Appendice. Introduction à la dialogique modale et hybride*

Laurent Keiff

Cette courte introduction a pour but de donner au lecteur peu familier des systèmes dialogiques un aperçu des notions fondamentales de cette approche de la logique. Nous présenterons d'abord la dialogique standard, c'est-à-dire les systèmes correspondant à la logique propositionnelle classique et intuitionniste : nous commencerons par spécifier le langage dont nous nous servons, puis nous verrons les différents types de règles qui définissent les jeux dialogiques standard. Nous présenterons ensuite l'extension modale de cette logique propositionnelle, avec les règles correspondant aux systèmes K, T, B, S4, S5 et D[1]. Nous finirons avec le langage modal hybride, introduit dans [Blackburn 2001a] et [Rahman & Keiff 2004].

1 Le Langage

Notre langage **L** se compose des symboles standards de la logique de premier ordre avec quatre connecteurs ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$), deux quantificateurs ($\forall$, $\exists$), des lettres minuscules (a, b, c, ...) pour les formules élémentaires[2],

*La dialogique telle qu'elle que nous l'entendons dans cette introduction correspond à une tradition : [Lorenzen & Lorenz 1978], [Rahman 1993], [Rahman & Rückert 2001a], [Rahman & Keiff 2004], pour se cantonner à un aperçu très succinct.

[1] Nomenclature habituelle ([Hughes & Cresswell 1996] par exemple).

[2] Par formule, nous entendons les traditionnelles *ebf* (*expression bien formée*), récursivement énumérables à partir de l'ensemble des formules *élémentaires*, ou atomiques, qui sont les formules ne contenant aucun connecteur. Une formule complexe est composée d'une ou plusieurs formules élémentaires, et de connecteurs. Les règles syntactiques de formation des formules sont celles dont on a l'habitude : i) toute formule élémentaire est une formule ; ii) si A est une formule, alors $\neg A$, $\forall xA$ et $\exists xA$ sont des formules ; iii) si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des formules ; iv) rien d'autre n'est une formule.

des lettres capitales italiques (A, B, C, ...) pour les formules qui peuvent être complexes, des capitales italiques grasses ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ...) pour les prédicats, nos constantes seront notées τ_i, où $i \in \mathbf{N}$, et nos variables seront les usuelles (x, y, z, ...).

L contient aussi deux symboles spéciaux de force : $?_{\ldots}$ et $!_{\ldots}$, où les trois points sont une place libre pour un indice, contenant une information adéquate qui sera spécifiée par les règles correspondantes. Une *expression* de **L** est soit un terme, soit une formule, soit un symbole de force. **P** et **O** sont deux autres symboles spéciaux de **L**, désignant les joueurs des dialogues. Chaque expression e du langage peut être augmentée d'un des symboles **P** ou **O** pour former une *expression* (*dialogiquement*) *étiquetée* (notée **P**-e ou **O**-e), signifiant dans le jeu que l'expression e a été jouée par le joueur **P** (respectivement **O**)[3]. Nous utiliserons X et Y comme des variables désignant **P** et **O**, en faisant toujours l'hypothèse que X $\neq$ Y. D'autres symboles spéciaux seront introduits au moment où on aura besoin d'eux.

2 Règles de particule

Une *forme argumentative*, ou *règle de particule*, est une description abstraite de la façon dont on peut critiquer une formule, en fonction de son connecteur principal, et des réponses possibles à ces critiques. C'est une description abstraite en ce sens qu'elle ne contient aucune référence à un contexte de jeu déterminé. Du point de vue dialogique, on dit que ces règles déterminent la *sémantique locale*, parce qu'elles indiquent le déroulement d'un fragment du dialogue (attaque et défense) concernant *une* constante logique.

Definition 4. *(état de jeu) :*

Un état de jeu est un triplet ordonné $\langle \rho, \sigma, A \rangle$ où :

- *ρ est une assignation de rôles. Cette assignation peut être R, fonction bijective de l'ensemble des joueurs {X, Y} vers l'ensemble { ?(attaque), !(défense)}, déterminant quel joueur a le rôle d'attaquant et quel joueur défend. L'assignation peut être aussi R', fonction complémentaire de R, inversant l'assignement (par exemple, si R(X)= ? et R(Y)=!, alors R'(X)= ! et R'(Y)= ?). Les joueurs assument leur rôle en jouant l'attaque (ou la défense) fixée par la règle correspondante.*

[3] **P** et **O** abrègent **P**roposant et **O**pposant. Le proposant est le joueur qui fournit la thèse du dialogue, c'est à dire la formule avec laquelle le jeu commence, et doit la défendre. L'opposant assume le rôle de critique.

