PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

GEORGES BOHNKE

Henri Poincaré et la découverte des groupes fuchsiens ou la géométrie en action

Philosophia Scientiæ, tome 1, nº 4 (1996), p. 97-105
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1996__1_4_97_0>

Henri Poincaré et la découverte des groupes fuchsiens ou la géométrie en action

Georges Bohnke
Université Henri Poincaré (Nancy 1)
Departement de Mathématiques. Institut Elie Cartan

Philosophia Scientiæ, 1 (4), 1996, 97-105.

Résumé. Durant l'été 1880, le jeune Henri Poincaré agé de 26 ans, et qui cherche à construire certaines fonctions automorphes, trouve soudain la méthode adéquate en entrant dans un autobus...
Dans cette article, nous montrons comment Poincaré, par ses intuitions géométriques fulgurantes, a trouvé les groupes fuchsiens et a défini la plupart des notions fondamentales dela théorie des groupes discrets.

Abstract. In the summer of 1880, the 26-year-old Henri Poincaré, who was trying to construct automorphic functions, suddently found the right way to do it, while entering the bus...
In this paper, we show how Poincaré has found Fuchsians groups with brillant geometrical intuitions and has defined some of the fundamental notions of discrete group theory.

Introduction

Dans son article «Théorie des groupes fuchsiens» paru en 1882 dans le tome 1 de la nouvelle revue *Acta Mathematica*, Poincaré se propose d'étudier en détail les groupes qu'il appelle "fuchsiens" en l'honneur du mathématicien L. Fuchs, dont les travaux, ainsi que ceux de F. Klein et H.A. Schwarz sur les fonctions elliptiques et modulaires, sont à l' origine de la découverte des susdits groupes et des fonctions automorphes associées : les fonctions fuchsiennes. D'ailleurs, au sujet du mémoire de Fuchs [1880], qui est plus précisément le point de départ de ses recherches, Poincaré (il a 26 ans en 1880 !) écrit :

> Bien que les groupes étudiés dans ce dernier travail se ramenassent tous à des groupes déjà connus, c'est la lecture de ce remarquable mémoire qui m'a guidé dans mes premières recherches et qui m'a permis de trouver la loi de génération des groupes fuchsiens et d'en donner une démonstration rigoureuse.
> Je l'ai donnée d'abord dans un mémoire que j'eus l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie des Sciences dans le concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques du 1° juin 1880 et j'ai poursuivi l'étude des groupes dans une série de travaux insérés aux Comptes Rendus de l'année 1881. [Poincaré 1882a, 62]

Poincaré considère le groupe PSL(2, $\mathbb{R}$) de toutes les transformations conformes T du plan complexe achevé $\mathbb{C}^\infty$ (sphère de Riemann) qui conservent la droite réelle X et par conséquent le demi-plan supérieur $\mathbb{H}^2$, transformations qu'il appelle substitutions réelles et qui sont définies par :

$$(\mathrm{T})\ \mathrm{t} = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (\text{où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont réels et } ad - bc = 1)$$

T admet deux points fixes (éventuellement confondus ou à l'infini) α

et β . Dans le cas où α et β sont distincts, T peut se mettre sous la forme :

(1) $$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = K\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

(K est le multiplicateur de T)

Dans le cas où α = β, T peut se mettre sous la forme :

(2) $$\frac{1}{t-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + k \text{ , } k \text{ réel}$$

Depuis Klein, on distingue les T elliptiques qui ont deux points fixes conjugués α et $\beta = \bar{\alpha}$, les T hyperboliques qui ont deux points fixes α et β distincts sur X et les T paraboliques qui ont un point fixe double $\alpha = \beta$ sur X.

Poincaré appelle la "L" d'un arc de courbe γ de $\mathbb{H}^2$, l'intégrale curviligne de la forme différentielle $|dz|/y$ sur γ et la "S" d'un domaine A de $\mathbb{H}^2$, l'intégrale double de la forme $dxdy/y^2$ sur A. Le demi-plan $\mathbb{H}^2$ est un modèle de la géométrie hyperbolique dont la distance est définie par la métrique riemannienne $|dz|/y$. Ce modèle, déja connu de Beltrami, est souvent appelé demi-plan de poincaré en raison de l'usage que celui-ci en a fait ; mais laissons parler le Maître :

