

JACQUES DIXMIER

**Sur les structures boréliennes du spectre d'une  $C^*$ -algèbre**

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 6 (1960), p. 5-11

[http://www.numdam.org/item?id=PMIHES\\_1960\\_\\_6\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__6__5_0)

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SUR LES STRUCTURES BORÉLIENNES DU SPECTRE D'UNE C\*-ALGÈBRE

*par* JACQUES DIXMIER

Dans la classification des C\*-algèbres, on est amené à étudier certaines catégories de C\*-algèbres particulièrement intéressantes :

- 1) Les GCR-algèbres au sens de Kaplansky [6], autrement dit les C\*-algèbres admettant une suite de composition à quotients CCR ;
- 2) Les C\*-algèbres A dont le spectre  $\hat{A}$  (ensemble des classes de représentations irréductibles de A muni d'une certaine topologie, cf. [4]) est un  $T_0$ -espace ;
- 3) Les C\*-algèbres A de spectre lisse (= smooth dual, cf. [9]), c'est-à-dire telles que la structure borélienne définie par Mackey sur  $\hat{A}$  soit dénombrablement séparée ;
- 4) Les C\*-algèbres de type I, c'est-à-dire celles dont toutes les représentations factorielles sont de type I.

Limitons-nous désormais aux C\*-algèbres séparables (bien que certaines des implications ci-dessous ne nécessitent pas cette hypothèse). Kaplansky a montré [6] qu'une GCR-algèbre est de type I. Fell prouva ensuite que : 1) Si A est GCR,  $\hat{A}$  est un  $T_0$ -espace [5] ; 2) Si  $\hat{A}$  est un  $T_0$ -espace, A est de type I (son raisonnement est signalé en remarque dans [3]), et  $\hat{A}$  est lisse [5]. Enfin, j'ai prouvé dans [3] que, si  $\hat{A}$  est un  $T_0$ -espace, A est GCR. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$A \text{ GCR} \Leftrightarrow \hat{A} \text{ } T_0\text{-espace} \begin{matrix} \Rightarrow \hat{A} \text{ lisse} \\ \Leftarrow A \text{ de type I} \end{matrix}$$

Dans ce mémoire, nous montrerons que, si  $\hat{A}$  est lisse,  $\hat{A}$  est un  $T_0$ -espace. Nous aurons donc prouvé une partie de la conjecture de Mackey [9] selon laquelle  $\hat{A}$  est lisse si, et seulement si, A est de type I.

Soit A une C\*-algèbre séparable. Rappelons quelques points concernant la topologie et la structure borélienne de  $\hat{A}$ . Soit H un espace hilbertien séparable. Soit  $\mathcal{R}_H(A)$  l'ensemble des représentations de A dans H, c'est-à-dire des applications linéaires  $\pi$  de A dans  $\mathcal{L}(H)$  (ensemble des opérateurs linéaires continus dans H) telles que  $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$  et  $\pi(x^*) = \pi(x)^*$  quels que soient  $x, y \in A$ . On sait qu'on a  $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$  quel que soit  $x \in A$ . Munissons  $\mathcal{R}_H(A)$  de la topologie de la convergence simple forte, c'est-à-dire de la topologie la moins fine pour laquelle les applications  $\pi \rightarrow \pi(x)\xi$  de  $\mathcal{R}_H(A)$  dans H ( $x \in A, \xi \in H$ ) sont continues. Cette topologie est identique à la topologie de la convergence simple faible, en vertu de l'égalité

$$\|\pi(x)\xi - \pi_0(x)\xi\|^2 = (\pi(x^*x)\xi | \xi) - 2 \operatorname{Re}(\pi(x)\xi | \pi_0(x)\xi) + \|\pi_0(x)\xi\|^2.$$

