

l'application linéaire définie dans l'énoncé. Si $(f_i) \in b_I(F)$, on définit un élément $u \in \mathscr{L}(E, F)$ en posant

$$u(x) = \sum_{i \in I} x_i f_i \quad \text{si} \quad x = (x_i) \in E.$$

On obtient ainsi une application linéaire $\omega : b_I(F) \to \mathscr{L}(E, F)$. Il est immédiat que $\pi \circ \omega = 1$, $\omega \circ \pi = 1$, et que $|\pi| \leqslant 1$, $|\omega| \leqslant 1$, d'où la proposition.

Corollaire. — *Le dual* E' *de* E *est isomorphe à l'espace de Banach* $b(I)$ *des familles bornées d'éléments de* K.

On applique la proposition avec $F = K$.

Explicitons la proposition 3 lorsque F a une base orthonormale, autrement dit s'identifie à un espace $c(\mathrm{J})$. Les éléments $f_i \in \mathrm{F}$ s'écrivent alors sous la forme $(n_{ij})_{j\in \mathrm{J}}$, avec $n_{ij}\in \mathrm{K}$, $|n_{ij}|$ borné, et $n_{ij}\to 0$ pour i fixé et $j\to\infty$. On a :

$$|u| = \operatorname*{Sup}_{(i,j)} |n_{ij}|.$$

Si $x=(x_i)$ est un élément de $c(\mathrm{I})$, on a $ux=(y_j)$, avec

$$y_j = \sum_{i\in \mathrm{I}} n_{ij} x_i.$$

Nous dirons que (n_{ij}) est la *matrice* de u relativement aux bases orthonormales données de E et de F.

3. Applications linéaires complètement continues.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On dit que u est *complètement continu* s'il est adhérent dans $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ au sous-espace des applications linéaires continues *de rang fini*; on notera $\mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ le sous-espace de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ formé des éléments u complètement continus. Si E′ est un espace de Banach, et si $v\in\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}')$, le composé $v\circ u$ est complètement continu si u ou v est complètement continu; en particulier, $\mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ est un *idéal bilatère fermé* de l'algèbre $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$.

Supposons maintenant que $\mathrm{F}=c(\mathrm{J})$. Si $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on a, pour tout $x\in\mathrm{E}$,

$$ux=(w_j x),$$

où les w_j sont des éléments du *dual* E′ de E. On posera :

$$r_j(u)=|w_j|.$$

On a $|u| = \operatorname*{Sup}_{j\in \mathrm{J}} r_j(u) = \operatorname*{Sup}_{j\in\mathrm{J}} |w_j|$.

Si $\mathrm{E}=c(\mathrm{I})$ et si la matrice de u est (n_{ij}), on a :

$$w_j=(n_{ij})_{i\in\mathrm{I}} \quad \text{et} \quad r_j(u)=\operatorname*{Sup}_{i\in\mathrm{I}} |n_{ij}|.$$

Proposition **4**. — *Soit* $\mathrm{F}=c(\mathrm{J})$. *L'application qui, à tout* $u\in\mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, *associe la famille* $(w_j)_{j\in\mathrm{J}}$ *définie comme ci-dessus, est un isomorphisme de l'espace de Banach* $\mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *sur l'espace* $c_{\mathrm{E}'}(\mathrm{J})$ *des familles* $(w_j)_{j\in\mathrm{J}}$ *d'éléments de* E′ *tendant vers* 0, *muni de la norme* $\operatorname{Sup}|w_j|$.

Montrons d'abord que, si u est de rang fini, les w_j tendent vers 0. Il suffit de le vérifier lorsque u est de rang 1, donc de la forme $x\to v(x)f$, avec $v\in\mathrm{E}'$, $f\in\mathrm{F}$; dans ce cas, on a $w_j=x_j v$, où x_j est la j^{e} coordonnée de f, d'où $w_j\to 0$. Supposons maintenant que $u\in\mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et soit $u^{(n)}$ une suite d'applications de rang fini convergeant vers u. Si $u^{(n)}=(w_j^{(n)})$, les $w_j^{(n)}$ tendent uniformément vers les w_j, d'où le fait que $w_j\to 0$. Reste à montrer que, pour tout élément $(v_j)\in c_{\mathrm{E}'}(\mathrm{J})$, il existe un $u\in\mathscr{C}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec $w_j=v_j$. On définit u par la formule

$$ux=(v_j x), \quad x\in\mathrm{E}.$$

Il est clair que u est linéaire et continue. Si $\varepsilon>0$, il existe une partie finie T de J telle que $|v_j|\leqslant\varepsilon$ pour $j\in\mathrm{J}-\mathrm{T}$. Soit $u'=(v'_j)$, avec $v'_j=v_j$ si $j\in\mathrm{T}$ et $v'_j=0$ si $j\in\mathrm{J}-\mathrm{T}$.

L'application u' est de rang fini, et l'on a $|u-u'| \leqslant \varepsilon$. Donc u est limite d'applications de rang fini, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — Soit $u=(w_j)$ *un élément de* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Pour que* u *soit complètement continu, il faut et il suffit que* $w_j \rightarrow 0$, *c'est-à-dire que* $r_j(u) \rightarrow 0$.

C'est clair.

Proposition 5. — *Supposons que* K *soit localement compact. Soient* E *et* F *deux espaces de Banach sur* K, *et soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Pour que* u *soit complètement continu, il faut et il suffit que l'image par* u *de toute partie bornée de* E *soit relativement compacte dans* F.

La démonstration est la même que dans le cas classique. Si u est complètement continu, et si B est borné dans E, en utilisant le fait que u est limite d'applications de rang fini, on voit que $u(\mathrm{B})$ est précompact, donc relativement compact puisque F est complet. Inversement, si l'image par u de la boule unité B_1 de E est précompacte, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un sous-espace V de F de dimension finie tel que la distance de $u(\mathrm{B}_1)$ à V soit $\leqslant \varepsilon$. Supposons que E et F vérifient (N), ce qui est loisible, et soit $p: \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{V}$ un projecteur de norme $\leqslant 1$ (cf. prop. 2); on a $|u-p \circ u| \leqslant \varepsilon$, et comme $p \circ u$ est de rang fini, cela montre bien que u est complètement continu.

