MICHEL CRÉTIN

Algèbres de Lie semi-simples et affines

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1992, fascicule 1
, p. 1-179

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1992___1_A1_0>

ALGEBRES DE LIE SEMI-SIMPLES ET AFFINES

Michel CRETIN

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Une matrice carrée $A = (A_{i,j})_{i,j \in I}$ (I ensemble fini non vide) est une matrice de Cartan généralisée si:

$$A_{i,i} = 2,\ i \in I$$
$$A_{i,j} = -\mathbb{N}\ ,i \neq j$$
$$A_{i,j} = 0 \Rightarrow A_{j,i} = 0$$

Si, de plus, A est le produit d'une matrice diagonale et d'une matrice symétrique définie positive A est appelée une matrice de Cartan.

On sait classiquement qu'il existe une bijection naturelle entre les matrices de Cartan et les classes à isomorphisme près d'algèbres de Lie semi-simples complexes: l'algèbre de Lie correspondant à une matrice de Cartan A est définie par des générateurs $(X_i, Y_i, H_i)_{i \in I}$ soumis aux relations:

$$[H_i, H_j] = 0$$
$$[H_i, X_j] = A_{i,j} X_j\ ,\ [H_i, Y_j] = -A_{i,j} Y_j$$
$$[X_i, Y_i] = H_i \text{ et } [X_i, Y_j] = 0,\ i \neq j$$
$$\mathrm{ad}_{X_i}^{1-A_{i,j}}(X_j) = \mathrm{ad}_{Y_i}^{1-A_{i,j}}(Y_j) = 0,\ i \neq j$$

Pour toute matrice de Cartan généralisée A, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ définie par cette présentation est l'algèbre de Kac-Moody associée à A.

Pour toute algèbre de Lie simple complexe de dimension finie, de matrice de Cartan A, l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(\tilde{A})$, où $\tilde{A}$ est la matrice de Cartan généralisée définie par le graphe de Dynkin complété de $\mathfrak{g}$, est l'algèbre de Lie affine $\tilde{\mathfrak{g}}$ associée à $\mathfrak{g}$.

D'autre part, il existe une réalisation plus concrète de l'algèbre affine $\tilde{\mathfrak{g}}$. En effet on montre que l'espace vectoriel $H^2(\hat{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$, où $\hat{\mathfrak{g}}$ est l'algèbre de Lie des applications régulières de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathfrak{g}$ (algèbre de lacets de $\mathfrak{g}$), est de dimension 1. Ainsi $\hat{\mathfrak{g}}$ possède, à isomorphisme près, une unique extension centrale qui est l'algèbre de Kac-Moody affine $\tilde{\mathfrak{g}}$.

A toute algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ est associé un groupe de Lie (simplement connexe) G et une application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ de sorte que, pour toute représentation de dimension finie $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$, il existe un unique morphisme de groupes de Lie $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ tel que l'on ait:

$$\exp(\rho'(X)) = \rho(\exp(X)) \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

Plus généralement, une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (de dimension éventuellement infinie) est intégrable (KAC [2]) si elle est engendrée par l'ensemble $F_{\mathfrak{g}}$ des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que ad_x soit un endomorphisme localement fini de $\mathfrak{g}$ et une représentation:

$$\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

est intégrable si, pour tout $X \in F_{\mathfrak{g}}$, $\rho'(X)$ est un endomorphisme localement fini de V. Il est alors encore possible d'associer à $\mathfrak{g}$ un groupe G et une application exponentielle $\exp: F_{\mathfrak{g}} \longrightarrow G$ de sorte que toute représentation intégrable ρ' de $\mathfrak{g}$ définisse un homomorphisme de groupes:

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

tel que $\exp(\rho'(X)) = \rho(\exp(X))$ pour tout $X \in F_{\mathfrak{g}}$.

Naturellement, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de dimension finie on retrouve le groupe de Lie simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On remarque d'ailleurs que cette méthode fournit une construction algébrique élémentaire et globale du groupe G.

Lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple le signe des constantes de structure de $\mathfrak{g}$ a été déterminé par TITS ([1]) en utilisant le fait, qui résulte de la théorie des groupes algébriques, qu'à toute racine α de $\mathfrak{g}$ correspond un sous-groupe G_α de G qui est isomorphe au groupe $SL(2,\mathbb{C})$. La construction précédente fournit une démonstration élémentaire de cette propriété (cf [1] p 28 et appendice p 52).

Une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ de dimension finie possède une représentation linéaire de dimension finie fidèle $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ telle que la représentation associée du groupe G soit elle aussi fidèle; on en déduit canoniquement une représentation intégrable:

$$\tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\hat{V})$$

de l'algèbre de Kac-Moody affine $\tilde{\mathfrak{g}}$, où $\hat{V}$ est l'espace vectoriel des applications régulières de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans V. Si $\tilde{G}$ est le groupe de Kac-Moody affine, associé à l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ par la construction esquissée ci-dessus, on obtient un homomorphisme canonique de groupes:

$$\tilde{G} \longrightarrow GL(\hat{V})$$

dont l'image n'est autre que le groupe de lacets $\hat{G}$ de G, c'est à dire le groupe des applications régulières de $\mathbb{C}^*$ dans G (on a aussi $\hat{G} = \underline{G}(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, où $\underline{G}$ est le $\mathbb{C}$-groupe algébrique tel que $\underline{G}(\mathbb{C}) = G$). On montre alors, en utilisant la structure de système de TITS dont est muni le groupe $\tilde{G}$ d'après KAC-PETERSON ([1]) que l'homomorphisme précédent définit une extension centrale:

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \{1\}$$

ainsi qu'il est affirmé dans KAC [2] (p 209).

Les notes présentées ici ont pour origine un cours de DEA fait au 1er semestre de l'année 1990-91 et consacré aux algèbres de Lie semi-simples complexes et aux algèbres de Kac-Moody affines.

Dans la 1^{ière} partie (chapitres I à III), on se propose d'introduire le plus directement possible les principales propriétés des algèbres de Lie semi-simples complexes (ou plus généralement sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0) . En particulier, au lieu de considérer les algèbres nilpotentes (resp résolubles) générales on s'est contenté du cas particulier des sous-algèbres strictement trigonalisables (resp trigonalisable) de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Ensuite on définit les algèbres de Lie semi-simples $\mathfrak{g}$ comme celles ne possédant pas d'idéal abélien non trivial et on démontre le critère de Cartan grâce à la théorie des répliques de Chevalley. Le théorème de semi-simplicité de Weyl est établi en mettant en évidence son aspect cohomologique. Enfin, les sous-algèbres de Cartan sont introduites directement comme les sous-algèbres diagonalisables maximales de $\mathfrak{g}$.

La 2^{ième} partie (chapitres IV et V) est consacrée aux propriétés des racines d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ démontrées classiquement à l'aide de la théorie des représentations de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Ensuite on établit la correspondance entre les systèmes simples de racines et les chambres de Weyl et on introduit la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$. On termine cette partie par la définition par générateurs et relations du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$.

Dans la $3^{\text{ième}}$ partie (chapitres VI à IX) on étudie la théorie des représentations finies de $\mathfrak{g}$. Tout d'abord on introduit les algèbres enveloppantes, puis les modules de Verma et on démontre, à l'aide de l'isomorphisme de Harish-Chandra qu'ils sont de longueur finie. Ensuite on établit que les classes d'isomorphismes des modules simples de dimension finie sont en bijection avec $\mathbb{N}^l$, où l est le rang de $\mathfrak{g}$ (dimension d'une sous-algèbre de Cartan). Enfin on explicite la structure du groupe de Grothendieck de modules de dimension finie et on conclut cette partie par une démonstration de la formule des caractères de Weyl.

Dans la $4^{\text{ième}}$ partie (chapitres X et XI) on construit de manière purement algébrique, en suivant la méthode de Kac-Peterson pour la construction des groupes de Kac-Moody généraux, le groupe G associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On utilise cette construction pour établir directement le théorème de Tits déterminant les constantes de structures de $\mathfrak{g}$ et on en déduit l'existence des bases de Chevalley de $\mathfrak{g}$. Enfin, on termine cette partie en montrant comment G est muni d'une structure de système de Tits (B,N).

Dans la $5^{\text{ième}}$ partie (chapitre XII) on étudie les algèbres de Lie affines que l'on définit directement comme extensions centrales des algèbres de lacets des algèbres de Lie simples de dimension finie $\mathfrak{g}$. On démontre ensuite la formule de Kac-Weyl (généralisation en dimension infinie de la formule des caractères de Weyl) pour les modules intégrables à plus grand poids. Notons d'ailleurs que cette démonstration peut aussi s'appliquer au cas de dimension finie et permet d'éviter, si on le souhaite, le recours à l'isomorphisme de Harish-Chandra.

Enfin, on termine par la construction du groupe de Kac-Moody associé à une algèbre affine (ou plus exactement à son algèbre dérivée, sinon on rajoute un facteur $\mathbb{C}^*$ parasite), mais ici le groupe en question est muni de deux systèmes de Tits distincts (B_+,N) et (B_-,N) avec le même groupe N, isomorphes par l'involution de Chevalley. C'est seulement dans le cas de dimension finie que les groupes B_+ et B_- sont conjugués (cf Tits [3] p 544) et que l'on peut donc se contenter de ne considérer qu'un seul de ces systèmes. Comme expliqué dans le première partie de cette introduction, on montre pour conclure que le groupe de Kac-Moody est une extension centrale du groupe des lacets du groupe de dimension finie G par un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

CHAPITRE I

ALGEBRES DE LIE D'ENDOMORPHISMES

1. Algèbres de Lie.

Une algèbre de Lie (complexe) est un $\mathbb{C}$-espace-vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application $\mathbb{C}$-bilinéaire alternée (appelée crochet de Lie):

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$(X,Y) \longrightarrow [X,Y]$$

vérifiant l'identité de Jacobi:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

pour tout $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

<u>exemple:</u>

Soit V un $\mathbb{C}$-espace-vectoriel; l'application:

$$(u,v) \longrightarrow [u,v] = u\circ v - v\circ u$$

est un crochet de Lie sur l'espace vectoriel $\mathfrak{gl}(V)$ des $\mathbb{C}$-endomorphismes de V.

Une sous-algèbre de Lie (resp un idéal) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $[X,Y] \in \mathfrak{a}$ pour tout $X,Y \in \mathfrak{a}$ (resp pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $Y \in \mathfrak{a}$).

<u>exemples:</u>

i) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie; le sous-espace $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les crochets $[X,Y]$ pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$ est un idéal $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ (idéal dérivé de $\mathfrak{g}$).

ii) Soit $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme bilinéaire; alors:

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathfrak{g} \ / \ \phi(Xv,v') + \phi(v,Xv') = 0 \ \forall\, v,v' \in V \}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

iii) Une dérivation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire:

$$D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

vérifiant:

$$D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)]$$

pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$. Les dérivations de $\mathfrak{g}$ forment une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Deux éléments X,Y d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ commutent si l'on a $[X,Y] = 0$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne lorsque tous ses éléments commutent.

exemple:

Soient V un espace vectoriel de dimension finie n et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de V; le sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes X de V tels que $X(\mathbb{C}e_i) = \mathbb{C}e_i$ pour $1\leq i\leq n$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{gl}(V)$.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple si elle n'est pas abélienne et si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$.

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ deux algèbres de Lie; une application $\mathbb{C}$-linéaire:

$$f: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie si l'on a:

$$f([X,Y]) = [f(X),f(Y)]$$

pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$. Les algèbres de Lie et leurs homomorphismes forment une catégorie. Une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est un homomorphisme d'algèbres de Lie:

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Un $\mathfrak{g}$-module est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une application $\mathbb{C}$-bilinéaire:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\longrightarrow V \\ (X,v) &\longrightarrow Xv \end{aligned}$$

telle que:

$$[X,Y]v = X(Yv) - Y(Xv)$$

pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$ et tout $v \in V$.

Si V est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module l'application:

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

définie par $\rho(X)v = Xv$ pour $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V et réciproquement, si ρ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V, l'application:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times V & \longrightarrow & V \\ (X,v) & \longrightarrow & \rho(X)v \end{array}$$

est une structure de $\mathfrak{g}$-module sur V.

Soient V et W deux $\mathfrak{g}$-modules, un $\mathfrak{g}$-homomorphisme est une application $\mathbb{C}$-linéaire:

$$f : V \longrightarrow W$$

telle que:

$$f(Xv) = Xf(v)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $v \in V$.

<u>exemples:</u>

i) La représentation adjointe est l'homomorphisme:

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

défini par $ad_X(Y) = [X,Y]$. L'identité de Jacobi exprime que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, ad_X est une dérivation (dite intérieure) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Le centre de $\mathfrak{g}$ est le noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$; c'est l'idéal:

$$c = \{X \in \mathfrak{g} \setminus [X,Y] = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g}\}$$

ii) Soient V et W deux $\mathfrak{g}$-modules; on munit le produit tensoriel $V \otimes W$ d'une structure de $\mathfrak{g}$-module en posant:

$$X(u \otimes v) = Xu \otimes v + u \otimes Xv$$

pour $X \in \mathfrak{g}$, $u \in V$ et $v \in W$; de même l'espace vectoriel $Hom(V,W)$ est munit d'une structure de $\mathfrak{g}$-module telle que:

$$(Xf)(v) = Xf(v) - f(Xv)$$

pour $f \in Hom(V,W)$ et $v \in V$. Ainsi l'application canonique:

$$V^* \otimes W \longrightarrow Hom(V,W)$$

(où $V^* = Hom(V,\mathbb{C})$, avec $\mathbb{C}$ muni de la structure de $\mathfrak{g}$-module triviale) est un $\mathfrak{g}$-isomorphisme.

2. Algèbres de Lie d'endomorphismes.

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie et $\mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de V. On appellera algèbre de Lie d'endomorphismes de V une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(V)$. Nous dirons que $\mathfrak{g}$ est diagonalisable (trigonalisable, strictement trigonalisable) s'il existe une base de V dans laquelle, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la matrice de X est diagonale (triangulaire supérieure, triangulaire supérieure stricte).

Proposition 2.1

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes de V; les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\mathfrak{h}$ est diagonalisable

ii) $\mathfrak{h}$ est abélienne et tout $X \in \mathfrak{h}$ est diagonalisable.

● On montre ii) $\Rightarrow$ i) par récurrence sur dim(V). On peut supposer $\mathfrak{h}$ non contenue dans le centre de $\mathfrak{gl}(V)$; il existe donc $X \in \mathfrak{h}$ qui n'est pas une homothétie et l'on a la décomposition de V en sous-espaces propres de X:

$$V = \sum V_\lambda$$

Pour tout $Z \in \mathfrak{h}$, puisque X et Z commutent on a $Z(V_\lambda) \subset V_\lambda$; or Z est diagonalisable donc $Z|V_\lambda$ est diagonalisable, de sorte que, pour tout λ, l'image de $\mathfrak{h}$ par l'application $Z \longrightarrow Z|V_\lambda$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V_\lambda)$ vérifiant ii) donc diagonalisable par l'hypothèse de récurrence de sorte que $\mathfrak{h}$ est diagonalisable. ●

proposition 2.2 (Engel)

Soit $\mathfrak{n}$ une algébre de Lie d'endomorphismes de V; les conditions suivantes sont équivalentes:

i) tout $X \in \mathfrak{n}$ est nilpotent

ii) $\mathfrak{n}$ est strictement trigonalisable.

● 1) On montre d'abord par récurrence sur $r = \dim(\mathfrak{n})$ qu'il existe $v \in V\setminus\{0\}$ tel que $Xv = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{n}$.

Pour $r = 1$ on a $\mathfrak{n} = \mathbb{C}X$ et cela résulte de ce que 0 est valeur propre de X.

Supposons le résultat vrai pour toute algèbre de Lie linéaire de dimension $< r$ et considérons une algèbre $\mathfrak{n}$ de dimension r.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{n}$ de dimension $< r$: pour tout $X \in \mathfrak{a}$, ad_X induit un endomorphisme ρ_X de l'espace vectoriel quotient $W = \mathfrak{n}/\mathfrak{a}$ d'où une représentation $\rho : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$; $\rho(\mathfrak{a})$ est donc une algèbre de Lie linéaire de dimension $< r$; d'après l'hypothèse de récurrence il existe $Y \in \mathfrak{n}\setminus\mathfrak{a}$ tel que $[X,Y] \in \mathfrak{a}$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$; ainsi $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{C}Y$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{b}$ et $\dim(\mathfrak{b}) = \dim(\mathfrak{a}) + 1$. Il est résulte que $\mathfrak{n}$ contient un idéal $\mathfrak{h}$ qui est un hyperplan.

Soit $W = \{v \in V \ / \ Xv = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}\}$. C'est un sous-espace vectoriel de V non nul d'après l'hypothèse de récurrence.

On a:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}Y$$

avec $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$. Alors W est stable par Y ($XYv = [X,Y]v+YXv = 0$ pour $X \in \mathfrak{h}$ et $v \in W$) et Y induit un endomorphisme nilpotent de W de sorte qu'il existe $v \in W$ tel que $Yv = 0$; on a donc $Xv = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{n}$.

2) On procède ensuite par récurrence sur $d = \dim(V)$.

Soit $v \in V\setminus\{0\}$ tel que $Xv = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{n}$; on pose $W = V/\mathbb{C}v$ de sorte que chaque $X \in \mathfrak{n}$ induit un endomorphisme nilpotent $\rho(X)$ de W ; d'après l'hypothèse de récurrence la sous-algèbre $\rho(\mathfrak{n})$ de $\mathfrak{gl}(W)$ est strictement trigonalisable; si $(\bar{e}_i)_{2\le i\le d}$ est une base de W telle que:

$$\rho(X).\bar{e}_j = \sum_{i=2}^{j-1} a_{i,j}(X)\ \bar{e}_i \qquad 2\le j\le d,\ X \in \mathfrak{n}.$$

En posant $e_1 = v$ on obtient une base $(e_i)_{1\le i\le d}$ de V telle que:

$$Xe_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}(X)\ e_i \qquad 1\le j\le d,\ X \in \mathfrak{n} \ \bullet$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie; on définit par récurrence la suite décroissante d'idéaux:

$$D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$$
$$D^i(\mathfrak{g}) = (D^{i-1}(\mathfrak{g}))' \text{ pour } i \ge 1;$$

et on dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble si $D^i(\mathfrak{g}) = \{0\}$ pour i assez grand.

<u>proposition</u> <u>2.3</u> (Lie)

Soit $\mathfrak{r}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes de V; les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\mathfrak{r}$ est trigonalisable

ii) $\mathfrak{r}$ est résoluble.

● 1) Montrons d'abord qu'il existe $v \in V$ qui est vecteur propre de tous les $X \in \mathfrak{r}$. On procède par récurrence sur $\dim(\mathfrak{r})$.