Soit  $\mathcal{S}_H(A)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{R}_H(A)$  formé des représentations irréductibles non triviales de  $A$  dans  $H$ . La topologie précédente induit sur  $\mathcal{S}_H(A)$  une topologie  $\mathcal{T}$ . Soit  $\mathcal{B}$  la structure borélienne sur  $\mathcal{S}_H(A)$  sous-jacente à  $\mathcal{T}$ . Soit, d'autre part,  $\varphi$  l'application canonique de  $\mathcal{S}_H(A)$  dans  $\hat{A}$  qui, à tout élément de  $\mathcal{S}_H(A)$ , fait correspondre sa classe. L'image  $\varphi(\mathcal{S}_H(A))$  est le sous-ensemble  $\hat{A}_H$  de  $\hat{A}$  formé des classes de représentations irréductibles non triviales de  $A$  dont la dimension hilbertienne est égale à celle de  $H$ . (Comme  $A$  est séparable,  $\hat{A}_H$  n'est non vide que si  $\dim H = 1, 2, \dots, \aleph_0$ .) Ceci posé, la topologie (resp. la structure borélienne de Mackey) induite sur  $\hat{A}_H$  par celle de  $\hat{A}$  n'est autre que la topologie (resp. la structure borélienne) quotient de  $\mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) par  $\varphi$ . Mais la structure de Mackey de  $\hat{A}_H$ , évidemment plus fine que la structure borélienne sous-jacente à sa topologie, *ne lui est pas en général identique*, car un ensemble borélien de  $\mathcal{S}_H(A)$  saturé pour l'équivalence n'est pas toujours déduit par intersection et réunion dénombrable d'ensembles ouverts ou fermés saturés ; par exemple, il peut arriver (si les seuls idéaux bilatères fermés de  $A$  sont  $\{0\}$  et  $A$ ) que la topologie de  $\hat{A}$  soit la topologie la moins fine, alors que la structure borélienne de Mackey est toujours séparée. Nous avons donc à distinguer sur  $\hat{A}_H$ , et plus généralement sur  $\hat{A}$ , la structure borélienne de Mackey et la « structure borélienne topologique ».

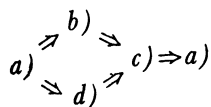
Il est bon de noter que l'équivalence des représentations définit dans  $\mathcal{R}_H(A)$  une relation d'équivalence ouverte ; plus précisément, tout opérateur unitaire  $U$  dans  $H$  définit un homéomorphisme  $h_U$  de  $\mathcal{R}_H(A)$  sur lui-même, et la relation d'équivalence en question est déduite du groupe des homéomorphismes  $h_U$  ; de même dans  $\mathcal{S}_H(A)$ .

Ceci posé, le résultat principal du présent article est le théorème que voici :

THÉORÈME 1. — *Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre séparable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $A$  est GCR ;
- b)  $\hat{A}$  est standard ;
- c) La structure borélienne de Mackey sur  $\hat{A}$  est dénombrablement séparée ;
- d) La structure borélienne de Mackey sur  $\hat{A}$  est identique à la structure borélienne topologique.

Le schéma de la démonstration est le suivant :



$b) \Rightarrow c)$  est évident.

$a) \Rightarrow d)$  résulte de [5].

$d) \Rightarrow c)$  : supposons la structure borélienne de Mackey  $\mathcal{B}_1$  sur  $\hat{A}$  identique à la structure borélienne topologique  $\mathcal{B}_2$ . La structure  $\mathcal{B}_1$  est séparée [9]. La structure  $\mathcal{B}_2$  est dénombrablement engendrée puisque la topologie de  $\hat{A}$  admet une base dénombrable [5]. Donc  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$  est dénombrablement séparée.