– *σ est une fonction d'assignation substituant, comme d'habitude, des individus aux variables.*
– *A est une sous-formule dialogiquement labellée, avec laquelle le jeu va se poursuivre.*

Les règles de particule déterminent donc quel état de jeu S' suit d'un état de jeu donné S, sans préciser encore les règles (structurelles) qui décrivent le passage de S à S'.

Quel état de jeu suit de S=$\langle$R, σ, $F\rangle$ pour la formule étiquetée X-F ?

- **Règle de particule pour la négation** : Si F est de forme $\neg A$ alors S'=$\langle$R', σ, $A\rangle$, c'est-à-dire que Y aura pour rôle de défendre A, et X pour rôle de (contre)attaquer A.
- **Règle de particule pour la conjonction** : Si F est de forme $A \wedge B$ alors S'=$\langle$R, σ, $A\rangle$ ou S" =$\langle$R, σ, $B\rangle$, en fonction du choix de l'attaquant R(Y)= ?, exprimé par les attaques $?_L$ et $?_R$ respectivement.
- **Règle de particule pour la disjonction** : Si F est de forme $A \vee B$ alors S'=$\langle$R, σ, $A\rangle$ ou S'=$\langle$R, σ, $B\rangle$, en fonction du choix du défenseur R(X)= !, qui répond au coup $?_\vee$ de l'attaquant R(Y)= ?.
- **Règle de particule pour la subjonction** : Si F est de forme $A \rightarrow B$, alors S'=$\langle$R', σ, $A\rangle$, et il est alors possible que le jeu se poursuive vers l'état S"=$\langle$R", σ, $B\rangle$, ou éventuellement dans l'ordre inverse, en fonction du choix du défenseur, qui répond au coup A de l'attaquant R(Y)= ?.
- **Règle de particule pour le quantificateur universel** : Si F est de forme $\forall xAx$ alors S'=$\langle$R, $\sigma(x/\tau)$, $A\rangle$ pour toute constante τ choisie par l'attaquant R(Y)= ? en jouant le coup $?_{\forall/\tau}$.
- **Règle de particule pour le quantificateur existentiel** : Si F est de forme $\exists xAx$ alors S'=$\langle$R, $\sigma(x/\tau)$, $A\rangle$ pour toute constante τ choisie par le défenseur R(X)= ! en réponse au coup $?_\exists$ de l'attaquant R(Y)= ?.

3 Règles structurelles

On peut considérer un dialogue comme une séquence d'expressions étiquetées, les étiquettes[4] portant l'information concernant la signification *dans le* jeu de ces expressions. En tant que les dialogues sont des processus, ils sont dynamiquement définis par l'évolution d'un jeu, qui lie

[4]Par étiquette, on entend ce que l'on désigne en général par *label*. Voir [Gabbay 1996].

les unes aux autres ces étiquettes. En d'autres termes, l'ensemble d'expressions qui constitue un dialogue complet peut être dynamiquement déterminé par les règles d'un jeu, spécifiant comment l'ensemble peut être étendu à partir d'une formule-thèse initiale[5]. Les règles de particule font partie de la définition d'un tel jeu, mais il nous faut établir l'organisation générale du jeu, et c'est là le rôle des *règles structurelles*. En fait, tout en intégrant les règles de particule, les règles structurelles peuvent très bien déterminer un jeu où ce qui est recherché est la persuasion rhétorique et non la validité logique. Dans ce cas, la dialogique est une étude de l'argumentation en un sens plus large que le sens logique du terme.