> Supposons que l'on convienne d'enlever aux mots "droites", "longueur", "distance", "surface" leur signification habituelle, d'appeler droite tout cercle qui a son centre sur X, longueur d'une courbe ce que nous venons d'appeler sa L, distance de deux points la L de l'arc de cercle qui unit ces deux points en ayant son centre sur X et enfin surface d'une aire plane ce que nous appelons sa S.
> Supposons de plus que l'on conserve aux mots "angles" et "cercle" leur signification, mais en convenant d'appeler centre d'un cercle le point qui est à une distance L constante de tous les points du cercle et rayon cette L. Si l'on adopte ces dénominations, les théorèmes de Lobatchewski sont vrais, c'est-à-dire que tous les théorèmes de la géométrie ordinaire s'appliquent à ces nouvelles quantités, sauf ceux qui sont une conséquence du postulatum d'Euclide.
> Cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches, *mais je ne l'emploierai pas ici pour éviter toute confusion.* [Poincaré 1882a, 8, je souligne]

Poincaré décrira lui-même plus tard, dans *Science et Méthode* [1908], le processus mental qui l'amena à reconnaître l'importance fondamentale de la géométrie non euclidienne dans ses travaux sur les fonctions automorphes :

> Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude, je ne pus m'endormir ; les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.
> Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. J'arrivais sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.
> A ce moment, je quittais Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'Ecole des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commençée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience. [Poincaré 1908]

1. Le théorème de Poincaré

Pour la commodité du lecteur, voici quelques définitions ainsi que le résultat connu sous le nom de «théorème de Poincaré».

1.1. Groupes fuchsiens

> Un sous-groupe G de $PSL(2,\mathbb{R})$ est fuchsien s'il est discret pour la topologie naturelle de $PSL(2,\mathbb{R})$.

Un groupe fuchsien agit d'une manière discontinue dans $\mathbb{H}^2$, c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \mathbb{H}^2$, $g(K) \cap K = \emptyset$, sauf pour un nombre fini d'éléments g de G. (Poincaré ne considère que des groupes discontinus, mais ici "discret" et "discontinu" sont deux propriétés équivalentes.)

A conjugaison près par un élément de PSL(2,$\mathbb{C}$), un groupe fuchsien sera aussi un sous-groupe discret de PSL(2,$\mathbb{C}$) qui laisse invariant un disque Δ, ou un demi-plan quelconque Δ de $\mathbb{C}$. (Par exemple, si Δ est le disque unité ouvert $\{|z| < 1\}$, l'application $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ envoie isométriquement $\mathbb{H}^2$ sur Δ muni de la métrique $ds = \frac{2|dz|}{1-|z^2|}$, et à G correspond le groupe isomorphe G' par la formule de conjugaison $T = f \circ T \circ f^{-1}$).

Soit $A \subset \Delta$, on note A^* la fermeture de A *pour la topologie de Δ*. On peut alors introduire la notion de domaine fondamental :

1.2. Domaine fondamental

> Soit G un groupe fuchsien. Un sous-ensemble D de Δ est un domaine fondamental pour G si :
>
> (1) D est un domaine ;
>
> (2) il existe F tel que $D \subset F \subset D^*$ et deux points distincts de F ne sont jamais sur la même orbite ;
>
> (3) D est la réunion (disjointe) des images g(F), g parcourant G ;
>
> (4) l'aire hyperbolique de la frontière de D est nulle.

Remarque : La donnée de F et de ses images par les éléments du groupe G s'appelle un pavage hyperbolique de Δ ; c'est l'analogue des pavages euclidiens dont le plus simple est le pavage du plan par des carrés de même longueur ("papier quadrillé").

Soit D un domaine fondamental et supposons, en outre, qu'il est *localement fini* (c.a.d. pour tout compact K de Δ, K ne rencontre qu'un nombre fini d'images g(D*), $g \in G$), alors G*, ensemble des g tels que g(D*) rencontre D*, engendre G.

On démontre — ce que fait Poincaré [1882a, 16-20] — que D peut être un polygone hyperbolique convexe, que l'on note P dans la suite, et que Poincaré appelle le polygone générateur.

1.3. Côtés de P

> $s = P^* \cap g(P^*)$ est un côté de P si sa longueur hyperbolique n'est pas nulle.

Soit $G°$ l'ensemble des g tels que $P^* \cap g(P^*)$ est un côté de P et soit S l'ensemble des côtés de P.