$a) \Rightarrow b)$  : supposons que  $A$  soit GCR. Il existe alors [6] une suite de composition croissante bien ordonnée  $(I_\rho)_{\rho \in P}$  de  $A$  telle que les  $I_{\rho+1}/I_\rho$  soient des CCR-algèbres non nulles dont le spectre est localement compact. Pour tout  $\rho \in P$ , soit  $x_\rho$  un point de  $I_{\rho+1}$  dont la distance à  $I_\rho$  soit  $\geq 1$ . Si  $\rho > \rho'$ , on a  $\|x_\rho - x_{\rho'}\| \geq 1$ . Comme  $A$  est séparable,  $P$  est nécessairement dénombrable. D'autre part, soit  $U_\rho$  le spectre de  $I_\rho$ , qui s'identifie à une partie ouverte de  $\hat{A}$ . Les  $U_\rho$  forment une famille croissante bien ordonnée pour l'inclusion de parties ouvertes de  $\hat{A}$ , et l'une de ces parties est  $\hat{A}$ . Le spectre de  $I_{\rho+1}/I_\rho$  s'identifie à  $U_{\rho+1} - U_\rho = V_\rho$ , et l'espace topologique  $V_\rho$  est localement compact à base dénombrable. Les  $V_\rho$  sont évidemment deux à deux disjoints. Leur réunion est  $\hat{A}$  ; en effet, soit  $\pi \in \hat{A}$  ; soit  $\rho$  le plus petit indice tel que  $\pi \in U_\rho$  ; pour  $\sigma < \rho$ , on a  $\pi \notin U_\sigma$ , donc le noyau  $N$  de  $\pi$  contient  $I_\sigma$  ; si  $\rho$  était un ordinal limite, on en conclurait que  $N \supset I_\rho$ , d'où  $\pi \in U_\rho$ , ce qui est absurde ; donc  $\rho$  est de la forme  $\rho' + 1$  ; et on a  $\pi \in V_{\rho'}$ . Comme  $a) \Rightarrow d)$ , la structure borélienne de Mackey sur  $\hat{A}$  est identique à la structure borélienne topologique ; nous pouvons donc parler de parties boréliennes de  $\hat{A}$  sans préciser. Comme  $P$  est dénombrable, une partie  $B$  de  $\hat{A}$  est borélienne si et seulement si les parties  $B \cap V_\rho$  sont boréliennes. Donc, l'espace borélien  $\hat{A}$  est la somme des espaces boréliens  $V_\rho$ . Comme l'espace topologique  $V_\rho$  est localement compact à base dénombrable, l'espace borélien  $V_\rho$  est standard, donc [9] l'espace borélien  $\hat{A}$  est standard.

Il reste à montrer que  $c) \Rightarrow a)$ , ce qui nécessitera plusieurs lemmes.

LEMME 1. — Soit  $H$  un espace hilbertien séparable. L'espace topologique  $\mathcal{R}_H(A)$  est polonais (i.e. [1] sa topologie se déduit d'une distance pour laquelle  $\mathcal{R}_H(A)$  est séparable complet).

Soit  $\mathcal{L}_s(H)$  l'ensemble  $\mathcal{L}(H)$  muni de la topologie forte. Il est quasi-complet ([2], chap. III, § 3, cor. 2 du th. 4). Soit  $\mathcal{L}_s(A, \mathcal{L}_s(H))$  l'espace des applications linéaires continues de  $A$  dans  $\mathcal{L}_s(H)$ , muni de la topologie de la convergence simple. Toute partie équicontinue et fermée de  $\mathcal{L}_s(A, \mathcal{L}_s(H))$  est un sous-espace uniforme complet de  $\mathcal{L}_s(A, \mathcal{L}_s(H))$  ([2], chap. III, § 3, th. 4). En particulier, l'ensemble des applications linéaires  $\pi$  de  $A$  dans  $\mathcal{L}_s(H)$  telles que  $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$  pour tout  $x \in A$  est un sous-espace uniforme complet  $B$  de  $\mathcal{L}_s(A, \mathcal{L}_s(H))$ . Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une suite totale dans  $A$  telle que  $\|x_i\| \leq 1$  pour tout  $i$ . Soit  $(\xi_j)_{j \in J}$  une suite totale dans  $H$  telle que  $\|\xi_j\| \leq 1$  pour tout  $j$ . La structure uniforme de  $B$  admet pour système fondamental d'entourages l'ensemble des entourages définis par les inégalités

$$\|\pi(x_i)\xi_j - \pi'(x_i)\xi_j\| \leq \frac{1}{k} \quad (i \in I, j \in J, k = 1, 2, \dots).$$

Cette structure uniforme est donc métrisable. L'application  $\pi \rightarrow (\pi(x_i)\xi_j)_{i \in I, j \in J}$  de  $B$  sur un sous-espace de  $H^{I \times J}$  est bicontinue, donc  $B$  est séparable. Bref,  $B$ , muni de la topologie de la convergence simple forte, est un espace polonais. Enfin,  $\mathcal{R}_H(A)$  est l'ensemble des  $\pi \in B$  tels que  $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ ,  $\pi(x^*) = \pi(x)^*$  quels que soient  $x, y \in A$ . La deuxième condition équivaut à la condition  $(\pi(x^*)\xi | \eta) = (\xi | \pi(x)\eta)$  quels que

soient  $x \in A$ ,  $\xi, \eta \in H$ . On voit donc que  $\mathcal{R}_H(A)$  est un sous-espace fermé de  $B$ , donc est un espace polonais.