Mais *lorsque le jeu concerne la validité des formules*, les règles structurelles doivent fournir une méthode de décision. Une formule A énoncée par **P** comme thèse d'un dialogue est valide si et seulement si **P** dispose d'une stratégie de victoire dans un jeu pour A, c'est-à-dire que les règles lui donnent la possibilité de se défendre contre toutes les attaques que les règles autorisent à **O**. Lorsque l'on ne considère que la validité des formules, il est utile de restreindre la signification du jeu dialogique. On peut alors considérer le jeu comme un processus qui détermine l'ensemble de tous les dialogues pertinents pour tester la validité de la thèse, ordonnés sous forme d'un arbre dont la racine est la thèse, et dont chaque bifurcation correspond à un choix propositionnel de **O**. **O** effectue un choix propositionnel chaque fois qu'il défend une disjonction, qu'il répond à l'attaque contre un conditionnel[6], ou qu'il attaque une conjonction ; cela correspond à la génération d'une nouvelle branche de l'arbre. **P** pourrait lui aussi générer une nouvelle branche à chaque choix propositionnel, mais son intérêt stratégique consiste bien entendu à rester dans la même branche[7]. Si l'on considère les dialogues comme des séquences de choix effectifs (c'est-à-dire d'actes de sujets épistémiques), on doit admettre la possibilité que le joueur **O** (respectivement **P**) ne soit pas assez malin pour se rendre compte que son intérêt est d'ouvrir (respectivement ne pas ouvrir) un nouveau dialogue (une nouvelle branche) chaque fois qu'il en a l'occasion. Cependant, puisque nous ne nous intéressons qu'à la notion intersubjective de validité des formules, et que nous voulons que

[5] La *thèse* d'un dialogue est la formule dialogiquement étiquetée avec laquelle le dialogue commence. Toute expression d'un dialogue n'est pas une formule, mais la thèse est nécessairement une formule complexe (cf. règles structurelles `SR-ST0` et `SR-ST4`).

[6] C'est-à-dire qu'il affirme le conséquent ou qu'il contre-attaque l'antécédent.

[7] Et bénéficier ainsi des concessions que **O** pourrait faire dans la partie du dialogue correspondant à l'autre branche, auxquelles il n'aurait pas accès si l'arbre bifurquait. Cf. règle structurelle `SR-ST1`.

l'équivalence entre les dialogues et les systèmes de preuve par tableaux se fasse par une construction aussi immédiate que possible, nous ferons l'hypothèse que chacun des joueurs suit toujours la meilleure stratégie possible. Le système qui résulte des considérations qui précèdent a pour nom *jeu stratégique*.

Voici les règles qui donnent les jeux stratégiques.

`SR-ST0` **(début de partie) :** Les expressions d'un dialogue sont numérotées, et sont énoncées à tour de rôle par **P** et **O**. La thèse porte le numéro 0, et est énoncée par **P**. Toutes les expressions paires, y compris la thèse, sont **P**-étiquetées, et toutes les expressions impaires sont des coups de **O**. Tous les coups suivant la thèse sont des réponses à un coup joué par un autre joueur, et obéissent aux règles de particule et aux autres règles structurelles.

`SR-ST1` **(gain de partie) :** Un dialogue est clos si et seulement si il contient deux occurrences de la même formule élémentaire, respectivement étiquetées **X** et **Y**, et qu'aucune de ces occurrences n'est entre crochets "$<$" et "$>$"[8]. Sinon le dialogue reste ouvert. Le joueur qui a énoncé la thèse gagne le dialogue si et seulement si le dialogue est clos. Un dialogue est terminé si et seulement si il est clos, ou si les règles (structurelles et de particule) n'autorisent aucun autre coup. Le joueur qui a joué le rôle d'opposant a gagné le dialogue si et seulement si le dialogue est terminé et ouvert.

`SR-ST2I` **(fermeture de tour intuitionniste) :** A chaque coup, chaque joueur peut soit attaquer une formule complexe énoncée par l'autre joueur, soit se défendre *de la dernière attaque contre laquelle il ne s'est pas encore défendu*. On peut attendre avant de se défendre contre une attaque tant qu'il reste des attaques à jouer. Si c'est au tour de X de jouer le coup n, et que Y a joué deux attaques aux coups l et m (avec $l < m < n$), auxquelles X n'a pas encore répondu, X ne peut plus se défendre contre l.