1.4. Couplages par les côtés de P

L'application $f : G° \to S$ définie par $f(g) = s = P^* \cap g(P^*)$ est une bijection, $G°$ engendre G et l'application f définie par $f(s) = s' = \phi(g^{-1})$ associe deux par deux les côtés de P. On dit que f est un couplage des côtés de P et que s' est le conjugué de s.

Remarques :

1) Un côté de P peut être conjugué à lui-même et ne sont pris en compte, dans ce couplage, que les côtés non situés sur la frontière du disque (l'"absolu").

2) Le conjugué s' est précisément l'image de s par l'isométrie g^{-1} où $g = \phi^{-1}(s)$. Les deux côtés s et s' ont donc même longueur hyperbolique. D'autre part, si l'on prend pour modèle le disque unité, les arcs de cercles supports de s et s' sont tangents à un même cercle centré à l'origine et sont orthogonaux au cercle unité.

On appelle *sommet* de P l'intersection de deux côtés de P.

1.5. Cycles de P

Un cycle $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ est une orbite de G pour son action sur les sommets de P.

1.6. Le théorème de Poincaré

Si le groupe fuchsien est donné, il lui correspond un pavage hyperbolique par des polygones. Le couplage des côtés d'un polygone de ce pavage (d'ailleurs quelconque, le pavage étant "autosimilaire") fournit un système de *générateurs* $G°$ pour G ; les cycles donnent les *relations* dans $G°$. Plus précisément, soient $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, les angles formés par les côtés du polygone aux sommets du cycle, on a :

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n = \frac{2\pi}{k}, \; k \text{ entier} > 0$$

En effet, tous les sous-groupes d'isotropie des z_i, $1 \leq i \leq n$, sont conjugués et cycliques engendrés par un élément d'ordre k (qui peut-être égal à 1 et même toujours égal à 1 si G est le groupe fondamental d'une surface de Riemann. [cf. Farkas et Kra 1992, 209]).

Réciproquement, et c'est la partie importante du théorème de Poincaré, si l'on a un pavage hyperbolique du disque par des polygones, on en choisit un qui détermine un groupe fuchsien sans ambiguité par le couplage de ses côtés.

2. La méthode de Poincaré (d'après [Poincaré 1882a])

2.1. L'espace hyperbolique

Dans «Théorie des groupes fuchsiens», Poincaré, après avoir fixé le cadre (l'espace hyperbolique et son groupe d'isotropies) de ses travaux, commence par développer des considérations sur les générateurs (qu'il appelle «substitutions fondamentales») et les relations d'un groupe fuchsien. Il définit alors sans ambiguité [Poincaré 1882a, 11] l'expression d'un élément quelconque du groupe à l'aide des générateurs (ce que l'on appelle maintenant un "mot"). Puis il affirme :

> Si le groupe G est discontinu, il est clair qu'on pourra diviser le plan ou une partie du plan en une infinité de régions jouissant des propriétés suivantes :
> Chacune d'elles correspondra à l'une des substitutions du groupe G etc... [*ibid.*]

Il s'agit *grosso-modo* de la notion de domaine fondamental et de pavage associé à G. D'ailleurs, Poincaré précise :

> Le problème se ramène donc au suivant : subdiviser d'une manière régulière le plan ou une partie du plan en une infinité de régions toutes congruentes entre elles. [*ibid.*, 12]

Ayant "divisé" le demi-plan (ou le disque) par des régions R_i toutes "congruentes" (c.a.d. isométriques) entre elles et ne se chevauchant pas, Poincaré relie les propriétés de "voisinage" des régions aux propriétés du groupe ; en particulier, il définit le conjugué $s' = g^{-1}(s)$ d'un côté s d'une région R_0 en "traversant" la frontière de cette région à travers s pour se retrouver dans la région congruente $g(R_0)$ [*ibid.*, 13-15]. Il remarque qu'il peut prendre pour R_0 un polygone convexe qu'il appelle le polygone générateur [*ibid.*, 17]. Il définit alors les cycles qu'il classe en trois catégories (ses définitions sont heureusement assorties d'exemples !) ; puis il aborde la réciproque de son théorème, c'est-à-dire la démonstration de l'existence des groupes fuchsiens :

> Jusqu'ici nous avons raisonné sur les groupes fuchsiens en supposant qu'ils existaient et nous n'en avons pas démontré l'existence. Nous avons vu que tout groupe fuchsien G peut être considéré comme engendré par un polygone normal R_0 dont les