On a $\mathfrak{r}' \ne \mathfrak{r}$ (si $\mathfrak{r} \ne \{0\}$); tout sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{r}$ de sorte qu'il existe un idéal $\mathfrak{h}$ (nécessairement résoluble) de $\mathfrak{r}$ qui est un hyperplan. On a donc $\mathfrak{r} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}Z$. Montrons que le sous-espace W formé des $v \in V$ qui sont vecteurs propres de tous les $X \in \mathfrak{h}$, non nul d'après l'hypothèse de récurrence, est stable par Z:

Soit $v \in W$ (de sorte que $Xv = \lambda v$); considérons le sous-espace Ω_v de V engendré par les $v_j = Z^j v$, $j \geq 0$. On a $X(\Omega_v) \subset \Omega_v$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$. En effet on voit par récurrence sur j que:

$$Xv_j \in \lambda v_j + \sum_{0\leq i\leq j-1} \mathbb{C}v_i \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{h}.$$

$(Xv_{j+1} = XZv_j = ZXv_j + [X,Z]v_j \in \lambda v_{j+1} + \sum_{0\leq i\leq j-1}\mathbb{C}v_{i+1} + \sum_{0\leq i\leq j-1}\mathbb{C}v_i$ en appliquant l'hypothèse de récurrence à Xv_j et à $[X,Z]v_j)$.

Mais Ω_v a une base de la forme $(v_i)_{0\leq i\leq d}$ de sorte que:

$$\operatorname{tr}(X|\Omega_v) = (d+1)\lambda.$$

Appliquons ceci à $[Z,X]$: on a donc:

$$\begin{cases} [Z,X]v = \mu[Z,X] \\ \operatorname{tr}([Z,X]|\Omega_v) = (d+1)\mu = 0 \end{cases}$$

(puisque $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$) donc $\mu = 0$ et $[Z,X]v = 0$.

D'où:

$$\begin{aligned} XZv &= ZXv - [Z,X]v \\ &= ZXv = Z\lambda v = \lambda Zv \end{aligned}$$

et par suite $Zv \in W$. Ainsi W est stable par Z.

Alors $Z|W$ possède un vecteur propre $v \in W$ donc v est un vecteur propre commun à tous les $X \in \mathfrak{r}$.

2) On procède ensuite par récurrence sur $d = \dim(V)$.

Soit $v \in V$ un vecteur propre commun à tous les $X \in \mathfrak{r}$; on pose $W = V/\mathbb{C}v$ de sorte que chaque $X \in \mathfrak{r}$ induit un endomorphisme $\rho(X)$ de W; mais $\rho(\mathfrak{r})$ est résoluble donc, d'après l'hypothèse de récurrence, la sous-algèbre $\rho(\mathfrak{r})$ de $\mathfrak{gl}(W)$ est trigonalisable; si $(\bar{e}_i)_{2\leq i\leq d}$ est une base de W telle que:

$$\rho(X).\bar{e}_j = \sum_{i\geq 2}^{j} a_{i,j}(X)\ \bar{e}_i$$

pour $2\leq j\leq d$ et tout $X \in \mathfrak{r}$.

En posant $e_1 = v$ on obtient une base $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ de V telle que:

$$Xe_j = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}(X)\ e_i$$

$1\leq j\leq d$, $X \in \mathfrak{r}$. ●

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie: on considère sur $\mathfrak{gl}(V)$ la forme bilinéaire symétrique (forme trace):

$$t : \mathfrak{gl}(V) \times \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(X,Y) \longrightarrow tr(XY)$$

La forme trace t est invariante c'est à dire que:

$$t([X,Y],Z)+t(Y,[X,Z]) = 0$$

pour tout $X,Y,Z \in \mathfrak{gl}(V)$ (ie les dérivations intérieures de $\mathfrak{gl}(V)$ sont antisymétriques).

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de dimension finie, est semi-simple si elle ne possède pas d'idéal abélien non nul.

proposition 2.4

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple d'endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V; tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est régulier pour la forme trace t et l'orthogonal $\mathfrak{a}^{\perp}$ de $\mathfrak{a}$ est un idéal.● Considérons un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$; l'invariance de t montre que $\mathfrak{a}^{\perp}$ est aussi un idéal de $\mathfrak{g}$.

Posons $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ et montrons que tout $X \in \mathfrak{r}'$ est nilpotent. D'après le critère de Chevalley il suffit pour cela de vérifier que:

$$t(X,R) = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{r}'$ et toute réplique R de X.

On a:

$$X = \sum_k [Y_k,Z_k] \text{ (avec } Y_k,Z_k \in \mathfrak{r})$$

de sorte que:

$$t(X,R) = \sum_k t([Y_k,Z_k],R) = \sum_k t(Z_k,[R,Y_k])$$

On a évidemment:

$$ad_X(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}$$

mais ad_R est une réplique de ad_X de sorte que:

$$ad_R(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}.$$

Il en résulte que:

$$[R,Y_k] \in \mathfrak{r} \text{ pour tout } k;$$

par suite $t(X,R) = 0$ et X est nilpotent.

D'après le théorème d'Engel, $\mathfrak{r}'$ est strictement trigonalisable donc résoluble; par suite $\mathfrak{r}$ est résoluble. Supposons $\mathfrak{r} \neq 0$; si $i \geq 1$ est le plus petit entier tel que $D^i(\mathfrak{r}) = 0$; on voit que $D^{i-1}(\mathfrak{r})$ est un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$; puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple on a nécessairement $\mathfrak{r} = 0$ et ainsi $\mathfrak{a}$ est régulier. ●

<u>proposition</u> <u>2.5</u>

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V telle que la restriction à $\mathfrak{g}$ de la forme trace t soit régulière; alors on a la décomposition orthogonale:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{g}'$$

où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ est semi-simple.

● Pour $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$; on a:

$$t(Z,[X,Y]) = t([Z,X],Y)$$

d'où:

$$Z \in \mathfrak{c} \quad \Rightarrow \quad [Z,X] = 0 \quad \Rightarrow \quad Z \in (\mathfrak{g}')^{\perp}$$

$$Z \in (\mathfrak{g}')^{\perp} \quad \Rightarrow \quad t([Z,X],Y) = 0 \text{ pour tout } X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Puisque t est régulière sur $\mathfrak{g}$ on a $[Z,X] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ donc $Z \in \mathfrak{c}$. Ainsi on a $\mathfrak{c} = (\mathfrak{g}')^{\perp}$.

Considérons un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$; montrons que X est nilpotent dans l'un des deux cas suivants:

i) $X \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{c}$

ii) $X \in [\mathfrak{a},\mathfrak{g}]$.

D'après le critère de Chevalley il suffit de montrer que:

$$t(X,R) = 0 \text{ pour toute réplique } R \text{ de } X.$$

On a:

$$X = \sum_i [Z_i,Y_i] \quad (\text{ avec } \quad \text{(i) } Z_i,Y_i \in \mathfrak{g}$$
$$\text{(ii) } Z_i \in \mathfrak{a} \text{ et } Y_i \in \mathfrak{g})$$

de sorte que:

$$t(X,R) = \sum_i t([Z_i,Y_i],R) = \sum_i t(Y_i,[R,Z_i]).$$

Cas (i): Puisque $X \in c$ on a:

$$ad_X(g) = \{0\}$$

mais ad_R est une réplique de ad_X de sorte que:

$$ad_R(g) = \{0\}$$

d'où:

$$[R,Z_i] = 0 \quad \text{pour tout } i$$

et par suite $t(X,R) = 0$.

Cas (ii): Puisque $X \in \mathfrak{a}$ et que a est abélien on a

$$ad_X(\mathfrak{a}) = \{0\}$$

mais ad_R est une réplique de ad_X de sorte que:

$$ad_R(\mathfrak{a}) = \{0\}$$

d'où:

$$[R,Z_i] = 0 \quad \text{pour tout } i$$

et par suite $t(X,R) = 0$.

Soit $X \in g' \cap c$, X est nilpotent de sorte que XY est nilpotent pour tout $Y \in g$ d'où:

$$t(X,Y) = 0 \text{ pour tout } Y \in g.$$

Alors $X = 0$ puisque t est régulière sur g; ainsi $c \cap g' = \{0\}$. Ainsi g' est un sous-espace régulier de g et l'on a $g = c \oplus g'$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de g de sorte que $[\mathfrak{a},g]$ est formé d'endomorphismes nilpotents. Soient $X \in g$ et $Z \in \mathfrak{a}$; considérons la sous-algèbre $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathbb{C}X$ de g; comme $\mathfrak{r}' = [\mathfrak{a},X]$ est formée d'endomorphismes nilpotents les théorèmes d'Engel et de Lie montrent que $\mathfrak{r}$ est trigonalisable.

Soit, de plus, $Y \in g$; comme $[Y,Z]$ est nilpotent il en est de même de $X[Y,Z]$ (puisque X et $[Y,Z]$ sont simultanément trigonalisables) d'où:

$$t([X,Y],Z) = t(X,[Y,Z]) = 0$$

alors Z est orthogonal à g' donc $Z \in c$; ainsi $\mathfrak{a} \subset c$.

Mais comme tout idéal $\mathfrak{a}$ de g' est encore un idéal de g; il en résulte que g' est semi-simple. ●

APPENDICE I

REPLIQUES D'UN ENDOMORPHISME

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et X un endomorphisme de V; le nil-espace de X est le sous-espace vectoriel de V formé des $v \in V$ tels qu'il existe $k \geq 1$ avec $X^k v = 0$.

On désigne par $\sigma(X)$ l'ensemble des valeurs propres de X; pour chaque $\lambda \in \sigma(X)$, soit $V_{X,\lambda}$ le nil-espace de $X-\lambda I_V$; on a alors la décomposition de V en somme directe:

$$V = \sum_{\lambda \in \sigma(X)} V_{X,\lambda}$$

De plus la dimension de $V_{X,\lambda}$ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique $\chi_X(T) = \det(X-TI_V) \in \mathbb{C}[T]$ de X; $V_{X,\lambda}$ est stable par X et $(X-\lambda I_V)|V_{X,\lambda}$ est un endomorphisme nilpotent de $V_{X,\lambda}$ dont le degré de nilpotence est égal à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal p_X de l'endomorphisme X (décomposition canonique de V selon X).

<u>proposition 1</u>

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et X un endomorphisme de V; les conditions suivantes sont équivalentes:

i) X est diagonalisable (ie V a une base formée de vecteurs propres de X)

ii) le polynôme minimal p de X est séparable (ie toutes ses racines sont simples)

iii) tout sous-espace vectoriel de V stable par X possède un supplémentaire stable par X.

<u>corollaire</u>

Soit X un endomorphisme diagonalisable de V; pour tout sous-espace W de V stable par X, la restriction $X|W$ de X à W est diagonalisable.

<u>proposition 2</u> (décomposition de Jordan)

Soit X un endomorphisme de V ; alors X s'écrit de manière unique $X = X_D + X_N$ avec X_D diagonalisable, X_N nilpotent et $[X_D, X_N] = 0$.

De plus il existe $f,g \in \mathbb{C}[T]$ avec $f(0) = g(0) = 0$ tels que $X_D = f(X)$ et $X_N = g(X)$.

● Soit $V = \sum V_{X,\lambda}$ la décomposition canonique de V selon X; par définition $X_D|V_{X,\lambda} = \lambda I_{V_{X,\lambda}}$ pour tout $\lambda \in \sigma(X)$ et $X_N = X - X_D$. La dernière partie résulte du théorème chinois. ●

<u>corollaire</u>

Soit X un endomorphisme de V; on a:

$$ad_{X_D} = (ad_X)_D$$
$$ad_{X_N} = (ad_X)_N.$$

● i) Supposons d'abord que X est diagonalisable; soit $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de V formée de vecteurs propres de X de sorte que:

$$Xv_i = \lambda_i v_i \qquad 1\leq i\leq n.$$

Soit $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base correspondante de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V)$; on a alors:

$$X = \sum_{k\leq n} \lambda_k E_{k,k}$$

de sorte que:

$$ad_X = \sum_{1\leq k\leq n} \lambda_k ad_{E_{k,k}}$$

mais:

$$ad_{E_{k,k}} E_{i,j} = E_{k,k}E_{i,j} - E_{i,j}E_{k,k} = \delta_{i,k}E_{k,j} - \delta_{j,k}E_{i,k}$$

d'où:

$$ad_X\, E_{i,j} = \sum_{1\leq k\leq n} \lambda_k (\delta_{i,k}E_{k,j} - \delta_{j,k}E_{i,k}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$$

de sorte que ad_X est diagonalisable.

ii) Supposons maintenant X nilpotent; on a $ad_X = L_X - R_X$ (où $L_XY = XY$ et $R_XY = YX$) de sorte que:

$$ad_X^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} C_{2n-1}^{k} (-1)^{2n-1-k} L_X^k R_X^{2n-1-k} = 0$$

si $X^n = 0$ donc ad_X est nilpotent.

iii) Finalement, X étant quelconque, il suffit de considérer sa décomposition de Jordan: $X = X_D + X_N$ pour conclure. ●

Considérons un endomorphisme <u>diagonalisable</u> X de V et la décomposition canonique de V selon X:

$$V = \sum_{\lambda\in\sigma(X)} V_{X,\lambda}$$

Soit E le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par

$\sigma(X)$; un endomorphisme diagonalisable R est une réplique de X s'il existe $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{C})$ tel que $R|V_{X,\lambda} = \phi(\lambda) I_{V_{X,\lambda}}$ pour tout $\lambda \in \sigma(X)$

Soit X un endomorphisme quelconque de V; une réplique de X est un endomorphisme de V appartenant à la sous-algèbre abélienne $\mathfrak{a}(X)$ de $\mathfrak{gl}(V)$ engendrée par les répliques de la composante diagonalisable X_D et par la composante nilpotente X_N de X.

proposition 3

Soit X un endomorphisme de V; toute réplique R de X est de la forme $R = f(X)$ avec $f \in \mathbb{C}[T]$ et $f(0) = 0$.

● On peut supposer X diagonalisable. Considérons de nouveau E le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\sigma(X)$; on a $R = \phi(X)$ avec $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(E,\mathbb{C})$. Soit $(\lambda_i)_{1\le i\le r}$ une base de E formée de valeurs propres de X; il existe alors un polynôme $f \in \mathbb{C}[T]$ tel que $f(\lambda_i) = \phi(\lambda_i)$ pour $1\le i\le r$ et la condition supplémentaire $f(0) = 0$ si X est inversible; on a alors $R = f(X)$. ●

proposition 4

Pour toute réplique R de X, ad_R est une réplique de ad_X.

● On a $ad_{X_D} = (ad_X)_D$ et $ad_{X_N} = (ad_X)_N$ de sorte que l'on peut supposer X diagonalisable. Soit $(v_i)_{1\le i\le n}$ une base de V formée de vecteurs propres de sorte que $Xv_i = \lambda_i v_i$ et $Rv_i = \phi(\lambda_i)v_i$ mais on a:

$$ad_X E_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$$

$$ad_R E_{i,j} = (\phi(\lambda_i) - \phi(\lambda_j))E_{i,j}$$

donc ad_R est une réplique de ad_X.

proposition 5 (critère de Chevalley)

Soit X un endomorphisme de V; les conditions suivantes sont équivalentes:

i) X est nilpotent

ii) $tr(XR) = 0$ pour toute réplique R de X.

● i) ⇒ ii) R et X commutent de sorte que XR est nilpotent donc $tr(XR) = 0$.

ii) ⇒ i) On a $R = X'_D + cX_N$ où $X = X_D + X_N$ est la décomposition de

Jordan de X et X'_D une réplique de X_D de sorte que $tr(X_D X'_D) = 0$. On est ramené à montrer que si X est diagonalisable et si $tr(XR) = 0$ pour toute réplique R de X on a $X = 0$. Soit E le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par l'ensemble $\sigma(X)$ des valeurs propres de X; pour toute forme linéaire $\phi \in E^*$ on a donc:

$$tr(\phi(X)X) = \sum_{\lambda\in\sigma(X)} n_\lambda \phi(\lambda)\lambda = 0 \text{ avec } n_\lambda \geq 1 \text{ d'où:}$$

$$\phi(tr(\phi(X)X)) = \sum_{\lambda\in\sigma(X)} n_\lambda \phi(\lambda)^2 = 0.$$

ainsi $\phi = 0$ donc $X = 0$. ●

CHAPITRE II

ALGEBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

1. Le critère de semi-simplicité de Cartan.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie; la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$:

$$K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(X,Y) \longrightarrow t(ad_X, ad_Y)$$

La forme K est invariante c'est à dire que:

$$K([X,Y],Z) + K(Y,[X,Z]) = 0 \text{ pour tout } X,Y,Z \in \mathfrak{g}.$$

<u>proposition 1.1</u> (critère de semi-simplicité de Cartan)

Soit $\mathfrak{g}$ un algèbre de Lie de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

ii) la forme de Killing K de $\mathfrak{g}$ est régulière.

● i) ⇒ ii) $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow ad(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie; $ad(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie semi-simple d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$ donc la forme trace t est régulière sur $ad(\mathfrak{g})$ et par suite K est régulière.

ii) ⇒ i) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et $Z \in \mathfrak{a}$. Pour $X,Y \in \mathfrak{g}$ on a :

$$(ad_Z ad_X)^2 Y = [Z[X,[Z,[X,Y]]]] = 0 \text{ (pour tout } Y \in \mathfrak{g})$$

de sorte que $ad_Z ad_X$ est nilpotent donc $K(X,Z) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$; alors $Z = 0$ donc $\mathfrak{a} = 0$. ●

<u>corollaire 1</u>

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple;

i) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$.

ii) Tout idéal $\mathfrak{a}$ est régulier pour la forme de Killing K, l'orthogonal $\mathfrak{a}^\perp$ est l'unique supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ qui est un idéal.

iii) Toute dérivation de $\mathfrak{g}$ est intérieure.

● i) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus (\mathfrak{g}')^\perp$ et $(\mathfrak{g}')^\perp$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ de sorte que $(\mathfrak{g}')^\perp = \{0\}$.

ii) Compte tenu de la fidélité de la représentation adjointe, $\mathfrak{a}^{\perp}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$; on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}^{\perp},\mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a}^{\perp}$ d'où $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{\perp}$.

iii) Soit D une dérivation de $\mathfrak{g}$; on a:

$$[DX,Y] = D([X,Y]) - [X,DY] \quad \text{pour tout } X,Y \in \mathfrak{g}$$

de sorte que:

$$ad_{DX} = [D,ad_X] \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

Puisque la forme de Killing K est régulière, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que:

$$tr(D\, ad_Y) = K(X,Y) \quad \text{pour tout } Y \in \mathfrak{g}.$$

Alors $D' = D - ad_X$ est une dérivation telle que:

$$tr(D' ad_Y) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g}.$$

Puisque pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ on a:

$$tr(ad_Y[D',ad_Z]) = -tr(D'[ad_Y,ad_Z])$$

il en résulte que:

$$K(Y,D'Z) = tr(ad_Y ad_{D'Z}) = -\,tr(D' ad_{[Y,Z]}) = 0.$$

En utilisant de nouveau la régularité de K on obtient $D' = 0$ ie $D = ad_X$. ●

<u>corollaire 2</u>

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple; on a:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_r$$

où $(\mathfrak{s}_i)_{1\le i\le r}$ est la famille des idéaux non nuls minimaux de $\mathfrak{g}$; chacun de ces idéaux est une algèbre de Lie simple de dimension finie.