`SR-ST2C` **(fermeture de tour classique) :** A chaque coup, chaque joueur peut soit attaquer une formule complexe énoncée par l'autre

[8]La mise entre crochet d'une expression signifie qu'elle ne peut être attaquée dans ce dialogue, soit parce que ce n'est pas une formule (par exemple $<?_R>$), soit en conséquence d'un choix propositionnel de l'opposant qui engendre deux dialogues distincts. Il faut noter que les choix de l'opposant interdisent la contre-attaque *pour lui aussi*. Cf. exemples.

joueur, soit se défendre contre *n'importe quelle* attaque de l'autre joueur (y compris celles auxquelles il a déjà répondu).

`SR-ST3/SY` **(bifurcation stratégique) :** A chaque choix propositionnel (c'est-à-dire lorsque X défend une conjonction, attaque une disjonction, ou répond à une attaque contre un conditionnel), X peut engendrer deux dialogues distincts, qui se différencient seulement par les expressions produites par ce choix. X peut passer du premier dialogue au second si et seulement si il perd celui qu'il choisit en premier. Aucun autre coup ne génère de nouveau dialogue.

`SR-ST4` **(usage formel des formules élémentaires) :** **P** ne peut introduire de formule élémentaire : toute formule élémentaire dans un dialogue doit être introduite par **O**. On ne peut attaquer les formules élémentaires.

`SR-ST5` **(tactiques de répétition)**[9] **:**

- Lorsque l'on joue avec les règles structurelles *classiques*, **P** peut défendre (attaquer) à nouveau un quantificateur existentiel (universel) en utilisant une constante d'individu différente (mais pas nouvelle) si et seulement si la première défense (attaque) a obligé **O** à introduire une nouvelle constante. Aucune autre répétition n'est autorisée.
- Lorsque l'on joue avec les règles *intuitionnistes*, **P** peut répéter une attaque si et seulement si **O** a introduit une nouvelle formule élémentaire qui peut maintenant être utilisée par **P**. Aucune autre répétition n'est autorisée.

4 Exemple de dialogue

	O			**P**	
				$(a \wedge \neg a) \rightarrow \neg a$	0
1	$(a \wedge \neg a)$	0		$\neg a$	2
3	a	2		$\otimes$	
5	$\neg a$		1	$<?_R>$	4
				a	6

P gagne.

[9]La tactique de répétition consiste (informellement) à répéter un coup inutile pour la victoire dans le jeu, simplement pour empêcher l'adversaire de gagner et obtenir le "nul", c'est-à-dire un dialogue sans fin.

La colonne extérieure indique le numéro du coup, la colonne intérieure le coup qui est visé (lors d'une attaque). Dans cet exemple, c'est le proposant qui gagne. Il peut employer en guise d'attaque la proposition atomique qui a été posée par l'opposant dans le coup 3. L'opposant n'a alors plus rien à répondre : il ne lui reste aucune attaque à jouer.

5 Dialogues et tableaux

Afin de préciser la relation entre le concept de validité au sens dialogique et celui de validité au sens des traditions majeures de la logique, on peut construire des systèmes de correspondance stricte montrant comment passer des dialogues aux tableaux[10]. Tous les systèmes introduits dans la littérature sont démontrés complets par rapport aux systèmes de tableaux correspondants. Voir notamment : [Rahman 1993] et [Rahman & Rückert 2001a] pour les systèmes présentés ici.

6 Dialogique modale

La dialogique modale est conçue pour permettre de relativiser l'assertion des formules à des contextes qui peuvent être différents. Un contexte dialogique est caractérisé :

– par le fait qu'il a été ouvert à l'intérieur du dialogue à partir de quelque autre contexte dialogique,
– par les coups qui ont été portés par **O** et **P** dans ce contexte dialogique, et
– par le fait que quelques propositions atomiques ont le droit d'être posées dans ce contexte dialogique.

Le fait que l'assertion des formules est relativisée aux contextes oblige à reformuler la règle structurelle formelle :

`SR-ST5M` **(usage modal formel des formules élémentaires) : P**, dans un contexte dialogique, n'a le droit de poser comme arguments que des propositions atomiques telles que **O** les ait déjà posées auparavant dans le même contexte dialogique. **O** a toujours le droit de poser des propositions atomiques (dans la mesure où les règles de particule et

[10]Par tableaux, nous entendons ici le système de décision développé par Beth, auquel [Smullyan 1968] a donné sa forme actuelle, et tels qu'on les trouve systématisés dans [Gabbay *et alii* 1999].

les autres règles structurelles le permettent). Les propositions atomiques (dans le dialogue modal formel) ne sont pas attaquables.