LEMME 2. — Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach séparables,  $M$  un espace topologique,  $m \rightarrow U_m$  une application continue de  $M$  dans  $\mathcal{L}_s(E, F)$  (ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ , muni de la topologie de la convergence simple). Soit  $n$  un entier. L'ensemble des  $m \in M$  tels que  $\text{codim } \overline{U_m(E)} \leq n$  est un  $G_\delta$  de  $M$ .

Il suffit de reprendre la démonstration de [8], p. 202, l. 1-17 du bas, en remplaçant l'assertion « est mesurable » à la l. 11 (resp. 5) du bas, par « est ouvert » (resp. « est un  $G_\delta$  »).

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre,  $H$  un espace hilbertien, et  $\pi, \pi' \in \mathcal{R}_H(A)$ . Rappelons qu'on appelle opérateur d'entrelacement de  $\pi$  et  $\pi'$  un élément  $T$  de  $\mathcal{L}(H)$  tel que  $\pi(x)T = T\pi'(x)$  quel que soit  $x \in A$ . La dimension de l'espace vectoriel des opérateurs d'entrelacement de  $\pi$  et  $\pi'$  s'appelle le nombre d'entrelacement de  $\pi$  et  $\pi'$  et sera noté  $\mathcal{E}(\pi, \pi')$ .

LEMME 3. — Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre séparable,  $H$  un espace hilbertien séparable, et  $M$  un espace topologique. Soient  $m \rightarrow \pi_m, m \rightarrow \pi'_m$  deux applications continues de  $M$  dans  $\mathcal{R}_H(A)$ . Soit  $n$  un entier. L'ensemble des  $m \in M$  tels que  $\mathcal{E}(\pi_m, \pi'_m) \leq n$  est un  $G_\delta$  de  $M$ .

Nous utilisons la démonstration de [8], p. 202, l. 11-26, mais il est nécessaire de la modifier légèrement. Soit  $\mathcal{T}(H)$  l'ensemble des opérateurs traçables dans  $H$ , muni de sa structure naturelle d'espace de Banach : si  $S \in \mathcal{T}(H)$ , la norme de  $S$  dans  $\mathcal{T}(H)$  est  $\|S\|_1 = \text{Tr}(\text{abs } S)$ , où  $\text{abs } S = (S^*S)^{1/2}$ . Alors  $\mathcal{L}(H)$  s'identifie au dual de  $\mathcal{T}(H)$ , la forme bilinéaire canonique sur  $\mathcal{T}(H) \times \mathcal{L}(H)$  étant  $\langle S, T \rangle = \text{Tr}(ST)$ . Soient  $(x_i)_{i \in I}$  une suite totale dans  $A$  telle que  $\|x_i\| \leq 1$  pour tout  $i$ ,  $(\xi_j)_{j \in J}$  une suite totale dans  $H$  telle que  $\|\xi_j\| \leq 1$  pour tout  $j$ . Soit  $X$  l'espace de Banach des familles  $(\lambda_{ijk})_{i \in I, j \in J, k \in J}$  de nombres complexes bornés. Pour tout  $m \in M$ , soit  $V_m$  l'application linéaire continue de  $\mathcal{L}(H)$  dans  $X$  définie par

$$V_m(T) = ((\pi_m(x_i)T - T\pi'_m(x_i))\xi_j | \xi_k)_{i \in I, j \in J, k \in J}.$$

Alors,  $\mathcal{E}(\pi_m, \pi'_m)$  est la dimension du noyau de  $V_m$ . L'espace de Banach  $X$  est le dual de l'espace de Banach  $Y$  des familles  $(\mu_{ijk})_{i \in I, j \in J, k \in J}$  de nombres complexes telles que  $\|(\mu_{ijk})\| = \sum_{i \in I, j \in J, k \in J} |\mu_{ijk}| < +\infty$ . Pour  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $(\mu_{ijk}) \in Y$ , on a

$$\langle (\mu_{ijk}), V_m(T) \rangle = \sum_{ijk} \mu_{ijk} ((\pi_m(x_i)T - T\pi'_m(x_i))\xi_j | \xi_k) = \sum_{ijk} \mu_{ijk} ((T\xi_j | \pi_m(x_i^*)\xi_k) - (T\pi'_m(x_i)\xi_j | \xi_k)).$$