De plus chaque idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est somme d'une sous-famille de $(\mathfrak{s}_i)_{1\le i\le r}$ donc est semi-simple.

● Soit $(\mathfrak{s}_i)_{i\in I}$ la famille des idéaux non nuls minimaux de $\mathfrak{g}$; puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple les $\mathfrak{s}_i$ sont non abéliens.

D'autre part soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{s}_i$; $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$: en effet on a:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_i \oplus \mathfrak{s}_i^{\perp} \text{ et } [\mathfrak{s}_i,\mathfrak{s}_i^{\perp}] = 0$$

d'où:

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{s}_i,\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}.$$

Par minimalité on a $\mathfrak{a} = \{0\}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{s}_i$ donc $\mathfrak{s}_i$ est simple.

Pour $i \neq j$ on a $[\mathfrak{s}_i,\mathfrak{s}_j] \subset \mathfrak{s}_i \cap \mathfrak{s}_j = \{0\}$; il en résulte que $\mathfrak{s}_i$ et $\mathfrak{s}_j$ sont orthogonaux pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$: soient

$X_i \in \mathfrak{s}_i$ et $X_j \in \mathfrak{s}_j$; comme $\mathfrak{s}_j = \mathfrak{s}'_j$ on a $X_j = [Y,Z]$ avec $Y,Z \in \mathfrak{s}_j$ d'où:

$$K(X_i,X_j) = K(X_i,[Y,Z]) = K([X_i,Y],Z) = 0.$$

Soit $\mathfrak{a}$ la somme des $\mathfrak{s}_i$, $i \in I$ (I est nécessairement fini), $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; supposons $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ et $\mathfrak{a}^{\perp}$ est un idéal de sorte qu'il existe $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{a}$ donc $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = \{0\}$ d'où une contradiction.

Enfin, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$; comme ci-dessus on voit que tout idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de sorte que $\mathfrak{a}$ est semi-simple et est somme directe des $\mathfrak{s}_i$ tels que $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{s}_i$ ●

2. Le théorème de semi-simplicité de Weyl.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation; on appelle forme trace de ρ la forme bilinéaire symétrique invariante sur $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} t_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (X,Y) &\longrightarrow t(\rho(X),\rho(Y)) \end{aligned}$$

<u>proposition</u> <u>2.1</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation; l'orthogonal $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Ker}(\rho)$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est régulier pour t_ρ.

● i) Considérons l'idéal $\mathfrak{k} = \{ X \in \mathfrak{g} \ / \ t_\rho(X,Y) = 0 \ \forall \ Y \in \mathfrak{g}\}$ de $\mathfrak{g}$ et montrons tout d'abord que, pour tout $X \in [\mathfrak{g},\mathfrak{k}]$, $\rho(X)$ est nilpotent.

Il suffit de montrer que:

$$t(\rho(X),R) = 0$$

pour tout $X \in [\mathfrak{g},\mathfrak{k}]$ et toute réplique R de $\rho(X)$ (critère de Chevalley).

On a $X = \sum_k [Y_k,Z_k]$ (avec $Y_k \in \mathfrak{g}$ et $Z_k \in \mathfrak{k}$) de sorte que:

$$\begin{aligned} t(\rho(X),R) &= \sum_k t([\rho(Y_k),\rho(Z_k)],R) \\ &= \sum_k t(\rho(Z_k),[R,\rho(Y_k)]). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{ad}_{\rho(x)}(\rho(\mathfrak{g})) \subset \rho(\mathfrak{g})$ on a $\mathrm{ad}_R(\rho(\mathfrak{g})) \subset \rho(\mathfrak{g})$ puisque ad_R est une réplique de $\mathrm{ad}_{\rho(x)}$.

ii) Soit $\mathfrak{p} = (\mathrm{Ker}(\rho))^{\perp}$; $\mathfrak{p}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et on a:

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Ker}(\rho) \oplus \mathfrak{p} \quad (\text{donc } [\mathrm{Ker}(\rho),\mathfrak{p}] = 0).$$

D'après i) $\rho(X)$ est nilpotent pour tout $X \in [\mathfrak{p},\mathfrak{k}]$ où:

$$\mathfrak{t} = \{ X \in \mathfrak{p} \ / \ t_\rho(X,Y) = 0 \ \forall \ Y \in \mathfrak{p}\}.$$

D'après le théorème d'Engel, l'idéal $\mathfrak{a} = \rho([\mathfrak{p},\mathfrak{t}])$ de l'algèbre $\rho(\mathfrak{p})$ est (strictement) trigonalisable; supposons $\mathfrak{a} \neq 0$ et soit $i \geq 1$ le plus petit entier tel que $D^i(\mathfrak{n}) = 0$; alors $D^{i-1}(\mathfrak{n})$ est un idéal abélien non nul de $\rho(\mathfrak{p})$; or l'algèbre $\rho(\mathfrak{p})$ est semi-simple donc $\mathfrak{a} = \rho([\mathfrak{p},\mathfrak{t}]) = 0$ et comme $\rho|\mathfrak{p}$ est fidèle on a $[\mathfrak{p},\mathfrak{t}] = 0$; ainsi $\mathfrak{t}$ est contenu dans le centre de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{p}$; on a donc $\mathfrak{t} = 0$ ie $\mathfrak{p}$ régulier pour t_ρ.●

<u>proposition</u> <u>2.2</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation et $\mathfrak{p}$ l'orthogonal du noyau $\mathrm{Ker}(\rho)$ de ρ; il existe un unique endomorphisme C_ρ de V (opérateur de Casimir de ρ) tel que:

$$C_\rho = \sum_i \rho(X_i)\rho(X_i^*)$$

pour tout couple $(X_i)_i$ et $(X_i^*)_i$ de bases de $\mathfrak{p}$ duales relativement à la forme t_ρ (ie telles que $t_\rho(X_i,X_j^*) = \delta_{i,j}$; on a donc $tr(C_\rho) = \dim(\mathfrak{p})$)

De plus on a $[\rho(X),C_\rho] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

● Soit $(X_i)_i$ et $(X_i^*)_i$ un couple de bases de $\mathfrak{p}$ duales relativement à la forme t_ρ (rappelons que la restriction à $\mathfrak{p}$ de t_ρ est régulière). On a pour tout $Z \in \mathfrak{p}$:

$$Z = \sum_i t_\rho(X_i,Z)X_i^* = \sum_i t_\rho(Z,X_i^*)X_i$$

de sorte que si $(X'_i)_i$ et $(X'^*_i)_i$ est un autre couple de bases duales de $\mathfrak{p}$ on a:

$$\begin{aligned}\rho(X'_j)\rho(X'^*_j) &= \sum_i \rho(\sum_i t_\rho(X'_j,X_i^*)X_i)\rho(X'^*_j)\\ &= \sum_i \rho(X_i)\rho(\sum_j t_\rho(X'_j,X_i^*)X'^*_j)\\ &= \sum_i \rho(X_i)\rho(X_i^*).\end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur C_ρ est bien défini. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a:

$$\begin{aligned}[\rho(X),C_\rho] &= \rho(X)C_\rho - C_\rho\rho(X)\\ &= \sum_i (\rho(X)\rho(X_i)\rho(X_i^*) - \rho(X_i)\rho(X_i^*)\rho(X))\\ &= \sum_j (\rho([X,X_j])\rho(X_j^*) + \rho(X_j)\rho([X,X_j^*]))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_j (\rho(\sum_i t_\rho([X,X_j],X_i^*)X_i)\rho(X_j^*) + \rho(X_j)\rho(\sum_i t_\rho(X_i,[X,X_j^*])X_i^*)\\ &= \sum_{i,j} (t_\rho([X,X_j],X_i^*) + t_\rho(X_j,[X,X_i^*])\rho(X_i)\rho(X_j^*) = 0. \ ●\end{aligned}$$

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation:

a) on dit que ρ est simple (ou irréductible) si $V \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces vectoriels W de V stables par ρ (ie tels que $\rho(X)W \subset W$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$) sont $\{0\}$ et V.

b) on dit que ρ est semi-simple si V est somme directe d'une famille $(W_i)_i$ de sous-espaces vectoriels stables par ρ tels que les représentations $\rho|W_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W_i)$ soient simples.

<u>proposition</u> <u>2.3</u> (lemme de Schur)

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation simple de rang fini; tout endomorphisme T de V tel que:

$$\rho(X) \circ T = T \circ \rho(X) \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}$$

est une homothétie.

● Supposons $T \neq 0$; $\mathrm{Ker}(T)$ (resp $\mathrm{Im}(T)$) sont des sous-espaces vectoriels de V stables par ρ de sorte que T est un isomorphisme; si λ est une valeur propre de T, $T - \lambda I_V$ n'est pas inversible donc est nul de sorte que T est l'homothétie de rapport λ. ●

On pose:

$$C^0(\mathfrak{g},V) = V$$
$$C^1(\mathfrak{g},V) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g},V)$$
$$C^2(\mathfrak{g},V) = \mathrm{Alt}^2_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},V)$$

et:

$$C^0(\mathfrak{g},V) \xrightarrow{\ d\ } C^1(\mathfrak{g},V) \xrightarrow{\ d\ } C^2(\mathfrak{g},V)$$

avec:

$$dv(X) = \rho(X)v$$

pour $v \in C^0(\mathfrak{g},V)$ et $X \in \mathfrak{g}$

et:

$$d\omega(X,Y) = \rho(X)\omega(Y) - \rho(Y)\omega(X) - \omega([X,Y])$$

pour $\omega \in C^1(\mathfrak{g},V)$ et $X,Y \in \mathfrak{g}$.

On vérifie que $d \circ d = 0$ de sorte que:

$$B^1(\mathfrak{g},V) = \mathrm{Im}(d) \subset Z^1(\mathfrak{g},V) = \mathrm{Ker}(d).$$

On pose alors:

$$H^1(\mathfrak{g},V) = Z^1(\mathfrak{g},V)/B^1(\mathfrak{g},V)$$

de sorte que, pour tout sous-espace W de V stable par ρ on a la suite exacte de cohomologie:

$$0 \longrightarrow W^{g} \longrightarrow V^{g} \longrightarrow (V/W)^{g} \xrightarrow{\partial} H^1(g,W) \longrightarrow H^1(g,V) \longrightarrow H^1(g, V/W)$$

● Il suffit d'appliquer le lemme du serpent au diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V/W & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^1(g,W) & \longrightarrow & Z^1(g,V) & \longrightarrow & Z^1(g,V/W) & & \end{array}$$

Si $v \in V$ tel que $\bar{v} \in (V/W)^{g}$ ie $\rho(X)v \in W$ pour tout $X \in g$; alors $\partial(\bar{v})$ est la classe de $X \longrightarrow \rho(X)v$ modulo $B^1(g,V)$. ●

<u>proposition</u> <u>2.4</u> (lemme de Whitehead)

Soient g une algèbre de Lie semi-simple, pour toute représentation de dimension finie $\rho : g \longrightarrow gl(V)$ on a:

$$H^1(g,V) = \{0\}.$$

● i) L'opérateur de Casimir C_ρ se prolonge en un endomorphisme Γ_ρ de $C^p(g,V)$ (pour p = 0,1 ou 2) tel que $\Gamma_\rho \circ d = d \circ \Gamma_\rho$ de sorte que Γ_ρ induit un endomorphisme de $H^1(g,V)$.

Pour $\omega \in Z^1(g,V)$, posons $h(\omega) = \sum_i \rho(X_i)\omega(X_i^*) \in V$; on a alors pour tout $X \in g$:

$$\begin{aligned} dh(\omega)(X) &= \rho(X)h(\omega) \\ &= \sum_i \rho(X)\rho(X_i)\omega(X_i^*) \\ &= \sum_i \rho(X_i)\rho(X)\omega(X_i^*) + \sum_i \rho([X,X_i])\omega(X_i^*) \\ &= \Gamma_\rho\omega(X) + \sum_i \rho(X_i)\omega([X,X_i^*]) + \sum_i \rho([X,X_i])\omega(X_i^*) \end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned} \sum_i \rho(X_i)\omega([X_i^*,X]) &= \sum_i \rho(X_i)\omega(\sum_j t_\rho(X_j,[X_i^*,X])X_j^*) \\ &= \sum_i \rho(X_i)\omega(\sum_j t_\rho([X_j,X_i^*],X)X_j^*) \\ &= \sum_j \rho(\sum_i t_\rho([X_j,X_i^*],X)X_i)\omega(X_j^*) \\ &= \sum_j \rho(\sum_i t_\rho([X,X_j],X_i^*)X_i)\omega(X_j^*) \\ &= \sum_j \rho([X,X_j])\omega(X_j^*). \end{aligned}$$

On a finalement:

$$dh(\omega)(X) = \Gamma_\rho\omega(X)$$

de sorte que l'endomorphisme de $H^1(g,V)$ induit par Γ_ρ est nul.

ii) Soit $n = \dim(V)$; si $n = 1$ on a $\rho(X)v = 0$ pour tout $X \in g$ (ie ρ est triviale) puisque $g' = g$. Supposons, par hypothèse de récurrence le résultat vrai pour toute représentation de rang $< n$ ($n \geq 2$); si ρ est simple l'opérateur de Casimir C_ρ est l'homothétie de rapport λ; comme ρ n'est pas triviale on a $\lambda \neq 0$ puisque $tr(C_\rho) = \dim(g)$ donc C_ρ est inversible mais l'automorphisme induit par Γ_ρ sur $H^1(g,V)$ est nul ce qui n'est possible que si $H^1(g,V) = \{0\}$. Si ρ n'est pas simple il existe un sous-espace vectoriel non trivial W de V stable par ρ de sorte que, par hypothèse de récurrence on a $H^1(g,W) = H^1(g,V/W) = \{0\}$ et la suite exacte de cohomologie:

$$H^1(g,W) \longrightarrow H^1(g,V) \longrightarrow H^1(g,V/W)$$

implique que $H^1(g,V) = \{0\}$. ●

<u>proposition</u> <u>2.5</u> (théorème de semi-simplicité de Weyl)

Soit g une algèbre de Lie semi-simple, toute représentation de dimension finie $\rho : g \longrightarrow gl(V)$ est semi-simple.

● Soient $\rho_1 : g \longrightarrow gl(V_1)$ et $\rho_2 : g \longrightarrow gl(V_2)$ deux représentations de g; on définit la représentation

$$\rho : g \longrightarrow gl(\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V_1,V_2))$$

par $\rho(f)X = \rho_2(X) \circ f - f \circ \rho_1(X)$.

Soit W un sous-espace de V stable par ρ; alors $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,W)$ est un sous-espace vectoriel stable de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,V)$ et l'on a:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,V) \;/\; \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,V) \simeq \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,V/W).$$

On a alors la suite exacte de cohomologie:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,V)^{g} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,V/W)^{g} \longrightarrow H^1(g,\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,W))$$

Comme $H^1(g,\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,W)) = 0$ d'après le lemme de Whitehead, il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V/W,V)^{g}$ tel que $\pi \circ f = id_{V/X}$ de sorte que $p = f \circ \pi$ est un projecteur de V, d'image W, qui commute avec ρ. Ainsi, W possède un supplémentaire stable par ρ ce qui entraîne que ρ est semi-simple. ●

3. La décomposition de Jordan.

Si X est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on désigne par X_D sa composante diagonalisable et par X_N sa composante nilpotente.

<u>proposition 3.1</u>

Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie semi-simple d'endomorphismes de V; pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a X_D et $X_N \in \mathfrak{g}$.

● Le théorème de semi-simplicité de Weyl montre que V est somme directe d'une famille $(W_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels stables tels que les représentations:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(W_i) \\ X & \longrightarrow & X|W_i \end{array}$$

sont simples. Soit $\bar{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ formée des $X \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que:

i) $[X,\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$

ii) $X(W_i) \subset W_i$ et $tr(X|W_i) = 0$ pour tout $i \in I$;

Alors $\mathfrak{g} \subset \bar{\mathfrak{g}}$ (puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$) de sorte que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\bar{\mathfrak{g}}$. Soit $\mathfrak{a}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ dans $\bar{\mathfrak{g}}$ (pour la forme trace t de $\mathfrak{gl}(V)$), alors $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, donc une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{gl}(V)$, sur laquelle la restriction de t est nulle; on a donc $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ de sorte que:

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$$

Soit $Z \in \mathfrak{a}$; le lemme de Schur montre que $Z|W_i = \lambda_i I_{W_i}$. On a donc $\lambda_i = 0$ d'où $Z = 0$ et ainsi:

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}.$$

Soit $X \in \mathfrak{g}$; on a $ad_{X_D} = (ad_X)_D$ et $ad_{X_N} = (ad_X)_N$ de sorte que X_D et X_N (resp ad_{X_D} et ad_{X_N}) sont des polynômes sans terme constant en X (resp en ad_X); ainsi X_D, $X_N \in \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. ●

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie <u>semi-simple</u> complexe; nous dirons que $X \in \mathfrak{g}$ est diagonalisable (resp nilpotent) si ad_X est un endomorphisme diagonalisable (resp nilpotent) de $\mathfrak{g}$.

<u>proposition 3.2</u> (décomposition de Jordan)

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple;

i) tout $X \in \mathfrak{g}$ s'écrit de manière unique:

$$X = X_D + X_N$$

avec X_D diagonalisable, X_N nilpotent et $[X_D,X_N] = 0$.

ii) soit $X \in \mathfrak{g}$; les conditions suivantes sont équivalentes:

a) X est diagonalisable (resp nilpotent)

b) il existe une représentation fidèle $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ telle que $\rho(X)$ est diagonalisable (resp nilpotent)

c) pour toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, $\rho(X)$ est diagonalisable (resp nilpotent).

● i) pour $X \in \mathfrak{g}$ considérons la décomposition de Jordan:

$$ad_X = (ad_X)_D + (ad_X)_N$$

de ad_X.