Pour la notation : à des fins ultérieures il est intéressant d'introduire un système de numérotation ainsi que quelques définitions :

- Le contexte dialogique de départ, dans lequel la thèse du dialogue est posée, est noté 1.
- Le premier contexte dialogique qui est ouvert à partir du contexte dialogique portant le numéro n est noté $n.1$, le second $n.2$, et de la même manière le m-ième $n.m$.[11]
- Un contexte dialogique n est dit supérieur à un contexte dialogique $n.m$, et de manière correspondante $n.m$ est dit inférieur à n.
- Un contexte dialogique n est pour $n.m.l$ un contexte dialogique supérieur de profondeur 2, inversement $n.m.l$ est, par rapport à n, un contexte dialogique inférieur de profondeur 2. La supériorité et l'infériorité sont ainsi définies pour des profondeurs quelconques.

Introduisons maintenant les règles de particule pour les opérateurs modaux $\Box$ et $\Diamond$.

$\Box, \Diamond$	**Attaque**	**Défense**
$\Box A$ (dans le contexte dialogique m)	$?_{\Box/n}$ (pour un contexte dialogique autorisé n, que l'attaquant choisit)	A (dans n)
$\Diamond A$ (dans le contexte dialogique m)	$?_{\Diamond}$ (dans m)	A (pour un contexte dialogique autorisé n, que le défenseur choisit)

Plus formellement, définissons d'abord l'état de jeu modal :

Definition 5. *(état de jeu modal) :*
Un état de jeu modal est un n-uplet $\langle \rho, \sigma, A, \lambda \rangle$ où ρ et σ sont définis comme précédemment, A est une formule et λ est une assignation de contextes aux formules.

Règle de particule ($\Box$) : Un état de jeu $\langle \rho, \sigma, \Box A, \lambda \rangle$ est suivi par un état de jeu $\langle \rho, \sigma, A, \lambda_{A/m} \rangle$, en réponse au coup $?_{\Box/m}$ de l'attaquant, où $\lambda_{A/m}$ est l'assignation du contexte m à la formule A et m est l'indice d'un contexte dialogique choisi par l'attaquant.

[11] Ce système de numérotation correspond précisément à celui utilisé pour les mondes possibles dans [Fitting 1983].

Règle de particule ($\Diamond$) : Un état de jeu $\langle \rho, \sigma, \Diamond A, \lambda \rangle$ est suivi par un état de jeu $\langle \rho, \sigma, A, \lambda_{A/m} \rangle$, en réponse au coup $?_\Diamond$ de l'attaquant, où $\lambda_{A/m}$ est l'assignation du contexte m à la formule A et m est l'indice d'un contexte dialogique choisi par le défenseur.

Les contextes accessibles au choix des joueurs sont stipulés par les définitions et les règles structurelles suivantes :

Definition 6. *(choix d'un contexte dialogique) :*
Un contexte m est choisi par X *quand X choisit l'indice du contexte m lorsqu'il attaque une formule de forme $\Box A$, ou lorsqu'il défend une formule de forme $\Diamond A$ dans le contexte m. L'indice de contexte dialogique m est* nouveau *lorsqu'il est choisi pour la première fois. Un contexte dialogique m est* introduit *lorsque l'indice m est nouveau. Le contexte initial est considéré comme donné en même temps que la thèse, et même s'il n'a jamais été choisi, il n'est pas nouveau.*

`SR-ST9.1M` : **O** peut choisir n'importe quel contexte dialogique déjà existant ou bien en ouvrir un nouveau, lorsque les autres règles le lui autorisent[12]. **P** ne peut introduire un nouveau contexte, il a seulement le droit de choisir des contextes dialogiques déjà introduits par **O**. Ses choix sont de plus restreints par les règles `SR-ST9.2M` et `SR-ST9.3M` en vigueur dans le jeu.

Pour le système K vaut le principe selon lequel **P**, lors d'un choix de contexte dialogique, doit nécessairement changer de contexte.

`SR-ST9.2KM` **(K)** : Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur de degré 1 déjà existant.