Étant donnés deux vecteurs  $\eta$  et  $\zeta$  de  $H$ , notons  $R(\eta, \zeta)$  l'opérateur  $\xi \rightarrow (\xi | \zeta)\eta$ . On a  $\|R(\eta, \zeta)\|_1 = \|\eta\| \cdot \|\zeta\|$ , et, pour tout  $T \in \mathcal{L}(H)$ ,

$$\text{Tr}TR(\eta, \zeta) = (\text{TR}(\eta, \zeta)\zeta | \zeta) = (T\eta | \zeta).$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle (\mu_{ijk}), V_m(T) \rangle &= \sum_{ijk} \mu_{ijk} \text{Tr}(\text{TR}(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - \text{TR}(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)) \\ &= \langle \sum_{ijk} \mu_{ijk} (R(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - R(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)), T \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi,  $V_m$  est l'application linéaire transposée d'une application linéaire continue  $U_m$  de  $Y$  dans  $\mathcal{S}(H)$ , définie par

$$U_m((\mu_{ijk})) = \Sigma_{ijk} \mu_{ijk} (R(\xi_j, \pi_m(x_i^*) \xi_k) - R(\pi'_m(x_i) \xi_j, \xi_k))$$

et  $\mathcal{E}(\pi_m, \pi'_m)$  est la codimension de  $\overline{U_m(Y)}$ . Pour prouver le lemme 3, il suffit, en vertu du lemme 2, de prouver la continuité de l'application  $m \rightarrow U_m$  de  $M$  dans  $\mathcal{L}(Y, \mathcal{S}(H))$  muni de la topologie de la convergence simple. Pour  $(\mu_{ijk}) \in Y$  fixé, montrons donc que  $\Sigma_{ijk} \mu_{ijk} (R(\xi_j, \pi_m(x_i^*) \xi_k) - R(\pi'_m(x_i) \xi_j, \xi_k)) \in \mathcal{S}(H)$  dépend continûment de  $m$ . Comme

$$\| \mu_{ijk} (R(\xi_j, \pi_m(x_i^*) \xi_k) - R(\pi'_m(x_i) \xi_j, \xi_k)) \|_1 \leq 2 |\mu_{ijk}|,$$

il suffit de montrer que chaque terme  $R(\xi_j, \pi_m(x_i^*) \xi_k)$ ,  $R(\pi'_m(x_i) \xi_j, \xi_k)$  dépend continûment de  $m$ . Or, les applications  $m \rightarrow \pi_m(x_i^*) \xi_j$  et  $m \rightarrow \pi'_m(x_i) \xi_j$  de  $M$  dans  $H$  sont continues, et l'application  $(\eta, \zeta) \rightarrow R(\eta, \zeta)$  de  $H \times H$  dans  $\mathcal{S}(H)$  est continue en vertu de l'égalité  $\|R(\eta, \zeta)\|_1 = \|\eta\| \cdot \|\zeta\|$ .

LEMME 4. — Soient  $A$  une C\*-algèbre séparable,  $H$  un espace hilbertien séparable. L'espace topologique  $\mathcal{S}_H(A)$  des représentations irréductibles non triviales de  $A$  dans  $H$  est polonais.

L'ensemble des représentations irréductibles de  $A$  dans  $H$  est l'ensemble des  $\rho \in \mathcal{R}_H(A)$  telles que  $\mathcal{E}(\rho, \rho) \leq 1$ . Appliquons le lemme 3 en prenant  $M = \mathcal{R}_H(A)$ ,  $\pi_\rho = \pi'_\rho = \rho$  pour toute  $\rho \in \mathcal{R}_H(A)$ . On voit que cet ensemble est un  $G_\delta$  dans  $\mathcal{R}_H(A)$ . Cet ensemble, éventuellement privé d'un point (la représentation triviale lorsque  $\dim H = 1$ ) n'est autre que  $\mathcal{S}_H(A)$ . Donc  $\mathcal{S}_H(A)$  est un  $G_\delta$  dans l'espace polonais  $\mathcal{R}_H(A)$  et par suite est polonais ([1], § 6, th. 1).

LEMME 5. — Soient  $A$  une C\*-algèbre séparable,  $H$  un espace hilbertien séparable, et  $\pi_0 \in \mathcal{S}_H(A)$ . L'ensemble des  $\pi \in \mathcal{S}_H(A)$  qui sont équivalentes à  $\pi_0$  est un  $F_\sigma$  dans  $\mathcal{S}_H(A)$ .