4. Le point de vue des produits tensoriels topologiques.

Soient E, F, X trois espaces de Banach. Notons $\mathscr{B}(\mathrm{E}, \mathrm{F}; \mathrm{X})$ l'espace de Banach des applications bilinéaires continues de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ dans X, muni de la norme usuelle. On appelle *produit tensoriel topologique* de E et de F un espace de Banach $\mathrm{E} \hat{\otimes} \mathrm{F}$, muni d'une application bilinéaire continue $\mathrm{E} \times \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{E} \hat{\otimes} \mathrm{F}$, notée $(x, y) \rightarrow x \hat{\otimes} y$, qui vérifie la propriété suivante :

(PTT) — *Pour tout espace de Banach* X, *l'application naturelle de* $\mathscr{L}(\mathrm{E} \hat{\otimes} \mathrm{F}, \mathrm{X})$ *dans* $\mathscr{B}(\mathrm{E}, \mathrm{F}; \mathrm{X})$ *est un isomorphisme.*

[Cette application fait correspondre à $w \in \mathscr{L}(\mathrm{E} \hat{\otimes} \mathrm{F}, \mathrm{X})$ l'élément W de $\mathscr{B}(\mathrm{E}, \mathrm{F}; \mathrm{X})$ défini par la formule $\mathrm{W}(x, y)=w(x \hat{\otimes} y)$.]

L'unicité, à isomorphisme unique près, de $\mathrm{E} \hat{\otimes} \mathrm{F}$ est claire : il « représente » le foncteur $\mathrm{X} \rightarrow \mathscr{B}(\mathrm{E}, \mathrm{F}; \mathrm{X})$. L'existence se démontre en introduisant sur $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ la « semi-norme »

$$|z|=\operatorname{Inf}(\operatorname{Sup}(|x_i| \cdot |y_i|)), \quad z \in \mathrm{E} \otimes \mathrm{F},$$

la borne inférieure étant prise sur tous les systèmes finis (x_i, y_i), $x_i \in \mathrm{E}$, $y_i \in \mathrm{F}$, tels que $z=\Sigma x_i \otimes y_i$. En séparant $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ pour cette semi-norme, et en complétant l'espace normé ainsi obtenu, on obtient $\mathrm{E} \hat{\otimes} \mathrm{F}$. La vérification est analogue à celle du cas classique (cf. Grothendieck [6]) et ne présente aucune difficulté. On peut d'ailleurs montrer (mais c'est plus délicat) que $z \rightarrow |z|$ est en fait une *norme* : l'application canonique $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{E} \hat{\otimes} \mathrm{F}$ est donc une *injection*. Nous ne donnerons pas la démonstration, car ce résultat est évident dans les cas particuliers que nous aurons à considérer.

Proposition **6**. — *Pour tout espace de Banach* L, *le produit tensoriel complété* $L\hat{\otimes}c(J)$ *s'identifie à l'espace* $c_L(J)$ *des familles* $(z_j)_{j\in J}$ *d'éléments de* L *tendant vers* o, *muni de la norme* $\mathrm{Sup}|z_j|$.

Soit (ε_j) la base orthonormale canonique de $c(J)$. Si $z=(z_j)$ est un élément de $c_L(J)$, posons

$$\pi(z)=\sum_{j\in J} z_j\hat{\otimes}\varepsilon_j,$$

la série étant convergente dans $L\hat{\otimes}c(J)$, puisque $|z_j\hat{\otimes}\varepsilon_j|\leqslant|z_j|$. On obtient ainsi une application linéaire

$$\pi : c_L(J)\rightarrow L\hat{\otimes}c(J),$$

et l'on a $|\pi|\leqslant 1$. D'autre part, l'application linéaire évidente $L\otimes c(J)\rightarrow c_L(J)$ se prolonge par continuité en une application linéaire

$$\omega : L\hat{\otimes}c(J)\rightarrow c_L(J).$$

Ici encore, on a $|\omega|\leqslant 1$. Comme on vérifie que $\omega\circ\pi=1$, $\pi\circ\omega=1$, cela achève la démonstration.

En appliquant la proposition précédente au dual E' d'un espace de Banach E, et en comparant avec la proposition 4, on obtient :

Corollaire. — *Soit* $F=c(J)$. *Pour tout espace de Banach* E, *le produit tensoriel complété* $E'\hat{\otimes}F$ *s'identifie à l'espace* $\mathscr{C}(E, F)$ *des applications linéaires complètement continues de* E *dans* F.

Bien entendu, cette identification transforme $E'\otimes F$ en l'espace des applications linéaires continues de rang fini de E dans F.

Remarque. — Dans la terminologie de la thèse de Grothendieck [6], le corollaire ci-dessus revient à dire qu'il y a identité entre *applications nucléaires* et *applications complètement continues*, et que la norme nucléaire coïncide avec la norme usuelle.

5. Le déterminant de Fredholm.

Soit tout d'abord L un module libre sur un anneau commutatif R, et soit f un endomorphisme de L tel que $f(L)$ soit *contenu dans un sous-module de type fini* de L. Soit M un sous-module libre de type fini de L, contenant $f(L)$, et facteur direct dans L (on peut prendre, par exemple, le sous-module engendré par une partie d'une base de L). Soit $f_M : M\rightarrow M$ la restriction de f à M. Le polynôme $\det(1-tf_M)$ est bien défini, et l'on vérifie aisément qu'il ne dépend pas du choix de M; on le note $\det(1-tf)$. Le coefficient de $-t$ dans $\det(1-tf)$ coïncide avec la *trace* de f, définie directement en considérant f comme un élément de $L'\otimes L$. Plus généralement, on a :

$$\det(1-tf)=1+c_1t+\ldots+c_mt^m+\ldots,$$

avec $c_m=(-1)^m\,\mathrm{Tr}(\wedge^m f)$, $\wedge^m f$ désignant la *puissance extérieure* m^e *de* f. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de L, et soit (n_{ij}) la matrice de f par rapport à cette base. On peut expliciter c_m de la manière suivante : si S est une partie finie de I, et si σ est une permutation de S, de signature ε_σ, on pose

$$n_{S,\sigma} = \prod_{i\in S} n_{i,\sigma i} \qquad \text{et} \qquad c_S = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma n_{S,\sigma},$$

la somme étant étendue à toutes les permutations σ de S. On a alors :

$$c_m = (-1)^m \sum_S c_S,$$

la somme étant cette fois étendue à toutes les parties S à m éléments de I.