Puisque $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme, $ad(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ de sorte que $(ad_X)_D$ et $(ad_X)_N \in ad(\mathfrak{g})$. Il existe $X_D, X_N \in \mathfrak{g}$ (uniques) tels que $ad_{X_D} = (ad_X)_D$ et $ad_{X_N} = (ad_X)_N$.

ii) c) $\Rightarrow$ b) évident

b) $\Rightarrow$ a) On peut supposer que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$; X est alors un endomorphisme diagonalisable (resp nilpotent) de V; $ad_X^{(V)}$ est un endomorphisme diagonalisable (resp nilpotent) de $\mathfrak{gl}(V)$ de sorte que $ad_X^{(\mathfrak{g})} = ad_X^{(V)}|\mathfrak{g}$ est encore un endomorphisme diagonalisable (resp nilpotent) de $\mathfrak{g}$.

a) $\Rightarrow$ c) On a la décomposition $\mathfrak{g} = Ker(\rho) \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est l'orthogonal de $Ker(\rho)$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$; c'est un idéal de $\mathfrak{g}$; on peut supposer que $X \in \mathfrak{p}$; on a $ad_X^{(\mathfrak{p})} = ad_X^{(\mathfrak{g})}|\mathfrak{p}$ de sorte que l'on est ramené au cas où ρ est fidèle donc au cas où $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ et $ad_X^{(\mathfrak{g})}$ diagonalisable (resp nilpotent). Considérons la décomposition de Jordan de X: $X = X_D + X_N$: puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple on a X_D et $X_N \in \mathfrak{g}$; alors $ad_X^{(\mathfrak{g})} = ad_{X_D}^{(\mathfrak{g})} + ad_{X_N}^{(\mathfrak{g})}$ est la décomposition de Jordan de $ad_X^{(\mathfrak{g})}$ de sorte que $ad_{X_N}^{(\mathfrak{g})} = 0$ (resp $ad_{X_D}^{(\mathfrak{g})} = 0$); puisque $ad^{(\mathfrak{g})}$ est fidèle on a $X = X_D$ (resp $X = X_N$) donc X est diagonalisable (resp nilpotent). ●

<u>proposition 3.3</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation telle que la forme t_ρ soit régulière; alors on a la décomposition orthogonale:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{g}'$$

où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{g}$.

De plus $\mathfrak{g}'$ est semi-simple.

● a) La représentation ρ est fidèle; en effet si $X \in \mathfrak{g}$ et $\rho(X) = 0$ on a:

$$t_\rho(X,Y) = t(\rho(X),\rho(Y)) = 0$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}$.

Comme t_ρ est régulière on a $X = 0$. Ainsi on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie d'endomorphismes d'un espace vectoriel V et que la restriction de t à $\mathfrak{g}$ est régulière. ●

CHAPITRE III

SOUS-ALGEBRES DE CARTAN

1. Sous-algèbres de Cartan

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe; une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre diagonalisable maximale de $\mathfrak{g}$.

<u>proposition 1.1</u>

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple (complexe); l'ensemble $\mathfrak{g}_{diag}$ des éléments diagonalisables de $\mathfrak{g}\setminus\{0\}$ est non vide. Tout $H \in \mathfrak{g}_{diag}$ est contenu dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$.

● Si l'on avait $\mathfrak{g}_{diag} = \{0\}$, tout élément de $\mathfrak{g}$ serait nilpotent (d'après la décomposition de Jordan) et $ad(\mathfrak{g})$ serait strictement trigonalisable dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ d'après le théorème d'Engel de sorte que la forme de Killing K de $\mathfrak{g}$ serait nulle d'où $\mathfrak{g} = \{0\}$ d'après le critère de semi-simplicité de Cartan. Ainsi pour tout $H \in \mathfrak{g}_{diag}$, $\mathbb{C}H$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathfrak{g}$. ●

<u>proposition 1.2</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$; les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$

ii) $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre diagonalisable et on a $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

● Considérons une sous-algèbre diagonalisable $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; pour tout $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ on pose:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \ / \ [H,X] = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h} \}$$

de sorte que l'on a la décomposition en somme directe:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o \oplus \sum_{\alpha\neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\mathfrak{g}_o$ est le centralisateur $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et comme $\mathfrak{h}$ est abélienne on a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_o = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

a) La restriction de K à $\mathfrak{g}_o$ est régulière.

Soit $\mathfrak{a}$ la somme directe des $\mathfrak{g}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*\setminus\{0\}$; c'est un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{g}_o$; soient $X \in \mathfrak{g}_o$ et $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \neq 0)$;

il existe $H \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha(H) \neq 0$; posons $H' = (\alpha(H))^{-1}H \in \mathfrak{h}$ de sorte que $[H',Z] = Z$;
on a alors:

$$K(X,Z) = K(X,[H',Z]) = K([X,H'],Z) = 0$$

de sorte que $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{g}_o)^{\perp}$.
Considérons $Z \in \mathfrak{g}_o \cap (\mathfrak{g}_o)^{\perp}$; pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a $X = X_o + X'$ avec $X_o \in \mathfrak{g}_o$ et $X' \in \mathfrak{a}$ d'où $K(Z,X) = 0$ et $Z = 0$.

b) On a la décomposition orthogonale $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{g}'_o$ où $\mathfrak{c}$ est le centre de $\mathfrak{g}_o$ et $\mathfrak{g}'_o$ est semi-simple.
La forme trace $K|_{\mathfrak{g}_o\times\mathfrak{g}_o}$ de la représentation $ad|\mathfrak{g}_o : \mathfrak{g}_o \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est régulière.

c) Pour tout $X \in \mathfrak{g}_o$, on a $X_D \in \mathfrak{g}_o$ et $X_N \in \mathfrak{g}_o$.
$ad_{X_D} = (ad_X)_D$ et $ad_{X_N} = (ad_X)_N$ sont des polynômes sans terme constant en ad_X; or on a $[ad_X, ad_H] = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ d'où $[ad_{X_D}, ad_H] = 0$ et $[ad_{X_N}, ad_H] = 0$ d'où $[X_D, H] = 0$ et $[X_N, H] = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

d) $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathfrak{g}$.
Soit $X \in \mathfrak{c}$; on a $X = X_D + X_N$ et $X_D, X_N \in \mathfrak{g}_o$ et comme ci-dessus on voit que $X_D, X_N \in \mathfrak{c}$; ainsi pour tout $Y \in \mathfrak{g}_o$, $ad_{X_N} ad_Y$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ de sorte que $K(X_N, Y) = 0$ donc, on a $X_N = 0$ et $X = X_D$ est diagonalisable.
i) $\Rightarrow$ ii) Prenons pour $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ de sorte que l'on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}$. Supposons que $\mathfrak{g}_o$ ne soit pas abélienne, donc que $\mathfrak{g}'_o \neq \{0\}$; $\mathfrak{g}'_o$ contient une sous-algèbre diagonalisable $\mathfrak{t}$ non nulle (puisque $\mathfrak{g}'_o$ est semi-simple) de sorte que $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{t}$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est n'est pas maximale. Ainsi $\mathfrak{g}_o$ est abélienne d'où $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{c} = \mathfrak{h}$.
ii) $\Rightarrow$ i) Supposons que $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{h}$; soit $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre diagonalisable de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$; comme $\mathfrak{h}_1$ est abélienne on a:

$$\mathfrak{h}_1 \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_o = \mathfrak{h}$$

de sorte que $\mathfrak{h}$ est maximale. ●

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; on a alors la décomposition radicielle de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

où on a posé:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \ / \ [H,X] = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h} \}$$

pour tout $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ et où

$$\Phi = \{ \alpha \in \mathfrak{h}^*\setminus\{0\} \ / \ \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\} \}$$

est l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

__proposition 1.3__

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension n; considérons pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le polynôme caractéristique de ad_X:

$$\chi_X(T) = \det(T-ad_X)$$

i) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a:

$$\chi_X(T) = T^n + a_{n-1}(X)T^{n-1} + \dots\dots\dots + a_l(X)T^l$$

où a_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est une fonction polynomiale homogène de degré n-i sur $\mathfrak{g}$ et $a_l \neq 0$.

L'entier l ainsi défini est le rang de $\mathfrak{g}$.

ii) On a $1 \leq l \leq n-1$

iii) L'ensemble $\mathfrak{g}_{reg} = \{ X \in \mathfrak{g} \ / \ a_l(X) \neq 0 \}$ des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ est un ouvert dense dans $\mathfrak{g}$ pour la topologie de Zariski.

iv) Pour tout élément diagonalisable X de $\mathfrak{g}$ on a: $\dim(Z_{\mathfrak{g}}(X)) \geq l$ et de plus X est régulier si et seulement si $\dim(Z_{\mathfrak{g}}(X)) = l$.

● i) Il suffit d'appliquer la formule de développement du déterminant. ii) Comme 0 est valeur propre de ad_X on a $l \geq 1$; si on avait $l = n$ tout élément X de $\mathfrak{g}$ serait nilpotent.

iii) a_l est un polynôme de degré n-l $\neq 0$.

iv) Si X est diagonalisable, l'ordre du polynôme caractéristique χ_X de ad_X est égal à la dimension de $Z_{\mathfrak{g}}(X)$ (sous-espace propre de ad_X relativement à la valeur propre 0). ●

__proposition 1.4__

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple; tout élément régulier X de $\mathfrak{g}$ est diagonalisable et $\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(X)$ est l'unique sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ contenant X

● Soient $X \in \mathfrak{g}_{reg}$ et $\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(X)$; considérons la décomposition de Fitting de ad_X:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_X \oplus \mathfrak{i}_X$$

A) Montrons que:

$$[\mathfrak{n}_X, \mathfrak{n}_X] \subset \mathfrak{n}_X$$
$$[\mathfrak{n}_X, \mathfrak{i}_X] \subset \mathfrak{i}_X$$

Puisque $\mathfrak{n}_X = \mathfrak{g}_{ad_X,0}$ on a $\dim(\mathfrak{n}_X) = 1$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $\mathfrak{g}_{ad_X,\lambda}$ le nil-espace de $ad_X - \lambda I$ de sorte que:

$$\text{i) } \mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathfrak{g}_{ad_X,\lambda}$$

$$\text{ii) } [\mathfrak{g}_{ad_X,\lambda}, \mathfrak{g}_{ad_X,\mu}] \subset \mathfrak{g}_{ad_X,\lambda+\mu}$$

La propriété i) résulte de ce que $\mathfrak{g}_{ad_X,\lambda}$ est le sous-espace propre de $(ad_X)_D$ relativement à la valeur propre λ et la propriété ii) résulte de la relation:

$$(ad_X - \lambda - \mu)^n \, [Y,Z] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, [(ad_X - \lambda)^k Y, (ad_X - \mu)^{n-k}]$$

que l'on vérifie par récurrence sur n.

B) En particulier $\mathfrak{n}_X$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Montrons que:

$ad_Y | \mathfrak{n}_X$ est nilpotent pour tout $Y \in \mathfrak{n}_X$.

Soit U (resp V) l'ensemble des $Y \in \mathfrak{n}_X$ tels que $ad_Y | \mathfrak{n}_X$ soit non nilpotent (resp tels que $ad_Y | \mathfrak{i}_X$ soit inversible). Ce sont des ouverts de $\mathfrak{n}_X$ pour la topologie de Zariski et $V \neq \emptyset$ (V contient X). Supposons que $U \neq \emptyset$ de sorte que $U \cap V \neq \emptyset$. Alors soit $Y \in U \cap V$; puisque $Y \in V$ on a $\mathfrak{g}_{ad_Y,0} \subset \mathfrak{n}_X$ et puisque $Y \in U$ on a $d = \dim \mathfrak{g}_{ad_Y,0} < 1 = \dim(\mathfrak{n}_X)$; mais d est la multiplicité de la valeur propre 0 de ad_Y d'où une contradiction.

C) Montrons que:

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}_X) = \mathfrak{n}_X$$

Soit $Z \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}_X)$ de sorte que $[Z,X] \in \mathfrak{n}_X$; ainsi il existe $k \geq 1$ tel que:

$$ad_X^k \, [X,Z] = ad_X^{k+1} \, Z = 0$$

ie $Z \in \mathfrak{n}_X$.

D) Montrons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_X$ est réductive.

Il existe $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{n}_X = \mathrm{Ker}(ad_X^k)$ et $\mathfrak{i}_X = \mathrm{Im}(ad_X^k)$; soient $Z \in \mathfrak{n}_X$ et $Y \in \mathfrak{i}_X$; on a $Y = ad_X^k(Y_0)$ d'où:

$$K(Z,Y) = K(Z, ad_X^k(Y_0)) = K(ad_X^k(Z), Y_0) = 0$$

de sorte que la décomposition:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_X \oplus \mathfrak{i}_X$$

est orthogonale et $\mathfrak{n}_X$ est un sous-espace régulier.

E) L'algèbre $\mathfrak{n}_X$ est abélienne et $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_X$.

Puisque $\mathfrak{n}_X$ est réductive on a:

$$\mathfrak{n}_X = c \oplus \mathfrak{n}'_X$$

où c est le centre de $\mathfrak{n}_X$. On a $c \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_X$.

Si $\mathfrak{n}'_X \neq \{0\}$, puisque $\mathfrak{n}'_X$ est semi-simple, il existe $Z \in \mathfrak{n}'_X$ tel que $ad_Z|\mathfrak{n}'_X$ soit diagonalisable; mais $ad_Z|\mathfrak{n}'_X$ est nilpotent donc $ad_Z|\mathfrak{n}'_X = 0$ et par suite $Z = 0$. Ainsi $c = \mathfrak{h} = \mathfrak{n}_X$.

F) $\mathfrak{h}$ est diagonalisable.

Soit $Y \in \mathfrak{h}$; puisque ad_{Y_D} et ad_{Y_N} sont des polynômes sans terme constant en ad_Y on voit que $Y_D \in \mathfrak{h}$ et $Y_N \in \mathfrak{h}$. Pour tout $Z \in \mathfrak{h}$, $ad_Z ad_{Y_N}$ est nilpotent de sorte que $K(Z, Y_N) = 0$ d'où $Y_N = 0$ et $Y = Y_D$ est diagonalisable. ●

On désigne par $Aut_e(\mathfrak{g})$ le sous-groupe de $Aut(\mathfrak{g})$ engendré par les automorphismes e^{ad_X} où X est nilpotent.

2. Le théorème de conjugaison.

<u>proposition</u> <u>2.1</u>

Considérons une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ de rang 1;

i) Soient $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan et Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$; on pose:

$$\mathfrak{h}_{reg} = \{ H \in \mathfrak{h} \;/\; Z_{\mathfrak{g}}(H) = \mathfrak{h}\}$$

Alors on a $H \in \mathfrak{h}_{reg}$ si et seulement si $\alpha(H) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$; en particulier $\mathfrak{h}_{reg}$ est un ouvert dense de $\mathfrak{h}$ pour la topologie de Zariski.

ii) Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{t}$ deux sous-algèbres de Cartan de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$; alors il existe $u \in Aut_e(\mathfrak{g})$ tel que $u(\mathfrak{h}) = \mathfrak{t}$.

iii) Pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ on a $\dim(\mathfrak{h}) = 1$ et $\mathfrak{h}_{reg} = \mathfrak{g}_{reg} \cap \mathfrak{h}$.

● i) Soit $Z \in \mathfrak{h}_{reg}$; pour $\alpha \in \Phi$ on a $[H, X] = \alpha(H)X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et tout $H \in \mathfrak{h}$. Si on avait $\alpha(Z) = 0$ on aurait $[Z, X] = 0$ ie $X \in \mathfrak{h}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ donc $\mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$; ainsi $\alpha(Z) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

Réciproquement, soit $Z \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha(Z) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$; on a évidemment $\mathfrak{h} \subset Z_{\mathfrak{g}}(Z)$. Considérons alors $X \in Z_{\mathfrak{g}}(Z)$ (ie $X \in \mathfrak{g}$ tel que $[Z,X] = 0$); on a:

$$X = H + \sum_{\alpha\in\Phi} X_\alpha \quad \text{avec } H \in \mathfrak{h} \text{ et } X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \text{ pour } \alpha \in \Phi$$

d'où

$$[Z,X] = \sum_{\alpha\in\Phi} [Z,X_\alpha] = \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha(Z)X_\alpha = 0$$

de sorte que $X_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$ et $X = H \in \mathfrak{h}$. On a donc $Z_{\mathfrak{g}}(Z) = \mathfrak{h}$.

ii) Soit $\Phi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$, montrons que l'application:

$$F_{\mathfrak{h}}: \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{g}_{\alpha_N} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$(H,X_1,\ldots,X_N) \longrightarrow e^{\mathrm{ad}_{X_1}} \ldots\ldots e^{\mathrm{ad}_{X_N}}(H)$$

est polynomiale dominante. Comme chaque $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$ est nilpotent (car si $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ on a $\mathrm{ad}_X^kY \in \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$), l'application F est évidemment polynomiale.

Prenons $H_o \in \mathfrak{h}_{reg}$ et posons $u = DF_{\mathfrak{h}}(H_o,0,\ldots,0)$; pour montrer que $F_{\mathfrak{h}}$ est dominante il suffit de montrer que u est surjective.

Pour $H \in \mathfrak{h}$ on a:

$$F_{\mathfrak{h}}(H_o+H,0,\ldots,0) = H_o+H$$

donc $u(H,0,\ldots,0) = H$ ce qui montre que $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Im}(u)$.

Pour $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ $(1 \le i \le N)$ on a:

$$F_{\mathfrak{h}}(H_o,0,\ldots,X_i,\ldots0) = e^{\mathrm{ad}_{X_i}}H_o$$

donc $u(0,\ldots,X_i,\ldots,0) = [X_i,H_o] = -\alpha_i(H_o)X_i$ donc $\mathfrak{g}_{\alpha_i} \subset \mathrm{Im}(u)$ $(1 \le i \le N)$ ce qui établit que u est surjective.

Comme $\mathfrak{h}_{reg}$ est un ouvert non vide de $\mathfrak{h}$, on voit que $F_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}_{reg} \times \prod_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha)$ contient un ouvert non vide U de $\mathfrak{g}$; de même $F_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{t}_{reg} \times \prod_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha)$ (où Ψ est l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{t}$) contient un ouvert non vide V de $\mathfrak{g}$ de sorte que:

$$F_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h}_{reg} \times \prod_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha) \cap F_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{t}_{reg} \times \prod_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha) \neq \emptyset$$

On a donc $u(H) = v(K)$ avec $H \in \mathfrak{h}_{reg}$, $K \in \mathfrak{t}_{reg}$ et $u,v \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$; mais on a $\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(H)$ et $\mathfrak{t} = Z_{\mathfrak{g}}(K)$ donc $u(\mathfrak{h}) = v(\mathfrak{t})$.

iii) Pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ on a $\dim(\mathfrak{h}) = 1$.