Considérons l'ensemble des  $\pi \in \mathcal{R}_H(A)$  telles que  $\mathcal{E}(\pi_0, \pi) \leq 0$ . D'après le lemme 3, c'est un  $G_\delta$  dans  $\mathcal{R}_H(A)$ . Donc, l'ensemble des  $\pi \in \mathcal{S}_H(A)$  inéquivalentes à  $\pi_0$  est un  $G_\delta$  dans  $\mathcal{S}_H(A)$ . D'où le lemme.

LEMME 6. — Soient  $A$  une C\*-algèbre primitive séparable,  $H$  un espace hilbertien séparable de dimension infinie, et  $\mathcal{S}$  une partie fermée de  $\mathcal{S}_H(A)$ , saturée pour l'équivalence, distincte de  $\mathcal{S}_H(A)$ . Alors  $\mathcal{S}$  est rare dans  $\mathcal{S}_H(A)$ .

(Rappelons [1] qu'une partie d'un espace topologique est dite rare si son adhérence est sans point intérieur, maigre si elle est réunion dénombrable d'ensembles rares.)

Soit  $B \subset \hat{A}$  l'ensemble des classes de représentations irréductibles de  $A$  de noyau  $\{0\}$ . Cet ensemble est non vide puisque  $A$  est primitive, et tout point de  $B$  est partout dense dans  $\hat{A}$ . Si une représentation de  $B$  est de dimension finie,  $A$  est de dimension finie, et le lemme est trivial car  $\mathcal{S}_H(A) = \emptyset$ . On peut donc supposer  $B \subset \hat{A}_H$ . Soit  $F = \varphi(\mathcal{S})$  l'image canonique de  $\mathcal{S}$  dans  $\hat{A}_H$ . C'est une partie fermée dans  $\hat{A}_H$ , distincte de  $\hat{A}_H$ . Soit  $U$  l'inté-

rieur de  $F$  dans  $\hat{A}_H$ . Si  $U \neq \emptyset$ , tout point de  $B$  appartient à  $U$ , donc  $\bar{U} = \hat{A}_H$  et  $F = \hat{A}_H$ , contrairement à l'hypothèse. Donc  $F$  est rare dans  $\hat{A}_H$ , de sorte que  $\mathcal{S}$  est rare dans  $\mathcal{I}_H(A)$ .

LEMME 7. — Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre primitive séparable,  $H$  un espace hilbertien séparable de dimension infinie, et  $\mathcal{B}$  une partie borélienne de  $\mathcal{I}_H(A)$ , saturée pour l'équivalence. Alors,  $\mathcal{B}$  est maigre ou de complémentaire maigre.

Soit  $D(\mathcal{B})$  l'ensemble des  $\pi \in \mathcal{I}_H(A)$  telles que tout voisinage de  $\pi$  rencontre  $\mathcal{B}$  suivant un ensemble non maigre dans  $\mathcal{I}_H(A)$ . Puisque l'équivalence est définie par un groupe d'homéomorphismes de  $\mathcal{I}_H(A)$ ,  $D(\mathcal{B})$  est saturé pour l'équivalence. D'autre part, il est clair que  $D(\mathcal{B})$  est fermé. D'après le lemme 6,  $D(\mathcal{B})$  est rare ou égal à  $\mathcal{I}_H(A)$ . Enfin, la différence symétrique de  $\mathcal{B}$  et  $D(\mathcal{B})$  est maigre ([7], §§ 10-11). Si  $D(\mathcal{B}) = \mathcal{I}_H(A)$ , le complémentaire de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{I}_H(A)$  est maigre. Si  $D(\mathcal{B})$  est rare,  $\mathcal{B}$  est la réunion d'un ensemble maigre et d'un ensemble rare, donc est maigre.

LEMME 8. — Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre primitive séparable,  $H$  un espace hilbertien séparable de dimension infinie. On suppose la structure borélienne de Mackey sur  $\hat{A}_H$  dénombrablement séparée. Alors toutes les représentations irréductibles de noyau  $\{0\}$  de  $A$  sont équivalentes.