Après ces préliminaires algébriques, revenons aux applications complètement continues. Soit E un espace de Banach, que nous supposerons *isomorphe à un espace* $c(\mathrm{I})$, et soit u un endomorphisme complètement continu de E. Nous nous proposons de définir le *déterminant de Fredholm* $\det(1-tu)$ de u. Supposons d'abord que $|u| \leqslant 1$. Soit E_0 l'ensemble des $x \in E$ tels que $|x| \leqslant 1$; on a $u(E_0) \subset E_0$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de A, contenu dans $\mathfrak{m}$. L'endomorphisme u définit par passage au quotient un endomorphisme $u_\mathfrak{a}$ de $E_\mathfrak{a} = E_0/\mathfrak{a}E_0$; si $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de E, les images des e_i dans $E_\mathfrak{a}$ forment une base (au sens algébrique) de $E_\mathfrak{a}$ considéré comme $A/\mathfrak{a}$-module. Si (n_{ij}) désigne la matrice de u par rapport à (e_i), et si $r_j(u) = \operatorname{Sup}_{i\in I} |n_{ij}|$, on a $r_j(u) \to 0$, d'où l'existence d'une partie finie $T(\mathfrak{a})$ de I telle que $n_{ij} \in \mathfrak{a}$ si $j \in I - T(\mathfrak{a})$. Il s'ensuit que l'image de $u_\mathfrak{a}$ est contenue dans un sous-module de type fini de $E_\mathfrak{a}$, et le polynôme $\det(1-tu_\mathfrak{a})$ est bien défini; ses coefficients appartiennent à $A/\mathfrak{a}$. Lorsque $\mathfrak{a}$ varie, ces polynômes forment un système projectif, et leur limite est une série formelle, notée $\det(1-tu)$, dont les coefficients tendent vers 0; elle ne dépend que du produit tu. Si maintenant u est un endomorphisme complètement continu quelconque de E, on choisit un scalaire c non nul tel que $|cu| \leqslant 1$; alors $\det(1-tcu)$ est défini, d'où aussi $\det(1-tu)$.

Proposition 7. — *a) Si la matrice de u par rapport à la base orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ est égale à (n_{ij}), on a*

$$\det(1-tu) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m, \qquad \text{avec} \quad c_m = (-1)^m \Sigma \varepsilon_\sigma n_{S,\sigma}$$

les notations étant les mêmes que ci-dessus.

b) La série $\det(1-tu)$ *est une fonction entière de t* (autrement dit, son rayon de convergence est infini).

c) Si $u_n \to u$, avec $u_n \in \mathscr{C}(E, E)$, alors $\det(1-tu_n)$ *tend vers* $\det(1-tu)$ *pour la topologie de la convergence simple des coefficients.*

d) Si u est de rang fini, $\det(1-tu)$ *coïncide avec le polynôme défini plus haut.*

Lorsque $|u| \leqslant 1$, la formule *a)* se déduit par passage à la limite de la formule écrite plus haut (dans le cas algébrique); le cas général en résulte par homothétie. Pour démontrer *b)*, notons $r_1, r_2, \ldots,$ la famille des nombres réels positifs $r_j(u) = \operatorname{Sup}_{i\in I} |n_{ij}|$, rangés par ordre décroissant. Si S est une partie à m éléments de I, chaque produit $n_{S,\sigma}$ fait intervenir m indices j distincts, d'où

$$|n_{S,\sigma}| \leqslant r_1 \ldots r_m \quad \text{et} \quad |c_m| \leqslant r_1 \ldots r_m.$$

Si M est un nombre positif quelconque, on a

$$|c_m| M^m \leqslant (r_1 M)(r_2 M) \ldots (r_m M)$$

et comme les $r_i M$ tendent vers 0, on en déduit $|c_m| M^m \to 0$, ce qui démontre *b)*. L'assertion *c)* résulte trivialement de *a)*. Enfin, supposons que u soit de rang fini; quitte à remplacer u par un multiple, on peut supposer que $|u| \leqslant 1$. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E contenant $u(E)$, et soient

$$V_0 = E_0 \cap V, \quad V_\mathfrak{a} = V_0/\mathfrak{a}V_0.$$

Comme V_0 est facteur direct dans E_0, $V_\mathfrak{a}$ est facteur direct dans $E_\mathfrak{a}$, et c'est un sous-module libre de $E_\mathfrak{a}$; le déterminant $\det(1-tu_\mathfrak{a})$ peut donc se calculer dans $V_\mathfrak{a}$, et comme $\det(1-tu) = \lim . \det(1-tu_\mathfrak{a})$, on voit que $\det(1-tu) = \det(1-tu_V)$, où u_V désigne la restriction de u à V, d'où *d)*.

Le fait que $\det(1-tu)$ soit une fonction entière permet de substituer à t n'importe quelle valeur dans K (ou dans une extension complète de K). En particulier, $\det(1+u)$ est défini pour tout $u \in \mathscr{C}(E, E)$.

Corollaire 1. — *Si u et v appartiennent à $\mathscr{C}(E, E)$, on a*

$$\det(1+u+v+uv) = \det(1+u) . \det(1+v).$$

On a plus généralement

$$\det((1-tu)(1-tv)) = \det(1-tu) . \det(1-tv),$$

comme on le voit en se ramenant au cas où $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, et en réduisant modulo $\mathfrak{a}$.

Corollaire 2. — *Soit* F *un espace de Banach isomorphe à un espace* $c(J)$. *Si* $u \in \mathscr{C}(E, F)$ *et* $v \in \mathscr{L}(F, E)$, *on a*

$$\det(1-tu \circ v) = \det(1-tv \circ u).$$

[Cette formule a un sens, puisque $u \circ v \in \mathscr{C}(F, F)$ et $v \circ u \in \mathscr{C}(E, E)$.]