Soit $Z \in \mathfrak{g}_{reg} \cap \mathfrak{h}$; $Z_{\mathfrak{g}}(Z)$ est donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ de sorte que $\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(Z)$ d'où $Z \in \mathfrak{h}_{reg}$.
Réciproquement soit $Z \in \mathfrak{h}_{reg}$; comme $Z_{\mathfrak{g}}(Z) = \mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan on voit que Z est diagonalisable et que $\dim(Z_{\mathfrak{g}}(Z)) = 1$ de sorte que Z est régulier. ●

<u>corollaire</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre semi-simple, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ des sous-algèbres de Cartan, Φ (resp Ψ) l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ (resp à $\mathfrak{k}$) et $u \in Aut_e(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{k} = u(\mathfrak{h})$.

i) on a $\Phi = {}^t u(\Psi)$

ii) On a $\mathfrak{g}_\beta^{(\Psi)} = u(\mathfrak{g}_{\beta\circ u}^{(\Phi)})$ pour tout $\beta \in \Psi$

où $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha^{(\Phi)}$ (resp $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \sum_{\beta\in\Psi} \mathfrak{g}_\beta^{(\Psi)}$) est la décomposition radicielle de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ (resp $\mathfrak{k}$).

● Soient $\beta \in \Psi$ et $Y \in \mathfrak{g}_\beta^{(\Psi)}$ de sorte que $[K,Y] = \beta(K)Y$ pour tout $K \in \mathfrak{k}$.
Mais on a de manière unique $K = u(H)$ avec $H \in \mathfrak{h}$ et $Y = u(X)$ avec $X \in \mathfrak{g}$.
Il en résulte que $[H,X] = \beta\circ u(H)X$ donc $\beta\circ u \in \Phi$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha^{(\Phi)}$. ●

APPENDICE II

TOPOLOGIE DE ZARISKI

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n; on désigne par $\mathcal{O}(E)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions polynomiales de E dans $\mathbb{C}$. L'algèbre $\mathcal{O}(E)$ est isomorphe à une algèbre de polynômes $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ (si $(e_i)_{1\le i\le n}$ est une base de E et si $(e_i^*)_{1\le i\le n}$ est la base duale, l'application $f \longrightarrow \tilde{f}$, où $\tilde{f}(x) = f(e_1^*(x),\ldots,e_n^*(x))$ pour tout $x \in E$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ sur $\mathcal{O}(E)$).

Une partie F de E est fermée s'il existe une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}(E)$ telle que, pour tout $x \in E$:

$$x \in F \Leftrightarrow f_i(x) = 0 \text{ pour tout } i \in I.$$

On définit ainsi la topologie de Zariski sur E.

Pour tout idéal I de $\mathcal{O}(E)$, on désigne par $\mathcal{V}(I)$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $f \in I$; c'est un fermé de E (évidemment tout fermé de E est de cette forme et , d'après le théorème de la base finie de Hilbert, il existe $f_1,\ldots,f_r \in \mathcal{O}(E)$ tels que $x \in F$ si et seulement si $f_i(x) = 0$ pour $1\le i\le r$).

Pour tout $f \in \mathcal{O}(E)$, $\mathcal{D}(f) = \{x \in E/f(x) \ne 0\}$ est un ouvert de E (ouvert principal défini par f; les ouverts principaux forment une base de la topologie de Zariski).

Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie; on a $\mathcal{O}(E \times F) \simeq \mathcal{O}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(F)$ (en effet si $f \in \mathcal{O}(E)$ et $g \in \mathcal{O}(F)$, on définit $f \otimes g \in \mathcal{O}(E \times F)$ par $f \otimes g(x,y) = f(x)g(y)$; on obtient ainsi un système générateur de l'espace vectoriel $\mathcal{O}(E \times F)$).

<u>proposition</u> <u>1</u> (lemme de normalisation de Noether)

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre commutative intègre de type fini; il existe des éléments $z_1,\ldots,z_r \in A$ tels que:

i) $z_1,\ldots,z_r$ sont algébriquement indépendants sur K;

ii) A est entière sur $K[z_1,\dots,z_r]$.

● Puisque A est de type fini sur K on a:

$$A = K[x_1,\dots,x_m].$$

Si $x_1,\dots,x_m$ ne sont pas algébriquement indépendants, il existe un polynôme non nul $f = \sum_\alpha a_\alpha X_1^{\alpha_1}\dots\dots X_m^{\alpha_m} \in K[X_1,\dots\dots,X_m]$ tel que $f(x_1,\dots,x_m) = 0$. Posons, pour $2 \le i \le m$, $x'_i = x_i - x_1^{s^i}$ où s est un entier tel que les $\chi(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_m s^m$ soient deux à deux distincts. On a alors:

$$\sum_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}(x'_2 + x_1^{s^2})^{\alpha_2}\dots\dots\dots(x'_m + x_1^{s^m})^{\alpha_m} = 0$$

Soit α tel que $\chi(\alpha)$ soit maximal; on a:

$$a_\alpha x_1^{\chi(\alpha)} + \sum_{k=0}^{k=\chi(\alpha)-1} P_K(x'_2,\dots,x'_m)x_1^k = 0$$

de sorte que x_1 est entier sur $K[x'_2,\dots,x'_m]$. Il en résulte que A est entière sur $K[x'_2,\dots,x'_m]$. On conclut alors par récurrence sur m. ●

On désigne par:

$\mathrm{Spm}(\mathcal{O}(E))$ l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}(E)$

$\mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(E),\mathbb{C})$ l'ensemble des morphismes d'algèbres de $\mathcal{O}(E)$ dans $\mathbb{C}$

$\mathfrak{i}(M)$, où M est une partie de E, l'ensemble des $f \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $x \in M$; c'est un idéal radiciel de $\mathcal{O}(E)$ (ie un idéal I tel que $I = \mathrm{rac}(I)$ où $\mathrm{rac}(I)$ est l'idéal des $f \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f^r \in I$ pour r assez grand).

<u>proposition</u> <u>2</u> (théorème des zéros de Hilbert)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie;

i) Les applications:

$$E \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(E),\mathbb{C})$$
$$x \longrightarrow \tilde{x}$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(E),\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Spm}(\mathcal{O}(E))$$
$$\chi \longrightarrow \mathfrak{m}_\chi$$

(où $\tilde{x}(f) = f(x)$ et $\mathfrak{m}_\chi = \mathrm{Ker}(\chi)$) sont des bijections.

ii) Pour tout idéal I de $\mathcal{O}(E)$, on a $\mathfrak{i}(\mathcal{V}(I)) = \mathrm{rac}(I)$.

En particulier, on a une bijection $F \longrightarrow \mathfrak{i}(F)$ entre l'ensemble des parties fermées de E et l'ensemble des idéaux radiciels de $\mathcal{O}(E)$ (la bijection réciproque étant $I \longrightarrow \mathcal{V}(I)$).

● i) Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ la base duale; on a alors un $\mathbb{C}$-isomorphisme:

$$\theta : \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow \mathcal{O}(E)$$

défini par $\theta(X_i) = \varepsilon_i$ pour $1 \le i \le n$. Il en résulte que pour tout $\chi \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(E),\mathbb{C})$, $x = \sum \chi(\varepsilon_i)e_i$ est l'unique élément de E tel que $\tilde{x} = \chi$.

D'autre part soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}(E)$; $K = \mathcal{O}(E)/\mathfrak{m}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini. D'après le lemme de normalisation, il existe des éléments $z_1,\dots,z_r \in K$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que K soit entier sur $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_r]$. Mais K est un corps; soit x un élément non nul de $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_r]$; $x^{-1} \in K$ est entier sur $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_r]$ d'où:

$$(x^{-1})^d + c_{d-1}(x^{-1})^{d-1} + \dots + c_1x^{-1} + c_0 = 0$$

et

$$x^{-1} = -(c_{d-1} + \dots + c_1x^{d-2} + c_0x^{d-1})$$

de sorte que $x^{-1} \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_r]$. Il en résulte que $r = 0$ donc que K est une extension algébrique de $\mathbb{C}$ et $K = \mathbb{C}$. Par suite si χ est le morphisme canonique de $\mathcal{O}(E)$ dans $K = \mathbb{C}$ on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\chi$.

ii) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{V}(I)$; soit J l'idéal de $\mathcal{O}(E)[T]$ ($\simeq \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n,T] \simeq \mathcal{O}(E \times \mathbb{C})$) engendré par I et par $1 - Tf$; on a $\mathcal{V}(J) = \emptyset$ (si $(x,t) \in \mathcal{V}(J)$ on a d'une part $f(x) = 0$ et d'autre par $tf(x) = 1$) et par suite $J = \mathcal{O}(E)[T]$ ie $1 \in J$. On a donc:

$$1 = \sum_j g_j(T)f_j + g(T)(1 - Tf)$$

avec $f_j \in I$; dans le corps des fractions de $\mathcal{O}(E)$ ($\simeq \mathbb{C}(X_1,\dots,X_n)$) on a:

$$1 = \sum_j g_j(1/f, X_1,\dots,X_n)f_j.$$

Le second membre est une fraction rationnelle dont le dénominateur est une puissance de f et dont le numérateur un élément de I. ●

<u>corollaire.</u>

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie; on a

$\overline{M} = \mathcal{V}(\mathfrak{i}(M))$ pour tout partie M de E.

● L'adhérence de M est égale à l'intersection des fermés contenant M; alors $M \subset \mathcal{V}(I)$ (avec I radiciel) $\Rightarrow \mathfrak{i}(\mathcal{V}(I)) = I \subset \mathfrak{i}(M)$ de sorte que $\mathcal{V}(\mathfrak{i}(M)) \subset \mathcal{V}(I)$ et l'on a $\overline{M} = \mathcal{V}(\mathfrak{i}(M))$.●

<u>proposition 3</u>

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni de la topologie de Zariski; alors E est irréductible c'est à dire vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes:

i) E n'est pas réunion de deux fermés distincts de E.

ii) L'intersection de deux ouverts non vides est non vide.

iii) Tout ouvert non vide est dense.

iv) Tout ouvert est connexe.

● Supposons que E soit la réunion de deux parties fermées $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$ et $\mathcal{V}(\mathfrak{j})$ de E où $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ sont deux idéaux de $\mathcal{O}(E)$. on a donc:

$$E = \mathcal{V}(\mathfrak{i}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}) \quad = \mathcal{V}(\mathfrak{i}.\mathfrak{j})$$

Il en résulte que $\mathfrak{i}.\mathfrak{j} = 0$. Supposons qu'il existe un élément non nul f dans $\mathfrak{i}.\mathfrak{j}$ de sorte qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ ie tel que $f \notin \mathfrak{m}_x$ où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}(E)$ formé des fonctions polynomiales nulles en x. Il en résulte que $\mathfrak{m}_x$ ne contient pas $\mathfrak{i}.\mathfrak{j}$ ie que $x \notin \mathcal{V}(\mathfrak{i}.\mathfrak{j})$ d'où une contradiction. comme $\mathfrak{i}.\mathfrak{j} = 0$ on a $\mathfrak{i} = 0$ ou $\mathfrak{j} = 0$ puisque $\mathcal{O}(E)$ est intègre donc $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = E$ ou $\mathcal{V}(\mathfrak{j}) = E$.●

<u>proposition 4</u>

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application polynomiale, où E et F sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (munis de la topologie de Zariski); les conditions suivantes sont équivalentes:

i) u(E) est une partie dense de F (ie f est dominante)

ii) le morphisme $\tilde{u} : \mathcal{O}(F) \longrightarrow \mathcal{O}(E)$ est injectif.

De plus, s'il existe $x \in E$ tel que l'application dérivée $Du(x): E \longrightarrow F$ soit injective, u est dominante.

● Comme $\overline{u(E)} = \mathcal{V}(\mathfrak{i}(u(E)))$ on voit que $\overline{u(E)} = \mathcal{V}(\mathrm{Ker}(\tilde{u}))$ ($y \in \mathcal{V}(\mathrm{Ker}(\tilde{u})$ si et seulement si $g(y) = 0$ pour tout $g \in \mathcal{O}(F)$ tel que $g \circ u = 0$ ie pour tout $g \in \mathfrak{i}(u(E)))$ et $\mathcal{V}(\mathrm{Ker}(\tilde{u})) = F$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(\tilde{u}) = \{0\}$.

On se ramène à $x = 0$ et à $u(x) = 0$; si la partie homogène de degré

1 de u (ie $Du(0)$) est injective, alors $\tilde{u}$ est injectif.●

<u>proposition</u> <u>5</u> (Chevalley)

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application polynomiale dominante, où E et F sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (munis de la topologie de Zariski); alors, pour tout ouvert U de E, u(U) contient un ouvert non vide de Y.

● Soit $\tilde{u} : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ le $\mathbb{C}$-morphisme définissant u; puisque u est dominant $\tilde{u}$ est injectif. On peut supposer que U est un ouvert principal $\mathcal{D}(f)$; on pose $B = \mathcal{O}(E)_f (= \mathcal{O}(E)[T]/(fT-1))$ et on désigne par A l'image de $\mathcal{O}(Y)$ dans B.

Soient K (resp L) le corps de fractions de A (resp B); KB est alors une K-algèbre de type fini et, d'après le lemme de normalisation, il existe des éléments $z_1,\dots,z_r$ de KB, algébriquement indépendants sur K tels que KB soit entière sur $K[z_1,\dots,z_r]$. Or on a $B = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]$ de sorte que les x_i sont entiers sur $K[z_1,\dots,z_r]$ donc vérifient:

$$x_i^{n_i} + \sum_{k_i=0}^{n_i-1} P_{i,k_i}(z_1,\dots,z_r)x_i^{k_i} = 0$$

où les P_{i,k_i} sont des polynômes à coefficients dans K. Puisque K est le corps des fractions de A il existe $s \in A$ tel que:

$$(sx_i)^{n_i} + \sum_{k_i=0}^{n_i-1} Q_{i,k_i}(sz_1,\dots,sz_r)(sx_i)^{k_i} = 0$$

où les $t_i = sz_i \in B$ et où les Q_{i,k_i} sont des polynômes à coefficients dans A. Naturellement, les t_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ et les sx_i sont entiers sur $A[t_1,\dots,t_r] \simeq A \otimes \mathbb{C}[t_1,\dots,t_r]$ de sorte que l'algèbre B_s est entière sur $A[t_1,\dots,t_r]_s \simeq A_s[t_1,\dots,t_r]$.

Il suffit alors de montrer que tout $\mathbb{C}$-morphisme $\eta : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\eta(s) \neq 0$ se prolonge en un $\mathbb{C}$-morphisme $\zeta : B \longrightarrow \mathbb{C}$ (si t est l'unique élément de $\mathcal{O}(Y)$ dont l'image dans A est égale à s, $u(\mathcal{D}(f))$ contiendra l'ouvert D(t) de Y).

Evidemment η se prolonge en un $\mathbb{C}$-morphisme $\zeta_0 : A_s[t_1,\dots,t_r] \longrightarrow \mathbb{C}$ et l'existence d'un prolongement ζ de

ζ_o à B_s résulte de ce que $S = B_s$ est entière sur $R = A_s[t_1,\dots,t_r]$: en effet $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\zeta_o)$ est un idéal maximal de R; on a $\mathfrak{m}.S \neq S$ sinon on aurait $1 = \sum x_i y_i$ avec les $x_i \in \mathfrak{m}$ et les $y_i \in S$ de sorte que $M = R[y_1,\dots,y_n]$ serait un R-module de type fini non nul tel que $\mathfrak{m}.M = M$ ce qui contredirait le lemme de Nakayama. Soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de S contenant $\mathfrak{m}.S$; on a $\mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{m}$ et ζ est un $\mathbb{C}$-morphisme de noyau $\mathfrak{n}$. ●

CHAPITRE IV

RACINES D'UNE ALGEBRE DE LIE SEMI-SIMPLE

1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ et ses représentations.

On désigne par $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ la sous-algèbre de dimension 3 de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ formée des matrices d'ordre 2 de trace nulle; les matrices:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

constituent la base canonique de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ et vérifient les relations:

$$\begin{cases} [X,Y] = H \\ [H,X] = 2X \\ [H,Y] = -2Y \end{cases}$$

<u>proposition</u> <u>1.1</u>

i) L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ est simple de rang 1; $\mathbb{C}H$ est une sous-algèbre de Cartan

ii) Pour chaque entier $s \geq 0$, il existe, à un isomorphisme près, une unique représentation irréductible:

$$\rho'_s : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(L_s)$$

de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de rang $s + 1$.

L'espace vectoriel L_s possède une base $(e_i)_{0\leq i\leq s}$ telle que:

$$\rho'_s(H)e_i = (s-2i)e_i \qquad 0 \leq i \leq s$$

$$\rho'_s(X)e_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ (s-i+1)e_{i-1} & 1 \leq i \leq s \end{cases}$$

$$\rho'_s(Y)e_i = \begin{cases} (i+1)e_{i+1} & 0 \leq i \leq s-1 \\ 0 & i = s \end{cases}$$

(le vecteur e_0 est primitif de poids s)

● i) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ et $Z \in \mathfrak{a}\setminus\{0\}$; si $Z = aH$ on a $[Z,X] = 2aX \in \mathfrak{a}$ et $[Z,Y] = -2aY \in \mathfrak{a}$ tandis que si $Z = aH + bX + cY$ avec $b\neq0$ ou $c\neq0$ on a:

$$[H,Z] = 2bX - 2cY \in \mathfrak{a} \text{ et}$$

$$[H,[H,Z]] = 4bX + 4cY \in \mathfrak{a}$$

donc dans tous les cas on a $X,Y,H \in \mathfrak{a}$ d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

D'autre part comme $\mathbb{C}H$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{Z}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}(\mathbb{C}H) = \mathbb{C}H$ on voit que $\mathbb{C}H$ est une sous-algèbre de Cartan donc que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ est de rang 1.

ii) En posant $e_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i > s$ on a:

$$
\begin{aligned}
[\rho'_s(X),\rho'_s(Y)]e_i &= \rho'_s(X)((i+1)e_{i+1}) - \rho'_s(Y)((s-i+1)e_{i-1}) \\
&= ((i+1)(s-i) - (s-i+1)i)e_i \\
&= (s - 2i)e_i \\
&= \rho'_s(H)e_i \\
[\rho'_s(H),\rho'_s(X)]e_i &= \rho'_s(H)((s-i+1)e_{i-1}) - \rho'_s(X)((s-2i)e_i) \\
&= ((s-i+1)(s-2i+2) - (s-2i)(s-i+1))e_{i-1} \\
&= 2(s-i+1)e_{i-1} \\
&= 2\rho'_s(X)e_i \\
[\rho'_s(H),\rho'_s(Y)]e_i &= \rho'_s(H)((i+1)e_{i+1}) - \rho'_s(Y)((s-2i)e_i) \\
&= ((i+1)(s-2i-2) - (s-2i)(i+1))e_{i+1} \\
&= -2(i+1)e_{i+1} \\
&= -2\rho'_s(Y)e_i
\end{aligned}
$$

de sorte que l'on a bien défini une représentation:

$$\rho'_s : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(L_s)$$

de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Cette dernière est irréductible: en effet L_s est de dimension $s+1$ et les valeurs propres de $\rho'_s(H)$ sont $s, s-2, \ldots\ldots, -s+2, -s$ avec les vecteurs propres associés $e_0, e_1, \ldots\ldots, e_{s-1}, e_s$ donc chacune de ces valeurs propres est de multiplicité 1; maintenant si W est un sous-espace non nul de L_s stable par ρ'_s, $\rho'_s(H)|W$ est diagonalisable donc W contient l'un des e_i donc tous de sorte que $W = L_s$.

iii) Soit $\rho: \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$; $\rho(H)$ est un endomorphisme diagonalisable de V tandis que $\rho(X)$ et $\rho(Y)$ sont des endomorphismes nilpotents de V; soit v un vecteur propre de $\rho(H)$ et ν le plus petit entier tel que $\rho(X)^{\nu+1}v = 0$; alors $e_0 = \rho(X)^{\nu}v$ est un vecteur propre de $\rho(H)$, de valeur propre μ (si $\rho(H)v = \lambda v$ on a $\rho(H)\rho(X)^k v = (\lambda + 2k)\rho(X)^k v$ pour tout $k \geq 0$ et $\mu = \lambda + 2\nu$) tel que $\rho(X)e_0 = 0$. Pour tout $i \geq 0$ on pose:

$$e_i = \frac{\rho(Y)^i}{i!} e_0$$

et l'on a les formules:

$$\rho(H)e_i = (\mu-2i)e_i \qquad i \geq 0$$

$$\rho(X)e_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ (\mu-i+1)e_{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

$$\rho(Y)e_i = (i+1)e_{i+1} \qquad i \geq 0$$

Comme les e_i sont des vecteurs propres de $\rho(H)$ associés à des valeurs propres distinctes, ceux qui sont non nuls sont linéairement indépendants et si $e_i = 0$ on a $e_{i'} = 0$ pour $i' \geq i$.