Pour les quatre systèmes T, B, S4 et S5, la relation d'accessibilité entre contexte est réflexive. Cela signifie dialogiquement que **P** peut toujours choisir de rester dans le contexte dans lequel il est attaqué :

[12]Il est facile de voir que, pour des raisons stratégiques, il est préférable pour **O** d'ouvrir un nouveau contexte chaque fois que cela est possible. Cela vient du fait que **P**, dans un dialogue formel, ne peut utiliser dans un contexte donné que les propositions atomiques que **O** a déjà concédées *dans ce même contexte.* C'est pourquoi **P** s'efforcera de maintenir l'argumentation dans des contextes dialogiques où **O** a concédé de nombreuses formules (et surtout les formules pertinentes). De manière analogue, **O** essaiera toujours de faire passer l'argumentation dans de nouveaux contextes dialogiques où il n'a encore rien concédé.

`SR-ST9.2TM` **(réflexivité)** : Lors d'un choix de contexte dialogique, il est toujours possible pour **P** de rester dans le même contexte dialogique.

Au sujet de la règle (`SR-ST9.3`) T, B, $S4$ et $S5$ se différencient :

`SR-ST9.3TM` **(T)** : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur de degré 1 déjà existant.

`SR-ST9.3BM` **(B)** : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur ou supérieur de degré 1 déjà existant[13].

`SR-ST9.3S4M` **(S4)** : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique inférieur déjà existant de degré quelconque[14].

`SR-ST9.3S5M` **(S5)** : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. Lors d'un choix de contexte dialogique **P** peut choisir un contexte dialogique déjà existant quelconque[15].

La règle pour D (*serial frames*) transgresse le principe de formalité de l'usage des contextes dialogiques. La règle suivante se substitue donc à la règle `SR-ST9.1M`. Pour produire un système dialogique équivalent à D, il faut ajouter la règle `SR-ST9.2KM`.

`SR-ST9.1DM` **(D)** : **O** peut choisir tout contexte dialogique que les autres règles autorisent. **P** peut introduire un contexte dialogique inférieur de profondeur 1 à celui dans lequel il est attaqué. Ses autres choix sont soumis à la règle `SR-ST6.2KM`.

---

[13] La possibilité de choisir un contexte dialogique supérieur correspond à la symétrie de la relation d'accessibilité dans la sémantique standard.

[14] La transformation de T en S4 consiste en ce que dans S4 on peut choisir des contextes dialogiques inférieurs de degré quelconque. Elle correspond à l'ajout de la transitivité de la relation d'accessibilité dans la sémantique standard.

[15] Dans la sémantique standard, la relation d'accessibilité est réflexive, symétrique et transitive.

7 Nominaux

Les nominaux, dont le concept (d'après [Blackburn 2001a]) remonte à Prior, sont des formules élémentaires, dont le rôle est de désigner univoquement un contexte. Soit NOM une fonction assignant à chaque contexte d'indice n, introduit au cours du dialogue, une formule élémentaire ν_n.[16] Les formules élémentaires ν assignées par NOM sont appelées nominaux, et le contexte n est considéré comme la *dénotation* de la formule ν_n. L'introduction des nominaux appelle deux règles structurelles particulières :

Règle d'usage des nominaux : X-ν_n ne peut être joué que dans le contexte dialogique n. Le joueur soumis à la restriction formelle[17] ne peut utiliser un nominal que s'il a été introduit au préalable par un joueur non soumis à cette restriction.

Cette règle appelle une définition précise de la notion d'introduction d'un nominal :

Definition 7. *(introduction d'un nominal) :*
Un nominal est dit être introduit *par un joueur lorsque soit :*

1. *Il est posé par un joueur de la même manière que les autres formules atomiques ;*
2. *Le label du contexte dialogique qui le dénote a été utilisé (et ce pour la première fois dans le jeu) par un joueur pour attaquer un opérateur de nécessité ;*
3. *Un joueur se défend (pour la première fois dans le jeu) d'une attaque sur un opérateur de possibilité dans le contexte dénoté par le nominal.*

Ce qu'il nous faut à présent, c'est une règle établissant la manière dont l'introduction des contextes par **O** se rattache à la (aux) concession(s) concernant les relations d'accessibilité. En réalité, c'est cette règle qui, dans le langage non hydride, décrit la logique modale K. Voyons donc une généralisation de cette règle qui devrait rendre possible des jeux où **P** peut forcer **O** à concéder les relations d'accessibilité à l'aide de l'introduction de nominaux.