Grâce à *c)* et *d)*, on peut supposer que u est de rang fini, et la formule est alors bien connue : elle résulte par exemple des égalités

$$\mathrm{Tr}(\wedge^m u \circ v) = \mathrm{Tr}(\wedge^m u \circ \wedge^m v) = \mathrm{Tr}(\wedge^m v \circ \wedge^m u) = \mathrm{Tr}(\wedge^m v \circ u).$$

La *trace* $\mathrm{Tr}(u)$ d'un élément u de $\mathscr{C}(E, E)$ est définie comme le coefficient de $-t$ dans $\det(1-tu)$, c'est-à-dire comme $\sum_{i \in I} n_{ii}$. On a $|\mathrm{Tr}(u)| \leqslant |u|$. L'isomorphisme $\mathscr{C}(E, E) \to E' \hat{\otimes} E$ transforme la trace en l'application linéaire canonique de $E' \hat{\otimes} E$ dans K.

Corollaire 3. — *Soit* $u \in \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. *Si la caractéristique du corps* K *est nulle, on a*

$$\det(1-tu) = \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Tr}(u^m)t^m/m\right).$$

Ici encore, cela se voit par passage à la limite à partir du cas des endomorphismes de rang fini.

Remarques. — 1) Les propriétés *c)* et *d)* montrent que $\det(1-tu)$ ne dépend pas de la *norme* de E, mais seulement de sa topologie.

2) On peut définir les *puissances extérieures complétées* de E, et associer à tout $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ des endomorphismes $\wedge^m u$ de ces puissances extérieures. Si u est complètement continu, il en est de même des $\wedge^m u$, et l'on a $c_m = (-1)^m \operatorname{Tr}(\wedge^m u)$; ce n'est qu'une autre façon d'exprimer *a)*.

3) La partie *c)* de la proposition 7 peut se préciser de la manière suivante :

Proposition **8**. — *Soit* (u_n) *une suite d'éléments de* $\mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ *convergeant vers un élément* u. *Alors* $\det(1-tu_n) \to \det(1-tu)$ *pour la topologie de la convergence uniforme sur toute partie bornée de la clôture algébrique* $\overline{\mathrm{K}}$ *de* K.

Soient (n_{ij}) et $(n_{ij}^{(n)})$ les matrices de u et de u_n; posons :

$$\det(1-tu) = \Sigma c_m t^m, \quad \det(1-tu_n) = \Sigma c_m^{(n)} t^m.$$

Soit ε un nombre réel tel que $0<\varepsilon<1$. Soient $r_1, \ldots, r_h$ ceux des $r_j(u)$ qui sont >1, et soit η un nombre >0 tel que

$$\eta r_1 \ldots r_h \leqslant \varepsilon.$$

Soit n un entier tel que $|u-u_n| \leqslant \eta$. On a $|n_{ij}-n_{ij}^{(n)}| \leqslant \eta$ pour tout couple (i,j); on en déduit que $r_j(u_n) = r_j(u)$ si $r_j(u) > \eta$ et que $r_j(u_n) \leqslant \eta$ sinon. Considérons alors un terme de la forme

$$n_{\mathrm{S}, \sigma} - n_{\mathrm{S}, \sigma}^{(n)} = \prod_{i \in \mathrm{S}} n_{i, \sigma i} - \prod_{i \in \mathrm{S}} n_{i, \sigma i}^{(n)}.$$

En l'écrivant comme somme de produits de différences, on obtient l'inégalité

$$|n_{\mathrm{S}, \sigma} - n_{\mathrm{S}, \sigma}^{(n)}| \leqslant \eta . \operatorname{Sup}_{i \in \mathrm{S}} . \prod_{\substack{j \in \mathrm{S} \\ j \neq i}} \operatorname{Sup}(r_j(u), r_j(u_n)).$$

En tenant compte des inégalités écrites plus haut, et du fait que $\eta<1$, on voit que $|n_{\mathrm{S}, \sigma} - n_{\mathrm{S}, \sigma}^{(n)}|$ est majoré par $\eta r_1 \ldots r_h$, donc par ε. En sommant, on en déduit

$$|c_m - c_m^{(n)}| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } m.$$

Il résulte de ce qui précède que $\det(1-tu_n)$ tend uniformément vers $\det(1-tu)$ *sur le disque unité* de $\overline{\mathrm{K}}$. Par homothétie, on en déduit le même résultat pour toute partie bornée de $\overline{\mathrm{K}}$, *cqfd.*

Lemme 2. — *Soit* $\mathrm{I} = \mathrm{I}' \cup \mathrm{I}''$ *une partition de* I. *Soit* u *un endomorphisme complètement continu de* $\mathrm{E} = c(\mathrm{I})$ *qui applique* $\mathrm{E}' = c(\mathrm{I}')$ *dans lui-même. Soit* u' *la restriction de* u *à* E' *et soit* u''

l'endomorphisme de $E'' = c(I'')$ *défini par passage au quotient par u. Alors u' et u'' sont complètement continus, et l'on a*

$$\det(1-tu) = \det(1-tu').\det(1-tu'').$$

Cela résulte immédiatement de la définition.

Proposition 9. — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soit*

$$0 \to E_0 \xrightarrow{d} E_1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} E_n \to 0,$$

une suite exacte d'espaces de Banach, les applications d étant linéaires et continues. Pour tout i, soit u_i *un endomorphisme complètement continu de* E_i ; *supposons que* $d \circ u_i = u_{i+1} \circ d$ *pour* $0 \leqslant i < n$. *On a alors*

$$\prod_{i=0}^{i=n} \det(1-tu_i)^{(-1)^i} = 1.$$

Soit $V_i = d(E_i)$; puisque V_i est le noyau de d : $E_{i+1} \to E_{i+2}$, c'est un sous-espace fermé de E_{i+1}, et en particulier c'est un espace de Banach. On a des suites exactes :

$$0 \to V_{i-1} \to E_i \to V_i \to 0.$$

D'après la proposition 2 (applicable puisque la valuation de K est discrète), V_{i-1} est facteur direct dans E_i, et chacun des espaces E_i, V_i est de la forme $c(I)$. On peut donc appliquer le lemme 2 à l'endomorphisme u_i de E_i et aux endomorphismes v_{i-1} et v_i définis par u_i sur V_{i-1} et sur V_i. On en déduit que $\det(1-tu_i) = \det(1-tv_i).\det(1-tv_{i-1})$ d'où aussitôt la formule à démontrer.