Puisque V est de dimension finie, il existe un plus petit entier $s \geq 0$ tel que $e_{s+1} = 0$ de sorte que la famille $(e_i)_{0\leq i\leq s}$ est libre dans V et que $e_{i'} = 0$ pour $i' \geq s+1$. On a:

$$\rho(X)e_{s+1} = (\mu-s)e_s = 0$$

de sorte que $\mu = s$.

Le sous-espace vectoriel de V engendré par $(e_i)_{0\leq i\leq s}$ est stable par ρ donc est égal à V; et ρ est isomorphe à ρ'_s. ●

<u>corollaire 1</u>

Soit ρ: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dans un espace vectoriel de dimension finie V; $\rho(H)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des entiers ≥ 0 tandis que $\rho(X)$ et $\rho(Y)$ sont nilpotents.

<u>corollaire 2</u>

Soit ρ: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dans un espace vectoriel de dimension finie V telle que:

i) toutes les valeurs propres de $\rho(H)$ sont simples

ii) si λ et μ sont deux valeurs propres de $\rho(H)$ on a $\lambda - \mu \in 2\mathbb{Z}$

Alors ρ est irréductible.

● ρ est somme directe de représentations irréductibles de sorte que la condition i) implique que ρ est irréductible ou que $\rho = \rho_s \oplus \rho_{s'}$, avec s pair et s' impair et la condition ii) implique que ρ est irréductible. ●

Soit $SL(2,\mathbb{C})$ le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 telles que $ad - bc = 1$.

Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ est engendré par les matrices:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

avec $t \in \mathbb{C}$. L'homomorphisme:

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$$

$$t \longrightarrow h(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

est injectif et son image est le sous-groupe T de $SL(2,\mathbb{C})$ formé des matrices diagonales. Soient N le normalisateur de T dans $SL(2,\mathbb{C})$ et $M = N \setminus T$; alors l'application:

$$C^* \longrightarrow M$$

$$t \longrightarrow q(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

est bijective et l'on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$:

$$q(t) = x(t)y(-1/t)x(t)$$

$$h(t) = q(t)q(-1)$$

$$q(t)^{-1} = q(-t)$$

<u>proposition 1.2</u>

Pour tout entier $s \geq 0$, il existe une unique représentation:

$$\rho_s : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(L_s)$$

telle que, pour tout $t \in \mathbb{C}$ on ait:

$$\rho_s(x(t)) = \exp(t\rho'_s(X)) \quad \rho_s(y(t)) = \exp(t\rho'_s(Y))$$

Soit $(e_i)_{0\leq i\leq s}$ la base canonique de L_s, on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$:

$$\rho_s(h(t))e_i = t^{s-2i}e_i$$

$$\rho_s(q(t))e_i = (-1)^{s-i}t^{2i-s}e_{s-i} \qquad 0 \leq i \leq s$$

● Considérons les dérivations:

$$\nabla_X = U\frac{\partial}{\partial V}$$

$$\nabla_Y = V\frac{\partial}{\partial U}$$

$$\nabla_H = U\frac{\partial}{\partial U} - V\frac{\partial}{\partial V}$$

de l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[U,V]$; on a:

$$[\nabla_X,\nabla_Y] = \nabla_H$$

$$[\nabla_H,\nabla_X] = 2\nabla_X$$
$$[\nabla_H,\nabla_Y] = -2\nabla_Y$$
de sorte que l'on en déduit une représentation:
$$\nabla : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[U,V])$$

Pour chaque $s \geq 0$, le sous-espace $\mathbb{C}[U,V]_s$ des polynômes homogènes de degré s est stable par ∇ et si l'on considère la base:
$$e_i^{(s)} = C_s^i \, U^{s-i}V^i \qquad 0 \leq i \leq s$$
de $\mathbb{C}[U,V]_s$ on a:
$$\nabla_H e_i^{(s)} = (s-2i)e_i^{(s)} \qquad 0 \leq i \leq s$$
$$\nabla_X e_i^{(s)} = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ (s-i+1)e_{i-1}^{(s)} & 1 \leq i \leq s \end{cases}$$
$$\nabla_Y e_i^{(s)} = \begin{cases} (i+1)e_{i+1}^{(s)} & 0 \leq i \leq s-1 \\ 0 & i = s \end{cases}$$
de sorte que l'on peut identifier L_s et $\mathbb{C}[U,V]_s$ pour tout $s \geq 0$.

On définit une représentation:
$$\rho : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{C}[U,V])$$
en posant:
$$\rho(g).P(U,V) = P(aU+cV,bU+dV)$$
pour tout $g \in SL(2,\mathbb{C})$ et tout $P \in \mathbb{C}[U,V]$; chaque sous-espace $\mathbb{C}[U,V]_s$ est stable pour cette action.

On a:
$$(\nabla_X)^k e_i^{(s)} = \begin{cases} d_k e_{i-k}^{(s)} & \text{pour } 0 \leq k \leq i \\ 0 & \text{pour } k > i \end{cases}$$
avec:
$$d_k = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ (s-i+1)\ldots\ldots(s-i+k) & \text{pour } 1 \leq k \leq i \end{cases}$$
de sorte que l'endomorphisme ∇_X de $\mathbb{C}[U,V]_s$ est nilpotent et l'on peut calculer:
$$\begin{aligned} \exp(t\nabla_X)e_i^{(s)} &= \sum_{k=0}^{i} \frac{t^k}{k!} \nabla_X^k e_i^{(s)} \\ &= \sum_{k=0}^{i} \frac{t^k}{k!} d_k e_{i-k}^{(s)} \\ &= \sum_{k=0}^{i} \frac{t^k}{k!} d_k C_s^{i-k} \, U^{s-i+k}V^{i-k} \end{aligned}$$

$$= C_s^i U^{s-i} \sum_{k=0}^{i} C_i^k \; (tU^k) V^{i-k}$$

$$= C_s^i U^{s-i} (tU + V)^i$$

$$= \rho(x(t)) e_i^{(s)}$$

De même on a:

$$(\nabla_Y)^k e_i^{(s)} = \begin{cases} d'_k e_{i+k}^{(s)} & \text{pour } 0 \le k \le s-i \\ 0 & \text{pour } k > s-i \end{cases}$$

avec:

$$d'_k = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ (i+1)\ldots\ldots(i+k) & \text{pour } 1 \le k \le i \end{cases}$$

de sorte que l'endomorphisme ∇_Y de $\mathbb{C}[U,V]_s$ est nilpotent et l'on peut calculer:

$$\exp(t\nabla_Y) e_i^{(s)} = \sum_{k=0}^{s-i} \frac{t^k}{k!} \nabla_Y^k e_i^{(s)}$$

$$= \sum_{k=0}^{s-i} \frac{t^k}{k!} d'_k e_{i+k}^{(s)}$$

$$= \sum_{k=0}^{s-i} \frac{t^k}{k!} d'_k C_s^{i+k} \; U^{s-i-k} V^{i+k}$$

$$= C_s^i V^i \sum_{k=0}^{s-i} C_{s-i}^k \, U^{s-i-k} (tV)^k$$

$$= C_s^i (U + tV)^{s-i} \; V^i$$

$$= \rho(y(t)) e_i^{(s)}$$

Il suffit alors de prendre $\rho_s = \rho|\mathbb{C}[U,V]_s$ pour tout $s \ge 0$. ●

<u>corollaire</u>

Soit v un vecteur de poids -1 de la représentation:

$$\rho'_s : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(L_s)$$

Alors s est impair et on a:

$$\rho'_s(X)v = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{s+1}{2}\right) \rho_s(q(1))v.$$

● On a $s-2i = -1$ donc s est impair et l'on est ramené à vérifier que:

$$\rho'_s(X) e_i^{(s)} = (-1)^{i-1} i \; \rho_s(q(1)) e_i^{(s)}$$

Or on a:

$$\rho'_s(X) e_i^{(s)} = (s-i+1) e_{i-1}^{(s)} = i e_{i-1}^{(s)}$$

$$\rho_s(q(1)) e_i^{(s)} = (-1)^{s-i} e_{s-i}^{(s)} = (-1)^{i-1} e_{s-i}^{(s)} . \; ●$$

2. Racines d'une algèbre de Lie semi-simple complexe.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan; on pose pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^*$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \ / \ [H,X] = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h} \}.$$

Les racines de $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{h}$) sont les $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_o$ et $\mathfrak{g}$ se décompose en la somme directe:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

(décomposition radicielle de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$) où Φ est l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

<u>proposition 2.1</u>

i) $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ pour tout $\alpha,\beta \in \Phi$;

ii) $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ sont orthogonaux pour la forme de Killing K lorque $\alpha+\beta \neq 0$;

En particulier les sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Phi$ sont hyperboliques et $\mathfrak{h}$ est régulier.

iii) $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$

● i) Pour $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, l'identité de Jacobi s'écrit:

$$[[H,X],Y] + [[X,Y],H] + [[Y,H],X] = 0$$

de sorte que

$$(\alpha(H) + \beta(H))[X,Y] + [[X,Y],H] = 0$$

ii) Soient $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ et $H \in \mathfrak{h}$; par invariance de K on a :

$$K([H,X],Y) + K(X,[H,Y]) = 0 \text{ d'où}$$

$$(\alpha+\beta)(H)\ K(X,Y) = 0$$

de sorte que l'on a la décomposition orthogonale:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$$

et chaque terme est donc un sous-espace régulier.

iii) Supposons que l'on ait $\alpha \in \Phi$ avec $-\alpha \notin \Phi$; on aurait donc $\alpha+\beta \neq 0$ pour tout $\beta \in \Phi$ donc $\mathfrak{g}_\alpha$ serait orthogonal à $\mathfrak{g}_\beta$ pour tout $\beta \in \Phi$ et comme $\mathfrak{g}_\alpha$ est orthogonal à $\mathfrak{h}$ on obtiendrait que $\mathfrak{g}_\alpha$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$ donc $\mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$ d'après le critère de semi-simplicité de Cartan ce qui contredit le fait que α est une racine. ●

<u>proposition 2.2</u>

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ soit h_λ l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que:

$$\lambda(H) = K(H,h_\lambda) \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}$$

i) On a $[X,Y] = K(X,Y)h_\alpha$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\alpha \in \Phi$.

En particulier $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ est un sous-espace de dimension 1 de $\mathfrak{h}$.

ii) Pour tout $\alpha \in \Phi$, $\alpha|\mathfrak{h}_\alpha \neq 0$; en particulier il existe un unique $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$.

● L'existence et l'unicité de h_λ résultent de ce que $\mathfrak{h}$ est un sous-espace régulier pour K.

i) L'invariance de K montre que:

$$K(H,[X,Y]) = K([H,X],Y) = \alpha(H)K(X,Y)$$
$$= K(H,K(X,Y)h_\alpha)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\alpha \in \Phi$ et puisque $\mathfrak{h}$ est un sous-espace régulier pour K on a $[X,Y] = K(X,Y)h_\alpha$.

ii) Il suffit de vérifier que $\alpha(h_\alpha) \neq 0$ ie que h_α n'est pas isotrope. Choisissons $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $K(X,Y) = 1$ (ce qui est possible puisque $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ est régulier et $\mathfrak{g}_\alpha$ totalement singulier). On a donc:

$$[X,Y] = h_\alpha$$

Supposons que $\alpha(h_\alpha) = 0$ de sorte que $[h_\alpha,X] = 0$. Soit R une réplique de ad_{h_α} ; on a:

$$t(ad_{h_\alpha},R) = t([ad_X,ad_Y],R) = t(ad_Y,[R,ad_X]).$$

Mais $[ad_{h_\alpha},ad_X] = 0$ donc $[R,ad_X] = 0$ puisque R est un polynôme sans terme constant en ad_{h_α}. On a donc $t(ad_{h_\alpha},R) = 0$ de sorte que h_α est nilpotent d'après le critère de Chevalley; comme h_α est diagonalisable on a $h_\alpha = 0$ et $\alpha = 0$ donc une contradiction. Ainsi $\alpha(h_\alpha) \neq 0$. ●

<u>remarque:</u> L'isomorphisme:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ \lambda & \longrightarrow & h_\lambda \end{array}$$

permet de munir l'espace vectoriel $\mathfrak{h}^*$ d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée K telle que:

$$K(\lambda,\mu) = K(h_\lambda,h_\mu) \text{ pour tout } \lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*$$

Ainsi les racines $\alpha \in \Phi$ sont non isotropes et l'on a:

$$H_\alpha = \frac{2h_\alpha}{K(\alpha,\alpha)}$$

<u>proposition 2.3</u>

i) Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $X_\alpha \in g_\alpha \setminus \{0\}$, il existe un unique élément $Y_\alpha \in g_{-\alpha}$ tel que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

On a alors:

$$[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha \text{ et}$$
$$[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$$

de sorte que $s_\alpha = \mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathbb{C}Y_\alpha$ est une sous-algèbre de Lie de g isomorphe à $sl(2,\mathbb{C})$.

ii) $\dim(g_\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

En particulier on a $K(H,H') = \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha(H)\alpha(H')$ pour tout $H,H' \in \mathfrak{h}$.

● i) Soit X_α un élément non nul de g_α, puisque g_α est totalement singulier et que $g_\alpha \oplus g_{-\alpha}$ est régulier, il existe au moins un élément non nul Y_α de $g_{-\alpha}$ tel que $K(X_\alpha, Y_\alpha) = 2 / K(\alpha,\alpha)$ et on a alors:

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = K(X_\alpha, Y_\alpha)h_\alpha = 2h_\alpha / K(\alpha,\alpha) = H_\alpha$$
$$[H_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha \text{ et}$$
$$[H_\alpha, Y_\alpha] = \alpha(H_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha$$

de sorte que s_α est une sous-algèbre de Lie de g isomorphe à $sl(2,\mathbb{C})$.

ii) Supposons que $\dim(g_\alpha) > 1$ et donc aussi que $\dim(g_{-\alpha}) > 1$; l'hyperplan de g d'équation $K(X_\alpha, Y) = 0$ aurait avec $g_{-\alpha}$ une intersection non réduite à $\{0\}$ et il existerait un élément non nul Y de $g_{-\alpha}$ tel que:

$$[X_\alpha, Y] = 0 \text{ et}$$
$$[H_\alpha, Y] = -2Y$$

de sorte que pour la représentation:

$$\begin{aligned} s_\alpha \simeq sl(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow gl(g) \\ Z &\longrightarrow ad_Z \end{aligned}$$

Y serait un vecteur primitif de poids -2 ce qui est contradictoire. On a donc nécessairement $\dim g_\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in \Phi$. ●

<u>proposition 2.4</u>

i) Φ engendre $\mathfrak{h}^*$ et $\Phi^\vee = \{H_\alpha \ / \ \alpha \in \Phi\}$ engendre $\mathfrak{h}$

ii) Pour tout $\alpha,\beta \in \Phi$, le nombre

$$a_{\beta,\alpha} = \beta(H_\alpha) = 2K(\alpha,\beta)/K(\alpha,\alpha)$$

est un entier rationnel.

iii) Pour tout $\alpha,\beta \in \Phi$ on a $\beta - a_{\beta,\alpha}\alpha \in \Phi$

iv) Pour tout $\alpha \in \Phi$ on a $\mathbb{C}\alpha \cap \Phi = \{\alpha,-\alpha\}$

v) Soient α et β deux racines non proportionnelles et p (resp q) le plus grand entier tel que $\beta - p\alpha$ (resp $\beta + q\alpha$) soit une racine (de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$)

a) pour tout $k \in [-p,q] \subset \mathbb{Z}$, $\beta + k\alpha$ est une racine

b) $a_{\beta,\alpha} = p-q$

vi) Si $\alpha,\beta,\alpha+\beta \in \Phi$ on a $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

● i) Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\lambda(H_\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$; on a alors:

$$\lambda(H_\alpha) = K(H_\alpha,h_\lambda) = K(\frac{2h_\alpha}{K(\alpha,\alpha)},h_\lambda) = \frac{2}{K(\alpha,\alpha)} K(h_\alpha,h_\lambda) = 0$$

d'où:

$$K(h_\alpha,h_\lambda) = K(h_\lambda,h_\alpha) = \alpha(h_\lambda) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Phi.$$

La décomposition radicielle de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ montre que h_λ est dans le centre de $\mathfrak{g}$ donc est nul; ainsi $\lambda = 0$ d'où i).

Soient α et β deux racines non proportionnelles; $\mathfrak{a}_{\beta,\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$ stable pour la restriction à $\mathfrak{s}_\alpha$ de la représentation adjointe; on a ainsi une représentation:

$$\sigma_{\beta,\alpha}: \mathfrak{s}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}): \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}_{\beta,\alpha})$$
$$Z \longrightarrow ad_z|\mathfrak{a}_{\beta,\alpha}$$

Les valeurs propres de $\sigma_{\beta,\alpha}(H_\alpha)$ sont les $(\beta+k\alpha)(H_\alpha) = a_{\beta,\alpha}+2k$ pour les entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\beta+k\alpha \in \Phi$ et chacune de ces valeurs propres est simple (puisque $\dim(\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}) = 1$ pour $\beta+k\alpha \in \Phi$). Par suite la représentation $\sigma_{\beta,\alpha}$ est irréductible de dimension $p+q+1$ d'où les assertions ii) et v).

On a $-p \le q-p = -a_{\beta,\alpha} \le p$ de sorte que $\beta - a_{\beta,\alpha}\alpha \in \Phi$ d'où iii).