Par hypothèse, il existe une suite  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$  de parties boréliennes de  $\mathcal{I}_H(A)$  saturées pour l'équivalence et telles que toute classe d'équivalence  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{I}_H(A)$  soit l'intersection des  $\mathcal{B}_i$  qui la contiennent. Si  $\mathcal{C}$  est maigre, les  $\mathcal{B}_i$  contenant  $\mathcal{C}$  ne peuvent être toutes de complémentaires maigres (sinon,  $\mathcal{C}$  serait maigre et de complémentaire maigre, contrairement au fait que  $\mathcal{I}_H(A)$  est un espace polonais). Donc, compte tenu du lemme 7,  $\mathcal{C}$  est contenue dans une  $\mathcal{B}_i$  maigre. Si toutes les classes d'équivalence dans  $\mathcal{I}_H(A)$  étaient maigres,  $\mathcal{I}_H(A)$  serait donc réunion de celles des parties  $\mathcal{B}_i$  qui sont maigres, contrairement au fait que  $\mathcal{I}_H(A)$  est un espace polonais. Donc, il existe une classe d'équivalence  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{I}_H(A)$  qui est non maigre. Or,  $\mathcal{C} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots$ , où les  $\mathcal{F}_i$  sont fermés dans  $\mathcal{I}_H(A)$  (lemme 5). Les  $\mathcal{F}_i$  ne peuvent être tous rares. Donc  $\mathcal{C}$  contient une partie ouverte non vide  $\mathcal{U}$ . Le saturé de  $\mathcal{U}$  est nécessairement  $\mathcal{C}$  (puisque  $\mathcal{C}$  est une classe d'équivalence), donc  $\mathcal{C}$  est ouverte. Donc, il existe dans  $\hat{A}_H$  un point ouvert  $\rho_0$ . Reprenons l'ensemble  $B \subset \hat{A}$  des classes de représentations irréductibles de  $A$  de noyau  $\{0\}$ , ensemble considéré dans la démonstration du lemme 6. On peut supposer  $A$  de dimension infinie (sinon le lemme est trivial), et on a alors  $B \subset \hat{A}_H$ . Comme  $B$  est partout dense dans  $\hat{A}_H$  et que  $\{\rho_0\}$  est ouvert, on a  $\rho_0 \in B$ . En outre, la topologie induite sur  $B$  par celle de  $\hat{A}$  est la topologie la moins fine ; donc  $B = \{\rho_0\}$ , ce qui prouve le lemme.

*Fin de la démonstration du théorème 1.* Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre séparable, et supposons la structure borélienne de Mackey sur  $\hat{A}$  dénombrablement séparée. Soit  $I$  un idéal primitif de  $A$ . Alors  $(A/I)^\wedge$  s'identifie à une partie fermée de  $\hat{A}$ . Il est immédiat que la structure borélienne de Mackey sur  $(A/I)^\wedge$  est induite par celle de  $\hat{A}$ , donc est dénombra-

blement séparée. D'après le lemme 8, toutes les représentations irréductibles de noyau I de A sont équivalentes. Autrement dit,  $\hat{A}$  est un  $T_0$ -espace, de sorte que [3] A est GCR.

REMARQUE. — Soit G un groupe localement compact séparable. Si la structure borélienne de Mackey sur le dual  $\hat{G}$  de G est dénombrablement séparée, le th. 1 montre que  $\hat{G}$  est standard et que la structure borélienne de Mackey n'est autre que la structure borélienne sous-jacente à la topologie de  $\hat{G}$ .

Les résultats du présent article ont été aussi obtenus par James Glimm, dans un mémoire à paraître.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. IX, 2<sup>e</sup> éd., Paris, Hermann, 1958.
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. III, IV, V, Paris, Hermann, 1955.
- [3] J. DIXMIER, Sur les C\*-algèbres, *Bull. Soc. math. France*, 88 (1960), pp. 95-112.
- [4] J. M. G. FELL, The dual spaces of C\*-algebras, à paraître aux *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [5] J. M. G. FELL, *C\*-algebras with smooth dual*, à paraître.
- [6] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 (1951), pp. 219-255.
- [7] C. KURATOWSKI, *Topologie I*, 4<sup>e</sup> éd., *Monografie Mat.*, t. 20, Varsovie, 1958.
- [8] G. W. MACKEY, Induced representations of locally compact groups II, *Annals of Math.*, 58 (1953), pp. 193-221.
- [9] G. W. MACKEY, Borel structure in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), pp. 134-165.

*Reçu le 19 janvier 1960.*