[16] Voir la section suivante pour une discussion plus détaillée de l'usage de ces indices.

[17] Au début du dialogue, c'est toujours **P** qui est soumis à la restriction formelle. Nous verrons plus loin que les SSD, comme la dialogique connexive, autorisent un changement de cette situation.

Règle formelle d'accessibilité : Dès qu'un contexte n a été introduit par **O** pour attaquer ou pour défendre une modalité en m, il peut être utilisé par **P** afin d'attaquer ou de défendre en m l'une ou l'autre modalité.

Il nous faut maintenant définir l'usage de l'opérateur @, afin d'hybrider notre langage **L**. Syntaxiquement d'abord :

Soit m un indice de contexte dialogique, c'est-à-dire une suite finie d'entiers, de forme $n.o.p.\ldots$, et soit i une variable libre dont le domaine est l'ensemble des indices de contextes dialogiques. $@_m$ ou $@_i$ peuvent être ajoutés à toute *ebf* de **L** pour former une nouvelle *ebf* : si A est une *ebf* de **L**, possiblement complexe, $@_m A$ et $@_i A$ sont des *ebf*. Quels que soient A et B deux *ebf* de **L** et $*$ un connecteur dyadique (c'est-à-dire $* \in\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$), $@_m A * @_m B$ peut être écrit $@_m(A * B)$, et $@_i A * @_i B$ peut s'écrire $@_i(A * B)$.

L'idée directrice derrière l'opérateur @ est de permettre de mentionner dans le langage-objet un contexte déterminé, ou une classe déterminée de contextes. Cela permet, entre autres[18], de dissocier l'assertion de la possibilité de défendre la formule A dans un contexte dialogique m (ou dans un contexte quelconque noté i) et le contexte n où cette assertion est faite, qui peut bien entendu être distinct de m.

Ainsi, X-$@_m A$(ou X-$@_i A$) peut être assertée dans tout contexte dialogique n (éventuellement distinct de m), et sa signification dialogique locale revient pour le joueur X à affirmer qu'il est disposé à défendre A dans le contexte m (ou dans tout contexte m choisi par Y pour instancier i). Pour cet indice i (qui fonctionne comme une variable libre), nous nous démarquerons de la démarche de [Blackburn 2001a] : en effet, au lieu de commencer un jeu avec les instanciations appropriées de l'indice i, le moment d'instanciation sera dans notre version un coup *à l'intérieur même du jeu*, reflétant ainsi la nature dynamique d'une sémantique orientée sur la pragmatique.

Il nous faut donc deux règles de particule pour l'opérateur @, selon qu'il est associé à un index déterminé ou à une variable libre[19] :

Règle de particule @ (*avec un index instancié*) : D'une formule de la forme $@_m A$, où m est l'indice d'un contexte dialogique, suit un état de jeu modal $\langle$R, σ, A, $\lambda_{A/m}\rangle$, en réponse au coup $?_@$ de l'attaquant, où

[18] Le pouvoir expressif des logiques hybrides est remarquable. Voir à ce sujet [Blackburn & Seligman 1998].

[19] Cette distinction de deux règles correspond à la distinction, dans la littérature hybride, entre les nominaux et les variables d'état (*state variables*). Voir par exemple [Blackburn & Seligman 1998].

m est l'indice d'un contexte dialogique stipulé par $@_m$.

Règle de particule @ (*avec une variable libre*) : D'une formule de forme $@_i A$, où i est une variable libre[20] dont le domaine est l'ensemble des indices des contextes dialogiques, suit un état de jeu modal $\langle \mathrm{R}, \sigma, A, \lambda_{A/m}\rangle$, en réponse au coup $?_{i/m}$, de l'attaquant, où m est l'indice d'un contexte dialogique choisi par l'attaquant. Si la formule A contient un nominal de forme ν_i, la variable i sera instanciée conformément au choix de l'attaquant stipulé par le coup $?_{i/m}$.

Cette sémantique locale doit maintenant être complétée par une règle structurelle déterminant les contextes dialogiques éligibles pour jouer une attaque contre un opérateur @ :

Règle d'attaque @ : Lors d'une attaque contre $@_i$, X peut choisir n'importe quel indice pour instancier la variable i dans la mesure où les autres règles structurelles le lui permettent.