Si $\alpha+\beta \in \Phi$ on a $\dim(\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}) = 1$ et $\sigma_{\beta,\alpha}(X_\alpha)X_\beta \neq 0$ d'où vi).

Montrons iv) pour terminer. Soient α et $\beta = t\alpha \in \Phi$ on a alors:

$$2t = t\alpha(H_\alpha) = \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$$

En échangeant α et β on a aussi $2/t \in \mathbb{Z}$ de sorte que $t \in \{\pm1/2,\pm1,\pm2\}$.

Comme l'opposé d'une racine est encore une racine, quitte à échanger α et β on peut supposer que t = 2. Soit $Y \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ de sorte que:

$$[H_\alpha, Y] = 2\alpha(H_\alpha)Y = 4Y$$

mais 3α n'est pas une racine donc $[X_\alpha, Y] = 0$; ainsi on a:

$$[H_\alpha, Y] = [[X_\alpha, Y_\alpha], Y] = [X_\alpha, [Y_\alpha, Y]]$$

mais $[Y_\alpha, Y] \in \mathfrak{g}_\alpha$ d'où $[H_\alpha, Y] = 0$ (puisque $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$ et que le crochet est alterné) et $Y = 0$ donc $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \{0\}$ et 2α n'est pas une racine. ●

<u>proposition 2.5</u>

i) Pour tout $\alpha \in \Phi$, $r_\alpha : \lambda \longrightarrow \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$ est l'unique symétrie de vecteur α laissant stable Φ; c'est une isométrie de $\mathfrak{h}^*$.

ii) Le sous-groupe W de $GL(\mathfrak{h}^*)$ engendré par $\{r_\alpha \ / \ \alpha \in \Phi\}$ est fini; c'est le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{h}$).
De plus W opère canoniquement sur $\mathfrak{h}$ par l'action contregrédiante (définie par $\lambda(w(H)) = w^{-1}(\lambda)(H)$ pour tout $w \in W$, $H \in \mathfrak{h}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$) de sorte que W s'identifie au sous-groupe de $GL(\mathfrak{h})$ engendré par les symétries $H \longrightarrow r_\alpha(H) = H - \alpha(H)H_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Phi$.
Enfin, pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$ et $w \in W$ tels que $\beta = w(\alpha)$, on a $H_\beta = w(H_\alpha)$.

iii) Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{t}$ des sous-algèbres de Cartan, Φ (resp Ψ) l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ (resp à $\mathfrak{t}$), $u \in Aut_e(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{t} = u(\mathfrak{h})$, $W^{(\Phi)}$ (resp $W^{(\Psi)}$) le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ (resp relativement à $\mathfrak{t}$). Alors on a $W^{(\Psi)} = ({}^t u)^{-1} W^{(\Phi)} \, {}^t u$.

● i) Pour $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, on a:

$$\begin{aligned} K(r_\alpha(\lambda), r_\alpha(\mu)) &= K(\lambda - \frac{2K(\lambda,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}\alpha, \mu - \frac{2K(\mu,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}\alpha) \\ &= K(\lambda,\mu) - \frac{2K(\lambda,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}K(\alpha,\mu) - \frac{2K(\mu,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)}K(\lambda,\alpha) \\ &\quad + \frac{4K(\lambda,\alpha)K(\mu,\alpha)}{K(\alpha,\alpha)^2}K(\alpha,\alpha) \\ &= K(\lambda,\mu) \end{aligned}$$

Ainsi r_α est une isométrie pour tout $\alpha \in \Phi$.
Puisque $\alpha(H_\alpha) = 2$ on a $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$; d'autre part r_α laisse fixe l'hyperplan orthogonal à α ($K(\lambda,\alpha) = 0$ équivaut à $\lambda(H_\alpha) = 0$) donc

r_α est la symétrie orthogonale par rapport à cet hyperplan.

Pour tout $\beta \in \Phi$ on a $r_\alpha(\beta) = \beta - a_{\beta,\alpha}\alpha \in \Phi$ donc Φ est stable par la symétrie r_α. Si r' est une autre symétrie de vecteur α laissant Φ stable on pose $s = r_\alpha r'$ et l'on a

$$s(\alpha) = \alpha$$
$$s(\lambda) - \lambda \in \mathbb{C}\alpha$$
$$s(\Phi) \subset \Phi$$

Puisque Φ est fini, il existe k tel que $s^k(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Phi$ et comme Φ engendre $\mathfrak{h}^*$ on a $s^k = I$; d'autre part on a:

$$s(\lambda) = \lambda + f(\lambda)\alpha \quad \text{pour tout } \lambda \in \Phi$$

où f est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}^*$.

On a donc:

$$s^k(\lambda) = \lambda + kf(\lambda)\alpha \quad \text{pour tout } \lambda \in \Phi$$

donc $f = 0$, $s = I$ et $r' = r_\alpha$.

ii) W s'identifie à un sous-groupe du groupe des permutations de Φ donc est fini.

Pour tout $H \in \mathfrak{h}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ on a:

$$\begin{aligned}\lambda(r_\alpha(H)) &= r_\alpha(\lambda)(H)\\ &= \lambda(H) - \lambda(H_\alpha)\alpha(H)\\ &= \lambda(H - \alpha(H)H_\alpha)\end{aligned}$$

Soit $\beta = w(\alpha)$ avec $\alpha,\beta \in \Phi$ et $w \in W$; pour établir que $H_\beta = w(H_\alpha)$, il suffit de le vérifier lorsque $w = r_\gamma$ avec $\gamma \in \Phi$. On a:

$$H_\beta = \frac{2h_\beta}{K(\beta,\beta)} = \frac{2h_{r_\gamma(\alpha)}}{K(\alpha,\alpha)} = \frac{2h_{\alpha-\alpha(H_\gamma)\gamma}}{K(\alpha,\alpha)}$$
$$= H_\alpha - \frac{2}{K(\alpha,\alpha)}\left(\frac{K(\alpha,\alpha)}{K(\gamma,\gamma)}\gamma(H_\alpha)\right)h_\gamma$$
$$= H_\alpha - \gamma(H_\alpha)H_\gamma = r_\gamma(H_\alpha)$$

iii) Soit $\alpha \in \Phi$; on a $\alpha = \beta\circ u$ avec $\beta \in \Psi$; on voit que $H_\beta^{(\Psi)} = u(H_\alpha^{(\Phi)})$. Or on a pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$:

$$r_\alpha^{(\Phi)}(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha^{(\Phi)})\alpha$$

mais $\lambda = \mu\circ u$ avec $\mu \in \mathfrak{t}^*$ de sorte que:

$$\begin{aligned}r_\alpha^{(\Phi)}(\mu\circ u) &= \mu\circ u - \mu\circ u(H_\alpha^{(\Phi)})\alpha\\ &= \mu\circ u - \mu(H_\beta^{(\Psi)})\beta\circ u\\ &= r_\beta^{(\Psi)}(\mu)\circ u\end{aligned}$$

et finalement:

$$r_\alpha^{(\Phi)}\cdot{}^tu = u\cdot r_\beta^{(\Psi)} \text{ d'où:}$$
$$r_\beta^{(\Psi)} = ({}^tu)^{-1}\cdot r_\alpha^{(\Phi)}\cdot{}^tu. \bullet$$

<u>remarque:</u>

Soient $\alpha,\beta \in \Phi$, on a $\alpha = \gamma\circ u$ et $\beta = \delta\circ u$ avec $\gamma,\delta \in \Psi$; alors

$$a_{\beta,\alpha}^{(\Phi)} = a_{\delta,\gamma}^{(\Psi)}$$

$\bullet$ $a_{\beta,\alpha}^{(\Phi)} = \beta(H_\alpha^{(\Phi)}) = \delta\circ u(H_\alpha^{(\Phi)}) = \delta(H_\gamma^{(\Psi)}) = a_{\delta,\gamma}^{(\Psi)}$. $\bullet$

<u>proposition</u> <u>2.6</u>

A) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ des idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{h}_1$ (resp $\mathfrak{h}_2$) une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}_1$ (resp $\mathfrak{a}_2$), Φ_1 (resp Φ_2) l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_1$ relativement à $\mathfrak{h}_1$ (resp de $\mathfrak{a}_2$ relativement à $\mathfrak{h}_2$) et W_1 (resp W_2) le groupe de Weyl de $\mathfrak{a}_1$ relativement à $\mathfrak{h}_1$ (resp de $\mathfrak{a}_2$ relativement à $\mathfrak{h}_2$); alors:

i) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$

ii) Φ_1 et Φ_2 sont orthogonaux dans $\mathfrak{h}^*$ et $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ est l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

iii) $W_1 \times W_2$ s'identifie canoniquement au groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

B) Réciproquement soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ l'ensemble des racines et W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$; on suppose que $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ avec Φ_1 et Φ_2 orthogonaux dans $\mathfrak{h}^*$ alors:

i) $\mathfrak{g}$ se décompose en $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ où $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ des idéaux.

ii) Φ_1 (resp Φ_2) est l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_1$ (resp $\mathfrak{a}_2$) relativement à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{a}_1$ ($\mathfrak{h}_2$ de $\mathfrak{a}_2$)

iii) W se décompose en $W \simeq W_1 \times W_2$ où W_1 (resp W_2) le groupe de Weyl de $\mathfrak{a}_1$ relativement à $\mathfrak{h}_1$ (resp de $\mathfrak{a}_2$ relativement à $\mathfrak{h}_2$).

$\bullet$ A i) et ii) Puisque $[\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2] = \{0\}$ on voit que $\mathfrak{h}$ est abélienne et que si $H = H_1 + H_2$ on a $ad_H = ad_{H_1} \oplus ad_{H_2}$ de sorte que $\mathfrak{h}$ est diagonalisable. Soit $X \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, on a $X = X_1 + X_2$ d'où on conclut que $X_1 \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{a}_1}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_1$ et que $X_2 \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{a}_2}(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_2$ donc que $X \in \mathfrak{h}$. Ainsi $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a alors:

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \sum_{\alpha_1 \in \Phi_1} \mathfrak{a}_{1,\alpha_1}$$

$$\mathfrak{a} \;\; = \mathfrak{h} \;\; \oplus \sum_{\alpha_2 \in \Phi_2} \mathfrak{a}_{2,\alpha_2}$$

Mais puisque $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ commutent et que $\alpha_1|\mathfrak{a}_2 = 0$ on a $\mathfrak{a}_{1,\alpha_1} \subset \mathfrak{g}_{\alpha_1}$ et comme ce sont des sous-espaces de dimension 1 on a $\mathfrak{a}_{1,\alpha_1} = \mathfrak{g}_{\alpha_1}$ et de même $\mathfrak{a}_{2,\alpha_2} = \mathfrak{g}_{\alpha_2}$. Ainsi on a $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$.

La restriction de K à $\mathfrak{a}_1$ (resp $\mathfrak{a}_2$) est égale à la forme de Killing de $\mathfrak{a}_1$ resp $\mathfrak{a}_2$) et l'on a:

$$K(\alpha_1,\alpha_2) = K(h_{\alpha_1},h_{\alpha_2}) = \alpha_2(h_{\alpha_1})$$

mais $h_{\alpha_1} \in \mathfrak{h}_1$ donc $K(\alpha_1,\alpha_2) = 0$; ainsi Φ_1 et Φ_2 sont orthogonaux.

B i) et ii) Considérons $\mathfrak{h}_1^*$ (resp $\mathfrak{h}_2^*$) le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ engendré par Φ_1 (resp par Φ_2) et:

$$\mathfrak{h}_1 = (\mathfrak{h}_1^*)^{\perp} = \{ H \in \mathfrak{h} \ / \ \alpha_2(H) = 0 \text{ pour tout } \alpha_2 \in \Phi_2 \}$$

$$\mathfrak{h}_2 = (\mathfrak{h}_2^*)^{\perp} = \{ H \in \mathfrak{h} \ / \ \alpha_1(H) = 0 \text{ pour tout } \alpha_1 \in \Phi_1 \}$$

Comme $\mathfrak{h}_1^*$ et $\mathfrak{h}_2^*$ sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathfrak{h}^*$, on voit que $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathfrak{h}$. On pose alors:

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \sum_{\alpha \in \Phi_1} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{h}_2 \oplus \sum_{\alpha \in \Phi_2} \mathfrak{g}_\alpha$$

de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$; montrons que $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$: considérons deux racines $\alpha,\beta \in \Phi_1$ telles que $\alpha + \beta \in \Phi$; supposons que $\alpha + \beta \in \Phi_2$; on aurait alors:

$$K(\alpha,\alpha + \beta) = K(\beta,\alpha + \beta) = 0$$

et $\alpha + \beta$ serait isotrope donc ne serait pas une racine; ainsi $\alpha + \beta \in \Phi_1$ et $\mathfrak{a}_1$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; de même $\mathfrak{a}_2$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, de plus $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont nécessairement orthogonaux.

Soit $X \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{a}_1}(\mathfrak{h}_1)$; on a donc $[H_1,X] = 0$ pour tout $H_1 \in \mathfrak{h}_1$. Comme $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ commutent on a $[H,X] = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ de sorte que $X \in \mathfrak{h}$ donc $X \in \mathfrak{h}_1$ et ainsi $\mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}_1$. De même $\mathfrak{h}_2$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}_2$.

Maintenant soit $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{g}_\alpha$; on a alors:

$$[H_1 + H_2,X_1 + X_2] = \alpha(H_1 + H_2)(X_1 + X_2) \qquad \text{pour}$$

tout $H = H_1 + H_2 \in \mathfrak{h}$

On a, par exemple, $\alpha \in \Phi_1$ de sorte que:

$$[H_1, X_1] + [H_2, X_2] = \alpha(H_1)X_1 + \alpha(H_2)X_2 = \alpha(H_1)X_1$$

$$[H_1, X_1] = \alpha(H_1)X_1 \qquad \text{pour tout } H_1 \in \mathfrak{h}_1$$

$$[H_2, X_2] = 0 \qquad \text{pour tout } H_2 \in \mathfrak{h}_2$$

Ainsi $X_2 \in \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}$ donc $X_2 = 0$ et $X \in \mathfrak{a}_{1,\alpha}$ donc $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{a}_{1,\alpha}$ et comme ce sont des sous-espaces de dimension 1 on a $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{a}_{1,\alpha}$ pour $\alpha \in \Phi_1$ et Φ_1 est l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_1$ relativement à $\mathfrak{h}_1$. De même on a $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{a}_{2,\alpha}$ pour $\alpha \in \Phi_2$ et Φ_2 est l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_2$ relativement à $\mathfrak{h}_2$.

A iii) et B iii) Soit W_1 (resp W_2) le sous-groupe de W engendré par les r_α pour $\alpha \in \Phi_1$ (resp pour $\alpha \in \Phi_2$).

Soit $\alpha \in \Phi_1$; alors $\mathfrak{h}_1^*$ et $\mathfrak{h}_2^*$ sont stables par r_α; $r_\alpha|\mathfrak{h}_1^*$ est la symétrie de vecteur α laissant stable Φ_1 et $r_\alpha|\mathfrak{h}_2^* = I$ de sorte que W_1 (resp W_2) s'identifie au groupe de Weyl de $\mathfrak{a}_1$ relativement à $\mathfrak{h}_1$ (resp de $\mathfrak{a}_2$ relativement à $\mathfrak{h}_2$). De plus les éléments de W_1 et W_2 commutent et l'on a $W = W_1W_2$; enfin si $s \in W_1 \cap W_2$, s laisse stables $\mathfrak{h}_1^*$ et $\mathfrak{h}_2^*$ et induit l'identité sur chacun de ces sous-espaces de sorte que $s = I$. Ainsi W est produit direct de ses sous groupes W_1 et W_2. ●

<u>corollaire</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$; alors $\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si Φ est irréductible (c'est à dire Φ n'est pas la réunion de deux parties non vides orthogonales).

CHAPITRE V

SYSTEMES SIMPLES DE RACINES - GROUPE DE WEYL

1. Systèmes simples de racines.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. La forme de Killing K de $\mathfrak{g}$ définit un isomorphisme:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ \lambda & \longrightarrow & h_\lambda \end{array}$$

tel que $\lambda(H) = K(H,h_\lambda)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ et tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$; on pose alors:

$$K(\lambda,\mu) = K(h_\lambda,h_\mu) \text{ pour tout } \lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Chaque $\alpha \in \Phi$ est non isotrope et l'on a défini:

$$H_\alpha = \frac{2h_\alpha}{K(\alpha,\alpha)}$$

<u>proposition</u> <u>1.1</u>

Soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (resp $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$) le sous-espace réel de $\mathfrak{h}$ (resp $\mathfrak{h}^*$) engendré par $\check{\Phi} = \{H_\alpha / \alpha \in \Phi\}$ (resp par Φ);

i) Toute base $\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\} \subset \Phi$ de $\mathfrak{h}^*$ sur $\mathbb{C}$ est une base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.

ii) $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (resp $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$) est une $\mathbb{R}$-structure de $\mathfrak{h}$ (resp $\mathfrak{h}^*$) et $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ s'identifie canoniquement au dual $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^*$ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

iii) La restriction de K à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (resp $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$) est une forme réelle définie positive.

● Pour $\alpha,\beta \in \Phi$, on a:

$$K(H_\alpha,H_\beta) = \sum_{\gamma\in\Phi} \gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta) = \sum_{\gamma\in\Phi} a_{\gamma,\alpha}a_{\gamma,\beta} \in \mathbb{Z}$$

de sorte que la restriction de K à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est à valeurs réelles.

De plus on a:

$$K(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\, a_{\beta,\alpha}\, K(\alpha,\alpha) = \frac{2\, a_{\beta,\alpha}}{K(H_\alpha,H_\alpha)} \in \mathbb{Q}$$

et ainsi la restriction de K à $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ est aussi réelle.

Notons que:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ \lambda & \longrightarrow & h_\lambda \end{array}$$

induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$; de sorte que l'application:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^* \\ \lambda & \longrightarrow & \lambda|\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \end{array}$$

est elle aussi un isomorphisme.

Soit $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\} \subset \Phi$ une base de $\mathfrak{h}^*$ (sur $\mathbb{C}$); on a alors pour $\alpha \in \Phi$:

$$\alpha = \sum c_i\alpha_i \text{ avec } c_i \in \mathbb{C} \text{ d'où:}$$

$$K(\alpha,\alpha_j) = \sum c_i K(\alpha_i,\alpha_j) \text{ pour tout } j$$

On a donc un système de Cramer à coefficient réels de sorte que $c_i \in \mathbb{R}$. Ainsi $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ est une base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (sur $\mathbb{R}$) et $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ est donc une $\mathbb{R}$-structure de $\mathfrak{h}^*$. De plus on voit que $(H_{\alpha_1},\ldots,H_{\alpha_l})$ est une base de $\mathfrak{h}$ (sur $\mathbb{C}$) et de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (sur $\mathbb{R}$) et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est une $\mathbb{R}$-structure de $\mathfrak{h}$.