6. La résolvante de Fredholm.

Nous conservons les notations et hypothèses du numéro précédent : E désigne l'espace de Banach $c(I)$, u un élément de $\mathscr{C}(E, E)$, (n_{ij}) la matrice de u, et l'on pose

$$\det(1-tu) = 1 - \mathrm{Tr}(u)t + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m.$$

La *résolvante de Fredholm* de u est par définition la série formelle

$$P(t, u) = \frac{\det(1-tu)}{1-tu} = \sum_{m=0}^{\infty} v_m t^m.$$

Les v_m sont des éléments de $\mathscr{L}(E, E)$. On les calcule au moyen des formules de récurrence

$$v_0 = 1, \quad v_m = c_m + uv_{m-1}.$$

Ces formules montrent en particulier que les v_m sont des *polynômes en u.*

Proposition 10. — *La résolvante de Fredholm* $P(t, u)$ *est une fonction entière de t à valeurs dans* $\mathscr{L}(E, E)$. *De façon plus précise, pour tout nombre réel* M, *on a* $\lim. |v_m| M^m = 0$.

Il s'agit de majorer $|v_m|$. Pour cela, soit $r_1, \dots, r_m, \dots$, la suite décroissante de nombres réels introduite dans la démonstration de la proposition 7. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme **3**. — *On a* $|v_m| \leqslant r_1 \ldots r_m$.

Cette majoration suffit pour la démonstration de la proposition 10. En effet, les r_iM tendent vers 0, et il en est donc de même de leurs produits $(r_1\mathrm{M})\ldots(r_m\mathrm{M})$.

Reste à démontrer le lemme 3, ce que nous ferons en trois étapes :

a) *L'espace* E *est de dimension finie.* — Soit $n = \dim \mathrm{E}$. Les formules de Cramer montrent que la résolvante de Fredholm $\mathrm{P}(t, u)$ a pour matrice la *matrice adjointe* de $1-tu$: les coefficients de cette matrice sont égaux, au signe près, aux mineurs d'ordre $n-1$ de la matrice

$$(\delta_{ij} - tn_{ij}).$$

Le coefficient de t^m dans un tel terme est une combinaison linéaire, à coefficients ± 1, de mineurs d'ordre m de la matrice (n_{ij}), donc aussi une combinaison linéaire, à coefficients ± 1, de produits

$$n_{i_1 j_1} \ldots n_{i_m j_m},$$

où les indices $j_1, \ldots, j_m$ sont *deux à deux distincts*. La valeur absolue d'un tel produit est donc $\leqslant r_1 \ldots r_m$, d'où le même résultat pour tous les coefficients de la matrice de v_m, ce qui signifie bien que $|v_m| \leqslant r_1 \ldots r_m$.

b) *Il existe une partie finie* J *de* I *telle que* $n_{ij} = 0$ *si* j *n'appartient pas à* J. — Soit E^{J} le sous-espace de E engendré par les $(e_i)_{i \in \mathrm{J}}$; l'hypothèse faite sur u signifie que $u(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}^{\mathrm{J}}$. Notons u^{J} la restriction de u à E^{J}; on a $\det(1 - tu^{\mathrm{J}}) = \det(1 - tu)$, ce qui montre que la résolvante de Fredholm $\Sigma v_m^{\mathrm{J}} t^m$ de u^{J} a pour coefficients les restrictions v_m^{J} des v_m à E^{J}. En appliquant a) à u^{J}, on obtient

$$|v_m^{\mathrm{J}}| \leqslant r_1(u^{\mathrm{J}}) \ldots r_m(u^{\mathrm{J}}) \leqslant r_1 \ldots r_m.$$

D'autre part, il est clair que $|v_m|$ est la borne supérieure des $|v_m^{\mathrm{J}}|$ quand J varie. D'où l'inégalité cherchée.

c) *Cas général.* — Soit J une partie finie de I, et soit $u(\mathrm{J})$ l'endomorphisme de E dont la matrice (n'_{ij}) est donnée par les formules :

$$n'_{ij} = n_{ij} \quad \text{si} \quad j \in \mathrm{J}, \qquad n'_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad j \in \mathrm{I} - \mathrm{J}.$$

L'endomorphisme $u(\mathrm{J})$ vérifie la condition b); si l'on note $\Sigma v_m(\mathrm{J}) t^m$ sa résolvante de Fredholm, on a donc :

$$|v_m(\mathrm{J})| \leqslant r_1(u(\mathrm{J})) \ldots r_m(u(\mathrm{J})) \leqslant r_1 \ldots r_m.$$

Quand J varie, les $u(\mathrm{J})$ tendent vers u; de même, les formules de récurrence définissant les v_m montrent que $v_m(\mathrm{J}) \to v_m$. On en déduit bien

$$|v_m| \leqslant r_1 \ldots r_m, \quad \textit{cqfd}.$$

Remarque. — La démonstration ci-dessus établit en fait les inégalités

$$|c_m| \leqslant |\wedge^m u|, \quad |v_m| \leqslant |\wedge^m u| \quad \text{et} \quad |\wedge^m u| \leqslant r_1 \ldots r_m.$$

7. La théorie de Riesz.

Soit, comme ci-dessus, u un endomorphisme complètement continu de l'espace de Banach $E=c(I)$, soit $H(t)=\det(1-tu)$ son déterminant de Fredholm, et soit $P(t, u)$ sa résolvante de Fredholm. On a tout d'abord :

Proposition **11**. — *Soit a un élément du corps* K. *Pour que $1-au$ soit inversible dans $\mathscr{L}(E, E)$, il faut et il suffit que* $H(a)\neq 0$.