8 Les Hypothèses structurelles

Un des avantages des langages modaux hybrides est qu'ils permettent d'expliciter *au niveau du langage-objet* la règle structurelle (`SR-ST.3M`), restreignant les choix de **P** dans les dialogues modaux. Cette règle correspond aux *frame conditions* de la littérature standard, c'est-à-dire qu'elle permet de distinguer entre les différents systèmes en altérant l'accessibilité entre les contextes. On trouve dans la littérature sur la logique hybride, dans [Blackburn 2001a] par exemple, ces formulations, que nous désignerons sous le terme d'*hypothèses structurelles*[21] :

$$\begin{array}{ll}
\textit{Réflexivité} : & @_i\Diamond\nu_i \\
\textit{Symétrie} : & @_i\Box\Diamond\nu_i \\
\textit{Transitivité} : & \Diamond\Diamond\nu_i \rightarrow \Diamond\nu_i \\
\textit{Densité} : & \Diamond\nu_i \rightarrow \Diamond\Diamond\nu_i \\
\textit{Euclidianité} : & (\Diamond\nu_i \wedge \Diamond\nu_j) \rightarrow (@_i\Diamond\nu_j \vee @_j\Diamond\nu_i) \\
\textit{Sérialité} : & \Diamond\nu_c
\end{array}$$

[20] Bien entendu, il est toujours possible de combiner l'opérateur @ et les quantificateurs, comme cela se pratique en logique hybride. (Voir [Blackburn & Seligman 1998]).

[21] Un des arguments frappants en faveur de l'hybridation des langages modaux est que ces langages ont la capacité d'exprimer propositionnellement (c'est-à-dire dans le langage-objet) des propriétés métathéoriques que les langages modaux habituels ne peuvent exprimer (par exemple, l'antisymétrie de la relation d'accessibilité : $@_i\Box\neg\Diamond\nu_i$).

Pour comprendre la signification de ces formules, il convient de prendre en compte la situation suivante : on veut énoncer les hypothèses structurelles en toute généralité. Cela signifie que les noms de contextes qui composent ces hypothèses sont remplacés par des variables. Afin de permettre aux joueurs de déterminer de façon dynamique quels sont les contextes qui sont désignés par les variables, nous allons considérer que *dans le langage-objet*[22], ν_c et ν_i sont des expressions contenant une variable libre dont la signification (c'est-à-dire le jeu associé) correspond à une quantification (respectivement existentielle et universelle). Une formule de forme $\#A$, où $\#$ est un opérateur modal et A est une formule contenant une expression quantifiée de forme ν_c ou ν_i ne peut donc être associée à une proposition (c'est-à-dire engendrer un dialogue) qu'à la condition préalable que le nominal soit instancié. Ceci appelle deux règles de particules :

Règle de particule (ν_c) : Lorsqu'une formule assertée par X dans un dialogue contient au moins un nominal de forme ν_c, en réaction à l'attaque Y- $?_c$, s'ensuit un état de jeu $\langle$R, σ, $A_{c/n}\rangle$ où R et σ sont définis comme d'habitude et $A_{c/n}$ est le produit de la substitution du nominal ν_n à l'expression ν_c dans la formule A, avec n l'indice d'un contexte dialogique choisi par le défenseur X= !.

Règle de particule (ν_i) : Lorsqu'une formule assertée par X dans un dialogue contient au moins un nominal de forme ν_i, en réaction à l'attaque Y- $?_{i/n}$, s'ensuit un état de jeu $\langle$R, σ, $A_{i/n}\rangle$ où R et σ sont définis comme d'habitude et $A_{i/n}$ est le produit de la substitution du nominal ν_n à l'expression ν_i dans la formule A, avec n l'indice d'un contexte dialogique choisi par l'attaquant Y= ?.

Chacune des formules que nous avons désignées comme hypothèses structurelles, lorsqu'elle est assertée, engendre un dialogue dans lequel la propriété correspondante de la relation d'accessibilité est *concédée* ou *exhibée*[23].

[22]Dans le métalangage, c'est-à-dire dans notre texte, lorsque nous voudrons désigner un nominal déterminé (mais que nous ne spécifierons pas), nous utiliserons l'expression ν_n.

[23]Au sens de la règle formelle d'accessibilité introduite plus haut.