> côtés sont de deux sortes; ceux de la 1ère sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la 2de sorte sont des segments de l'axe X lui-même. Les côtés de la 1ère sorte sont au nombre de $2n$ et se répartissent en paires de côtés conjugués. Quand on connaît le polygone R_0 et la répartition de ses côtés en paires, le groupe G correspondant est en général parfaitement déterminé. Quant aux sommets, ils se répartissent en un certain nombre de cycles.
> Pour pouvoir donner naissance à un groupe fuchsien G, le polygone R_0 doit satisfaire à deux conditions :
> *1° Deux côtés conjugués doivent être congruents.*
> *2° La somme des angles d'un même cycle de la 1ère catégorie doit être une partie aliquote de 2π.*
> Ces conditions sont nécessaires ; sont elles suffisantes ? C'est ce que je vais démontrer. [*ibid.*, 27-28]

2.2. Classification en genres

Poincaré définit le genre d'un groupe fuchsien en lui associant une surface fermée obtenue par "collage" des côtés du polygone générateur :

> Supposons qu'on découpe le polygone R_0, puis qu'on le replie d'une manière continue et de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre; après cette déformation, R_0 sera devenu une surface fermée. [*ibid.*, 40-41]

Le genre du groupe est alors le genre de la surface fermée ainsi obtenue. (Voir, à ce sujet, la remarque de J. Dieudonné dans [Dieudonné 1989, 294], ainsi que [Stillwell 1992, chap. 5]).

Conclusion

Bien que certaines affirmations de H. Poincaré n'aient trouvé leurs justifications qu'à une date récente [cf. Maskit 1971 et Stillwell 1992, 182], celui-ci est bien le "découvreur" des groupes fuchsiens ainsi que des groupes kleinéens [Poincaré1883], ce qu'à fort bien dit A. Danjoy dans une note biographique :

> Fuchs, Klein et Schwartz, entre autres mathématiciens très illustres, cherchaient activement et inutilement depuis plusieurs années, les assises d'une grande théorie systématique, dont ils devinaient l'existence, pour en avoir exploré, fort remarquablement d'ailleurs, certains compartiments restreints. Comme on l'a dit, ils tournaient autour de la maison et n'en trouvaient pas l'accès. Sans coup férir, Poincaré entre dans l'édifice par la maîtresse porte, le visite en ses recoins jusqu'aux combles, en ouvre les fenêtres toutes grandes et décrit sur quelle contrée chacune d'elle prend sa vue. [Denjoy 1964, 40]

Les trois articles fondamentaux [Poincaré 1882a ; 1882b ; 1883], dans un style précis et allègre, donnent tous les détails de la nouvelle théorie. De nos jours, chacun peut reconnaître l'influence et l'originalité des idées de Poincaré dans la littérature mathématique. [Voir, par exemple, Beardon 1983 ; Ford 1951 ; Lehner 1964 ; Magnus 1974 ; Stillwell 1992].

Bibliographie

Beardon, A.F.

1983 *The Geometry of Discrete Groups*, Berlin : Springer.

Denjoy, Arnaud

1964 *Hommes, formes et le nombre*, Paris : Albert Blanchard.

Dieudonné Jean

1989 *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Bâle : Birkhäuser.

Farkas, H.M.et Kra, Irwin

1992 *Riemann Surfaces*, 2nd ed., Berlin : Springer.

Ford, L.R.

1951 *Automorphic Functions*, 2°ed., Chelsea.

Fuchs, Immanuel Lazarus

1880 Uber eine Klasse von Foncktionen mehrerer Variablen welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coeffizienten entstehen, *J. f. reine u. angew. Math.*, 89, 150-169.

Lehner, Joseph

1964 Discontinuous Groups and Automorphic Functions, *AMS surveys*, 8.

Magnus, Wilhelm

1974 Non Euclidean Tesselations and their Groups, *Pure and Applied Math.*, New-york/San Francisco/London : Academic Press.

Maskit, Bernard

1971 On Poincaré' Theorem for Fondamental Polygons, *Adv. in Math.*, 7, 219-230.

Poincaré, Henri

1882a Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Math.*, 1, 1-62.

1882b Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, *Acta Math.*, 1, 193-294.

1883 Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Math.*, 3, 49-92.

1908 *Science et méthode*, Paris : Flammarion.

Stillwell, J.

1992 *Geometry of Surfaces*, Berlin : Springer.