Si $H(a)\neq 0$, la relation

$$H(a)=(1-au).P(a, u)=P(a, u).(1-au)$$

montre que $1-au$ est inversible. Réciproquement, supposons que $1-au$ soit inversible, et écrivons son inverse sous la forme $1-v$. En écrivant que $(1-au)(1-v)=1$, on trouve $v=-au+auv$, ce qui montre que v est complètement continu. Le déterminant $\det(1-v)$ est donc défini, et le corollaire 1 à la proposition 7 montre que

$$\det(1-au).\det(1-v)=1$$

ce qui démontre que $\det(1-au)\neq 0$.

Proposition **12**. — *Soit $a\in$ K un zéro d'ordre h du déterminant de Fredholm $H(t)$. L'espace* E *se décompose de façon unique en somme directe topologique de sous-espaces fermés stables par u*

$$E=N(a)+F(a)$$

jouissant des propriétés suivantes :

(i) $1-au$ *est nilpotent sur* $N(a)$.

(ii) $1-au$ *est inversible sur* $F(a)$.

De plus, la dimension de $N(a)$ est finie et égale à h.

Si $f=\sum_{m=0}^{\infty} e_m t^m$ est une série formelle, et si s est un entier $\geqslant 0$, nous poserons

$$\Delta^s f=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+s}{s}e_{m+s}t^m.$$

Si K est de caractéristique zéro, on a $\Delta^s f=\frac{1}{s!}\frac{d^s f}{dt^s}$. Les « dérivées divisées » Δ^s transforment une fonction entière en une fonction entière. Dire que a est un zéro d'ordre h de $H(t)$ signifie que l'on a

$$\Delta^s H(a)=0 \quad \text{pour} \quad s<h \quad \text{et} \quad \Delta^h H(a)=c\neq 0.$$

Considérons alors l'identité :

$$(1-tu).P(t, u)=H(t).$$

En lui appliquant l'opérateur Δ^s, on trouve :

$$(1-tu)\Delta^s P(t, u)-u\Delta^{s-1}P(t, u)=\Delta^s H(t).$$

Posons $v_s = \Delta^s \mathrm{P}(a, u)$. En faisant $t = a$ dans les identités précédentes, on obtient les relations :

$$\begin{aligned}
(1 - au) \cdot v_0 &= 0 \\
(1 - au) \cdot v_1 - u \cdot v_0 &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
(1 - au) \cdot v_{h-1} - u \cdot v_{h-2} &= 0 \\
(1 - au) \cdot v_h - u \cdot v_{h-1} &= c, \text{ avec } c \neq 0.
\end{aligned}$$

On en déduit, par récurrence sur s, que $(1 - au)^{s+1} v_s = 0$ pour $s < h$. D'autre part, si l'on pose :

$$e = c^{-1}(1 - au) \cdot v_h \quad \text{et} \quad f = -c^{-1} u \cdot v_{h-1}$$

la dernière équation montre que $e + f = 1$. De plus, on a :

$$fe^h = 0, \quad \text{puisque} \quad (1 - au)^h v_{h-1} = 0.$$

[Noter que, puisque les v_s sont des séries de puissances de u, tous les endomorphismes considérés commutent entre eux.]

En développant l'équation $(e + f)^h = 1$, on trouve :

$$e^h + (he^{h-1} f + \ldots + hef^{h-1} + f^h) = 1.$$

Posons alors :

$$p = e^h, \quad q = he^{h-1} f + \ldots + hef^{h-1} + f^h.$$

On a $p + q = 1$ et $pq = 0$ puisque $fe^h = 0$. Il s'ensuit que $p^2 = p$, $q^2 = q$: les endomorphismes p et q sont des *projecteurs* et si l'on pose $\mathrm{N}(a) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q)$, $\mathrm{F}(a) = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$, l'espace E se décompose en somme directe

$$\mathrm{E} = \mathrm{N}(a) + \mathrm{F}(a).$$

On a $(1 - au)^h q = 0$, ce qui montre que $1 - au$ est *nilpotent sur* $\mathrm{N}(a)$; de même, la formule $(1 - au)^h (v_h)^h = c^h p$ montre que $1 - au$ *est inversible sur* $\mathrm{F}(a)$, son inverse étant $c^{-h}(1 - au)^{h-1}(v_h)^h$. On a donc démontré l'existence de la décomposition cherchée; son unicité est immédiate. Reste à montrer que $\dim \mathrm{N}(a) = h$. Soit W un sous-espace de dimension finie de $\mathrm{N}(a)$, stable par u. D'après la remarque 2 du n° 1, le sous-espace W est facteur direct dans E, et E/W est de la forme $c(\mathrm{J})$. On peut appliquer le lemme 2 du n° 6, et l'on en déduit que $\det(1 - tu)$ est divisible par $\det(1 - tu_{\mathrm{W}}) = (1 - ta^{-1})^{\dim \mathrm{W}}$. Il s'ensuit que $\dim \mathrm{W} \leqslant h$, et ceci étant vrai pour tout W, on voit que l'on a nécessairement $\dim \mathrm{N}(a) \leqslant h$. Appliquant encore le lemme 2, on obtient $\det(1 - tu) = (1 - ta^{-1})^{\dim \mathrm{N}(a)} \mathrm{H}'(t)$, où $\mathrm{H}'(t)$ est le déterminant de Fredholm de la restriction de u à $\mathrm{F}(a)$. D'après la proposition 11, on a $\mathrm{H}'(a) \neq 0$, et comme a est zéro d'ordre h de $\mathrm{H}(t)$, on en déduit finalement que $\dim \mathrm{N}(a) = h$, *cqfd*.

Corollaire (« alternative de Fredholm »). — *Pour tout* $a \in K$, *l'image de* $1-au$ *est un sous-espace fermé de codimension finie de* E; *cette codimension est égale à la dimension du noyau de* $1-au$.

C'est évident sur la décomposition $E = E(a) + F(a)$.

Remarques. — 1) Lorsque K est *localement compact*, l'existence de la décomposition $E = N(a) + F(a)$ peut aussi se démontrer, sans faire intervenir la théorie de Fredholm, en procédant exactement comme Riesz (cf. par exemple Dieudonné [2], Chap. XI, §§ 3, 4, dont les démonstrations s'appliquent sans changement).

2) La théorie classique de Fredholm fournit des formules explicites (à la Cramer) pour la résolution des équations du type

$$x - a.u(x) = y, \quad y \in E$$

cf. par exemple l'exposé de Sikorski [9]. Il est très probable que ces formules restent valables dans le cas considéré ici. (Par contre, on ne peut pas suivre la présentation de la théorie donnée par Grothendieck [7], ne serait-ce qu'à cause des nombreuses factorielles qu'il a introduites en dénominateur.)

3) Ce qui précède ne concerne qu'une racine a de $H(t)$ *qui appartient* au corps K. Plus généralement, soit a une racine quelconque de $H(t)$, soient $a^{(i)}$ ses conjuguées, et formons le polynôme

$$Q(t) = \Pi\,(1 - a^{(i)}t),$$

chaque $a^{(i)}$ étant répété un nombre de fois égal à sa multiplicité. Les coefficients de Q appartiennent à K. On a alors une décomposition analogue à celle de la proposition 12 :

$$E = N(Q) + F(Q),$$

avec $Q(u)$ nilpotent (resp. inversible) sur $N(Q)$ (resp. sur $F(Q)$). Cela se voit en écrivant $Q(u)$ sous la forme $1-u'$, avec $u' \in \mathscr{C}(E, E)$, et en appliquant la proposition 12 à u' et à $a = 1$. On obtient ainsi une théorie en tout point analogue à celle de Riesz.

Signalons une application simple de ce qui précède :

Proposition **13**. — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soient* E *et* F *deux espaces de Banach sur* K, *soient* $u \in \mathscr{C}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(E, F)$, *et supposons que* v *soit surjectif. Alors l'image de* $u+v$ *est un sous-espace fermé de codimension finie de* F.

(Dans le cas classique, c'est un résultat de Schwartz, cf. [1], exposé 16.)

Soit N le noyau de v; d'après le théorème de Banach, v définit par passage au quotient un isomorphisme de E/N sur F. D'après la proposition 2 du n° 1, il existe dans E un supplémentaire fermé F′ de F. Comme $(u+v)(E)$ contient $(u+v)(F')$, il suffit de prouver que $(u+v)(F')$ est un sous-espace fermé de codimension finie de F; on est donc ramené au cas où v est un isomorphisme, donc aussi au cas où $v = 1$; en appliquant alors le corollaire à la proposition 12 avec $a = -1$, on obtient le résultat cherché.

Corollaire. — *Soient* $C = (C_n, d_n)$ *et* $C' = (C'_n, d'_n)$ *deux complexes, les* C_n, C'_n *étant des espaces de Banach, et les applications bords*

$$d_n : C_{n+1} \to C_n, \qquad d'_n : C'_{n+1} \to C'_n$$

étant linéaires et continues. Soit $u : C' \to C$ *une application linéaire complètement continue commutant avec les applications bords. Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soit n un entier tel que u applique* $H_n(C')$ *sur* $H_n(C)$; *alors* $H_n(C)$ *est de dimension finie.*

Soit Z_n (resp. Z'_n) le sous-espace des cycles de degré n de C (resp. C'); l'application u définit une application linéaire

$$\overline{u} : Z'_n \to Z_n$$

qui est complètement continue. L'hypothèse faite sur les H_n équivaut à dire que l'application

$$(d_n, \overline{u}) : C_{n+1} \times Z'_n \to Z_n$$

est surjective. D'après la proposition 13, l'image de $(d_n, \overline{u}) - (0, \overline{u})$ est un sous-espace de codimension finie de Z_n; comme cette image est égale à $d_n(C_{n+1})$, cela signifie bien que $H_n(C)$ est de dimension finie.

8. Dualité.

Soit E (resp. F) un espace de Banach, et soit E' (resp. F') son dual. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le *transposé* u' de u est défini; c'est un élément de $\mathscr{L}(F', E')$.

Proposition **14**. — *Si u est complètement continu, il en est de même de son transposé.*

Si u est complètement continu, il existe une suite u_n d'applications continues de rang fini tendant vers u. Comme $|u' - u'_n| \leqslant |u - u_n|$, la suite des u'_n tend vers u', et les u'_n sont de rang fini. Donc u' est complètement continu.

Exemple. — Soit $E = c(I)$, soit $F = c(J)$. On a $E' = b(I)$, $F' = b(J)$. Soit (n_{ij}) une matrice bornée telle que n_{ij} tende vers 0 quand $j \to \infty$, la convergence étant *uniforme* par rapport à i. Si $y = (y_j)_{j \in J}$ appartient à $b(J)$, posons

$$u'y = (x_i)_{i \in I}, \qquad \text{avec } x_i = \sum_{j \in J} n_{ij} y_j.$$

On définit ainsi une application linéaire $u' : F' \to E'$ qui est *complètement continue*. En effet, c'est la transposée d'une application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ qui est complètement continue en vertu du cor. à la prop. 4.

Proposition **15**. — *Supposons que la valuation de* K *soit discrète. Soit* $u \in \mathscr{C}(E, E)$. *Alors* $\det(1 - tu) = \det(1 - tu')$ *et, pour tout* $a \in K$, *la décomposition de Riesz de* E' *est duale de celle de* E.

(Noter que, puisque la valuation de K est discrète, E et E' sont isomorphes à des espaces $c(I)$ et $c(I')$; en particulier, $\det(1 - tu)$ et $\det(1 - tu')$ sont bien définis.)

Soit $E = E(a) + F(a)$ la décomposition de Riesz de E; par dualité, on obtient une décomposition $E' = E(a)' + F(a)'$ de E', et comme $1 - au$ est nilpotent (resp. inversible) sur $E(a)$ (resp. sur $F(a)$), son transposé $1 - au'$ est nilpotent (resp. inversible) sur $E(a)'$ (resp. sur $F(a)'$). Donc $E' = E(a)' + F(a)'$ est la décomposition de Riesz de E' relative à a.

On a un résultat analogue pour les racines de $\det(1 - tu)$ qui ne sont pas dans le corps K (cf. remarque 3 du n° 7). On en déduit que $\det(1 - tu)$ et $\det(1 - tu')$ ont les mêmes racines, avec les mêmes multiplicités. D'après la théorie des fonctions entières p-adiques (cf. Dwork [4], § 1) cela entraîne que $\det(1 - tu) = \det(1 - tu')$.

[On peut aussi commencer par montrer que $\det(1 - tu) = \det(1 - tu')$ quand u est *de rang fini*, et passer à la limite.]

9. Exemples tirés de [4].

Nous supposerons dans ce numéro que la valuation de K est *discrète*; on a donc $x = a^{v(x)}$, avec $a < 1$, v étant un homomorphisme de K^* sur un sous-groupe discret de $\mathbf{R}$.

Soient n et d deux entiers $\geqslant 1$, et soit $X = (X_0, \ldots, X_{n+1})$ un système de $n+2$ indéterminées; soit T la partie de $\mathbf{N}^{n+2}$ formé des $u = (u_0, \ldots, u_{n+1})$ tels que $du_0 = u_1 + \ldots + u_{n+1}$ (nous suivons ici les conventions du § 3 de [4], plutôt que celles du § 2). Si $u \in T$ on note X^u le monôme $X_0^{u_0} \ldots X_{n+1}^{u_{n+1}}$. Soit b un élément de $\mathbf{R}$ tel qu'il existe $\pi \in K$ avec $v(\pi) = b$. Soit $L(b)$ l'ensemble des séries

$$f = \sum_{u \in T} a_u X^u, \quad a_u \in K$$

telles que $v(a_u) + bu_0$ soit borné inférieurement, ou, ce qui revient au même, telles que $|a_u \pi^{-u_0}|$ soit borné. On munit $L(b)$ de la norme

$$|f| = \operatorname{Sup}_{u \in T} |a_u \pi^{-u_0}|.$$

C'est un *espace de Banach*, isomorphe à l'espace $b(T)$. Soit $b' = v(\pi')$, et supposons que $b' > b$; alors $L(b')$ est un sous-espace de $L(b)$. *L'injection* $i : L(b') \to L(b)$ *est complètement continue* (« critère de normalité de Montel »); en effet, si l'on identifie $L(b)$ et $L(b')$ à $b(T)$, l'application i transforme (x'_u) en (x_u), avec

$$x_u = (\pi'/\pi)^{u_0} x_u;$$

elle est donc définie par une matrice diagonale à termes tendant vers 0 ce qui suffit à établir sa complète continuité (cf. n° 8).

On a deux autres types d'applications linéaires à considérer :

(i) On se donne un élément $g = \Sigma c_u X^u$ de $L(b)$, avec $b > 0$. L'application $f \to fg$ est un endomorphisme continu de $L(b)$, que l'on note encore g.

(ii) Soit q un entier fixé $\geqslant 2$. Si $f = \Sigma a_u X^u$ est une série formelle, on pose $\psi(f) = \Sigma a_{qu} X^u$; si $f \in L(b)$, on a $\psi(f) \in L(qb)$, et ψ est une application linéaire continue de $L(b)$ dans $L(qb)$.

Comme $b>0$, on a $qb>b$, et l'injection $L(qb)\xrightarrow{i}L(b)$ est définie. En composant

$$L(qb) \xrightarrow{i} L(b) \xrightarrow{g} L(b) \xrightarrow{\psi} L(qb),$$

on obtient un endomorphisme α de $L(qb)$, noté $\psi\circ g$ par abus d'écriture. Puisque i est complètement continu et que g et ψ sont continus, α est *complètement continu*; son déterminant de Fredholm se calcule en remarquant que c'est le transposé de l'endomorphisme complètement continu défini par la matrice (c_{qu-v}); en appliquant à α les théories de Riesz et de Fredholm, on retrouve les résultats du § 2 de [4].

L'un des résultats principaux du § 3 de [4] est la construction d'une *suite exacte*

$$0\to E \xrightarrow{d} E^{n+1} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} E^{\binom{n+1}{2}} \xrightarrow{d} E^{n+1} \xrightarrow{d} E\to W\to 0,$$

où E est un espace de Banach du type $L(b)$, où W est un espace vectoriel de dimension finie, et où les opérateurs d sont construits par un procédé standard (« complexe de l'algèbre extérieure ») à partir des opérateurs différentiels $D_1, \dots, D_{n+1}$. Si l'on munit $E^{\binom{n+1}{i}}$ de l'endomorphisme $u_i=q^i(\psi\circ g)$, les u_i commutent aux opérateurs d, et la proposition 9 montre que l'on a :

$$\prod_{i=0}^{i=n+1} \det(1-tq^i\psi\circ g)^{(-1)^i\binom{n+1}{i}}=\det(1-t\overline{\alpha}),$$

où $\overline{\alpha}$ est l'endomorphisme de W défini par $\psi\circ g$. On obtient ainsi directement la formule du théorème 4.2 de [4], formule qui joue un rôle essentiel dans le calcul de la fonction zêta d'une hypersurface.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN, *Séminaire E.N.S.*, 1953-1954.

[2] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis*, Acad. Press, 1960.

[3] B. DWORK, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. of Maths.*, *82*, 1960, p. 631-648.

[4] B. DWORK, On the zeta function of a hypersurface, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 12, 1962.

[5] I. FLEISCHER, Sur les espaces normés non archimédiens, *Proc. Acad. Amsterdam*, *57*, 1954, p. 165-168.

[6] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 16, 1955.

[7] A. GROTHENDIECK, La théorie de Fredholm, *Bull. Soc. Math. France*, *84*, 1956, p. 319-384.

[8] A. MONNA, Sur les espaces normés non archimédiens : I. *Proc. Acad. Amsterdam*, *59*, 1956, p. 475-483; II. *Ibid.*, p. 484-489; III. *Ibid.*, *60*, 1957, p. 459-467; IV. *Ibid.*, p. 468-476.

[9] R. SIKORSKI, The determinant theory in Banach spaces, *Colloquium mathematicum*, *8*, 1961, p. 141-198.

Manuscrit reçu le 18 décembre 1961.