Enfin soit $H = \sum_{\alpha\in\Phi} c_\alpha H_\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$; on a $K(H,H) = \sum_{\beta\in\Phi} \beta(H)^2$ avec:

$$\beta(H) = \sum_{\alpha\in\Phi} c_\alpha\beta(H_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Phi} c_\alpha a_{\beta,\alpha} \in \mathbb{R}$$

de sorte que:

$$K(H,H) = 0 \Rightarrow \beta(H) = 0 \quad \text{pour tout } \beta \in \Phi$$

et comme Φ engendre $\mathfrak{h}^*$ on a $H = 0$. La restriction de K à $\mathfrak{h}$ est donc définie positive. ●

Ainsi, $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ muni de la restriction de la forme de Killing K est un espace euclidien (on posera $(\lambda|\mu) = K(\lambda,\mu)$ pour tout $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$).

<u>corollaire</u>

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie; alors $\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et si la représentation $W \longrightarrow GL(\mathfrak{h}^*)$ est irréductible.

● Supposons que $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ avec Φ_1 et Φ_2 orthogonaux dans $\mathfrak{h}^*$; on a alors la décomposition orthogonale $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^*_1 \oplus \mathfrak{h}^*_2$. Comme $W \subset O(\mathfrak{h}^*,K)$ on voit que la représentation:

$$W \longrightarrow GL(\mathfrak{h}^*)$$

est réductible.

Réciproquement, supposons que la représentation $W \longrightarrow GL(\mathfrak{h}^*)$ ne soit pas irréductible. D'après le théorème de Maschke, on a $\mathfrak{h}^* = U_1 \oplus U_2$ où U_1 et U_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{h}^*$

stables par W. Soit $\alpha \in \Phi$; alors les sous-espaces U_1 et U_2 sont stables par la symétrie r_α et ne peuvent pas être contenus tous les deux dans l'hyperplan $\mathrm{Ker}(r_\alpha - I)$. Si U_1 n'est pas contenu dans cet hyperplan, il existe $\lambda \in U_1$ tel que $r_\alpha(\lambda) \neq \lambda$; alors $\lambda' = r_\alpha(\lambda) - \lambda \in U_1$ et $r_\alpha(\lambda') = -\lambda'$; ainsi λ' est proportionnel à α donc $\alpha \in U_1$. On a donc $\Phi \subset U_1 \cup U_2$; on pose $\Phi_1 = \Phi \cap U_1$ et $\Phi_2 = \Phi \cap U_2$. Soient $\alpha \in \Phi_1$ et $\beta \in \Phi_2$; $\beta - \alpha$ n'est pas une racine donc $(\alpha|\beta) \leq 0$ (si $[-p,q]$ est l'intervalle des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\beta + k\alpha$ soit une racine on a $p = 0$ de sorte que $a_{\beta,\alpha} = p - q \leq 0$ d'où $(\alpha|\beta) = a_{\beta,\alpha}\|\alpha\|^2/2 \leq 0$); comme $-\beta \in \Phi_2$ on a $(\alpha|-\beta) \leq 0$ d'où $(\alpha|\beta) = 0$ et par suite Φ_1 et Φ_2 sont orthogonaux et Φ n'est pas irréductible. ●

Si α, β sont deux racines on désigne par $\theta_{\alpha,\beta}$ l'angle des racines α et β dans l'espace euclidien $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ de sorte que:

$$a_{\beta,\alpha} = \beta(H_\alpha) = 2(\alpha|\beta)/\|\alpha\|^2 = 2(\|\beta\|/\|\alpha\|)\cos(\theta_{\alpha,\beta})$$

<u>proposition 1.2</u>

Soient α et β deux racines;

a) On a les propriétés équivalentes suivantes

i) α et β sont orthogonales

ii) $a_{\beta,\alpha} = 0$

iii) $a_{\alpha,\beta} = 0$.

b) Si α et β ne sont pas orthogonales on a:

$$\frac{a_{\beta,\alpha}}{a_{\alpha,\beta}} = \left(\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\right)^2$$

et en prenant α et β non proportionnelles et $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ les seuls cas possibles sont les suivants:

(1)	$a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha} = 0$	$\theta_{\alpha,\beta} = \pi/2$	
(2)	$a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha} = 1$	$\theta_{\alpha,\beta} = \pi/3$	$\|\beta\| = \|\alpha\|$
(3)	$a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha} = -1$	$\theta_{\alpha,\beta} = 2\pi/3$	$\|\beta\| = \|\alpha\|$
(4)	$a_{\alpha,\beta} = 1 \quad a_{\beta,\alpha} = 2$	$\theta_{\alpha,\beta} = \pi/4$	$\|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|$
(5)	$a_{\alpha,\beta} = -1 \quad a_{\beta,\alpha} = -2$	$\theta_{\alpha,\beta} = 3\pi/4$	$\|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|$
(6)	$a_{\alpha,\beta} = 1 \quad a_{\beta,\alpha} = 3$	$\theta_{\alpha,\beta} = \pi/6$	$\|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|$
(7)	$a_{\alpha,\beta} = -1 \quad a_{\beta,\alpha} = -3$	$\theta_{\alpha,\beta} = 5\pi/6$	$\|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|$

● $a_{\alpha,\beta}$ et $a_{\beta,\alpha}$ sont des entiers tels que

$$a_{\alpha,\beta}\cdot a_{\beta,\alpha} = 4\cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$$

de sorte que $a_{\alpha,\beta}.a_{\beta,\alpha}$ prend les valeurs 0,1,2,3 ou 4; la valeur 4 correspondant au cas où α et β sont proportionnelles c'est à dire au cas où $\beta = \alpha$ ou $\beta = -\alpha$. ●

<u>corollaire</u>

Soient α,β deux racines telles que $\alpha+\beta \in \Phi$ et

$$\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{ \beta-p\alpha, \ldots\ldots, \beta, \beta+\alpha, \ldots\ldots, \beta+q\alpha \}$$

la α-chaîne de racines définie par β (de sorte que l'on a $p\geq 0$, $q\geq 1$); 1) On a la relation:

$$\left(\frac{\|\alpha+\beta\|}{\|\beta\|}\right)^2 = \frac{p+1}{q}$$

2) Posons $f(\alpha,\beta) = p+1$; on a:

$$f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha).$$

3) Soit $\gamma = -(\alpha+\beta)$; on a alors:

$$f(\alpha,\beta)H_\gamma + f(\beta,\gamma)H_\alpha + f(\gamma,\alpha)H_\beta = 0.$$

4) Les conditions suivantes sont équivalentes:

$$\beta(H_\alpha) = -1 \text{ (ie } r_\alpha(\beta) = \alpha+\beta)$$

$$\|\alpha\| \geq \max(\|\beta\|, \|\alpha+\beta\|).$$

● On a:

$$a_{\beta,\alpha} = \beta(H_\alpha) = 2(\alpha|\beta)/\|\alpha\|^2 = p-q$$

et, $\beta-p\alpha$ étant l'origine de $\mathcal{S}_\alpha(\beta)$, on a $r_\alpha(\beta-p\alpha) = (\beta-p\alpha)+L\alpha$ où $L = p+q$ est la longueur de $\mathcal{S}_\alpha(\beta)$; on a $L = -a_{\beta-p\alpha,\alpha}$.

Comme $\beta-p\alpha$ et α ne sont pas proportionnelles (sinon on aurait $\beta = \pm\alpha$) et que $q \geq 1$ on a $1 \leq L \leq 3$.

Les cas possibles sont alors:

i) $L = 1$; $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta,\beta+\alpha\}$ d'où $p = 0$, $q = 1$ et $a_{\beta,\alpha} = -1$.

a) $\|\alpha\| = \|\beta\|$ $\quad a_{\alpha,\beta} = -1 \quad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{2\pi}{3}$

$\theta_{\beta,\beta+\alpha} = \theta_{\beta+\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{3}$

$\|\beta+\alpha\| = \|\beta\|$

b) $\|\alpha\| = \sqrt{2}\,\|\beta\|$ $\quad a_{\alpha,\beta} = -2 \quad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{3\pi}{4}$

$\theta_{\beta,\beta+\alpha} = \frac{\pi}{2}$; $\theta_{\beta+\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{4}$

$\|\beta+\alpha\| = \|\beta\|$

c) $\|\alpha\| = \sqrt{3}\,\|\beta\|$ $\quad a_{\alpha,\beta} = -3 \quad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{5\pi}{6}$

$\theta_{\beta,\beta+\alpha} = \frac{2\pi}{3}$; $\theta_{\beta+\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{6}$

$\|\beta+\alpha\| = \|\beta\|$

ii) L = 2;

a) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta,\beta+\alpha,\beta+2\alpha\}$ d'où p = 0, q = 2, $a_{\beta,\alpha} = -2$

$\|\beta\| = \sqrt{2}\ \|\alpha\| \qquad a_{\alpha,\beta} = -1 \qquad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{3\pi}{4}$

$$\theta_{\beta,\beta+\alpha} = \theta_{\beta+\alpha,\beta+2\alpha} = \theta_{\beta+2\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{4}$$

$$\|\beta+\alpha\| = (1/\sqrt{2})\ \|\beta\| = \|\alpha\|.$$

b) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha\}$ d'où p = 1, q = 1, $a_{\beta,\alpha} = 0$

$$a_{\alpha,\beta} = 0 \qquad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{\pi}{2}$$

[en posant $\beta' = \beta-\alpha$ on a $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta',\beta'+\alpha,\beta'+2\alpha\}$ de sorte que:]

$\|\beta\| = \|\alpha\| \qquad \theta_{\beta-\alpha,\beta} = \theta_{\beta,\beta+\alpha} = \theta_{\beta+\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{4}$

$$\|\beta+\alpha\| = \sqrt{2}\ \|\beta\|.$$

iii) L = 3;

a) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta,\beta+\alpha,\beta+2\alpha,\beta+3\alpha\}$ d'où p = 0, q = 3, $a_{\beta,\alpha} = -3$

$\|\beta\| = \sqrt{3}\ \|\alpha\| \qquad a_{\alpha,\beta} = -1 \qquad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{5\pi}{6}$

$$\theta_{\beta,\beta+\alpha} = \frac{\pi}{6},\ \theta_{\beta+\alpha,\beta+2\alpha} = \frac{\pi}{3},\ \theta_{\beta+2\alpha,\beta+3\alpha} = \theta_{\beta+3\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{6}$$

$$\|\beta+\alpha\| = (1/\sqrt{3})\ \|\beta\|.$$

b) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\beta+2\alpha\}$ d'où p = 1, q = 2, $a_{\beta,\alpha} = -1$

$\|\beta\| = \|\alpha\| \qquad a_{\alpha,\beta} = -1 \qquad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{3\pi}{2}$

$$\theta_{\beta-\alpha,\beta} = \frac{\pi}{6},\ \theta_{\beta,\beta+\alpha} = \frac{\pi}{3},\ \theta_{\beta+\alpha,\beta+2\alpha} = \theta_{\beta+2\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{6}$$

$$\|\beta+\alpha\| = \|\beta\|.$$

c) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta-2\alpha,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha\}$ d'où p = 2, q = 1, $a_{\beta,\alpha} = 1$

$\|\beta\| = \|\alpha\| \qquad a_{\alpha,\beta} = 1 \qquad \theta_{\alpha,\beta} = \frac{\pi}{3}$

$$\theta_{\beta-2\alpha,\beta-\alpha} = \frac{\pi}{6},\ \theta_{\beta-\alpha,\beta} = \frac{\pi}{3},\ \theta_{\beta,\beta+\alpha} = \theta_{\beta+\alpha,\alpha} = \frac{\pi}{6}$$

$$\|\beta+\alpha\| = \sqrt{3}\ \|\beta\|.$$

1) On constate que la relation 1) est vraie dans tous les cas.

2) Comme $\beta-\alpha$ est une racine si et seulement si $\alpha-\beta$ est une racine on voit que $f(\alpha,\beta) = 1 \Leftrightarrow f(\beta,\alpha) = 1$. On peut donc supposer que $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ sont des racines de sorte que l'on a seulement 3 cas possibles:

ii-b) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha\} \qquad$ (p = 1 et q = 1) iii-b) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\beta+2\alpha\}$ $(p = 1$ et $q = 2)$

iii-c) $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \{\beta-2\alpha,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha\}$ $(p = 2$ et $q = 1)$

et dans ces 3 cas on a $\|\alpha\| = \|\beta\|$ et $a_{\beta,\alpha} = a_{\alpha,\beta}$. Si

$$\mathcal{S}_\beta(\alpha) = \{ \alpha-p'\beta,\dots\dots,\alpha,\alpha+\beta,\dots\dots,\alpha+q'\beta \}$$

est la β-chaîne définie par α on a $\frac{p'+1}{q'} = \frac{p+1}{q}$ et $p'-q' = p-q$ d'où (compte tenu des 3 seuls cas possibles) $p' = p$ et $q' = q$.

3) On remarque $q = f(-\alpha,\beta)-1$ et $f(\alpha,\beta-\alpha) = f(\alpha,\beta)-1$ de sorte que l'on a $q = f(-\alpha,\beta+\alpha) = f(-\alpha,-\gamma) = f(\alpha,\gamma)$ d'où finalement:

$$\frac{\|\gamma\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{f(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\gamma)}$$

ou encore:

$$2\,\frac{f(\alpha,\beta)}{\|\gamma\|^2}\,h_\gamma - 2\,\frac{f(\alpha,\gamma)}{\|\beta\|^2}\,h_\gamma = 0$$

et aussi (en permutant α et γ):

$$2\,\frac{f(\gamma,\beta)}{\|\alpha\|^2}\,h_\alpha - 2\,\frac{f(\gamma,\alpha)}{\|\beta\|^2}\,h_\alpha = 0$$

en ajoutant on a (compte tenu de ce que $f(\alpha,\gamma) = f(\gamma,\alpha)$):

$$f(\alpha,\beta)H_\gamma - 2\,\frac{f(\gamma,\alpha)}{\|\beta\|^2}(h_\gamma + h_\alpha) + f(\gamma,\beta)H_\alpha = 0$$

d'où le résultat puisque $h_\gamma + h_\alpha = -h_\beta$.

4) Les cas possibles sont: i-a,b,c et iii-b. ●

Une partie $\Pi = \{\alpha_1,\dots\dots,\alpha_l\} \subset \Phi$ est appelée un <u>système simple de racines</u> si:

i) Π est une base de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (ou de $\mathfrak{h}^*$)

ii) pour tout $\alpha \in \Phi$, les coordonnées de α dans la base Π sont des entiers tous du même signe.

Une partie P de Φ est appelée un <u>système positif de racines</u> si:

i) $(P,-P)$ est une partition de Φ et:

ii) $\alpha,\beta \in P$ et $\alpha + \beta \in \Phi \Rightarrow \alpha + \beta \in P$.

Un hyperplan P de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ est singulier s'il est orthogonal à l'une des racines. Le complémentaire $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R},reg}$ de la réunion des hyperplans singuliers est un ouvert de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (pour la topologie euclidienne) dont les composantes connexes sont appelées les chambres de Weyl de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ (relativement à Φ).

exemple:

Soit $\Pi \subset \Phi$ un système simple de racines; l'ensemble $\Phi^+(\Pi)$ des racines dont les coordonnées dans la base Π sont positives est un système positif de racines.

proposition 1.3

Soit C une chambre de Weyl;

a) l'ensemble $\Phi^+(C)$ des racines $\alpha \in \Phi$ telles que $(\lambda|\alpha) > 0$ pour tout $\lambda \in C$ est un système positif de racines.

b) L'ensemble $I(C)$ des éléments indécomposables (pour la somme) de $\Phi^+(C)$ est un système simple et on a $\Phi^+(C) = \Phi^+(I(C))$.

● Notons d'abord que, si α est une racine, on a $\alpha \in \Phi^+(C)$ si et seulement s'il existe $\lambda_o \in C$ tel que $(\alpha|\lambda_o) > 0$. En effet l'application:

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ \lambda &\longrightarrow (\lambda|\alpha) \end{aligned}$$

est continue donc son image est connexe.
Il en résulte que $(\Phi^+(C), -\Phi^+(C))$ est une partition de Φ.

Considérons d'autre part l'ensemble Ψ des $\alpha \in \Phi^+(C)$ tels que α ne soit pas combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des éléments de $I(C)$ et soit $\lambda_o \in C$: si Ψ est non vide, il existe $\alpha \in \Psi$ tel que $(\alpha|\lambda_o)$ soit minimal. On a $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \in \Phi^+(C)$ et $(\alpha|\lambda_o) = (\beta|\lambda_o) + (\gamma|\lambda_o)$ avec $(\alpha|\lambda_o), (\beta|\lambda_o), (\gamma|\lambda_o) > 0$ ce qui contredit la minimalité de $(\alpha|\lambda_o)$. Ainsi $\Psi = \emptyset$ et tout $\alpha \in \Phi$ est combinaison linéaire des éléments de $I(C)$ avec des coefficients entiers tous du même signe.

Puisque Φ est un système générateur de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, il en est de même de $I(C)$.

Ensuite, remarquons que $(\alpha|\beta) \leq 0$ pour tout $\alpha, \beta \in I(C)$: car si on avait $(\alpha|\beta) > 0$, $\gamma = \alpha - \beta$ serait une racine (si $[-p,q]$ est l'intervalle des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\beta + k\alpha \in \Phi$, on a $\beta(H_\alpha) = 2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha) = p-q > 0$ de sorte que $p > q \geq 0$); on aurait $\gamma \in \Phi^+(C)$ et α serait décomposable ou bien $\gamma \in -\Phi^+(C)$ et c'est β qui serait décomposable.

On en conclut que $I(C)$ est une partie libre de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$: supposons que:

$$\sum_{\alpha\in I(C)} c_\alpha \alpha = 0$$

Puisque $(\alpha|\beta) \le 0$ pour tout $\alpha,\beta \in I(C)$ on a:

$$\Big\|\sum_{\alpha\in I(C)} |c_\alpha|\alpha\Big\| \le \Big\|\sum_{\alpha\in I(C)} c_\alpha\alpha\Big\| = 0$$

de sorte que:

$$\sum_{\alpha\in I(C)} |c_\alpha|\alpha = 0$$

et finalement:

$$(\lambda_0|\sum_{\alpha\in I(C)} |c_\alpha|\alpha) = \sum_{\alpha\in I(C)} |c_\alpha|(\lambda_0|\alpha) = 0$$

Mais $(\lambda_0|\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I(C)$ donc $c_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in I(C)$ et $I(C)$ est un système simple de racines.

Enfin on a $\Phi^+(I(C)) \subset \Phi^+(C)$ et $-\Phi^+(I(C)) \subset -\Phi^+(C)$; comme $(\Phi^+(I(C)),-\Phi^+(I(C)))$ et $(\Phi^+(C),-\Phi^+(C))$ sont des partitions de Φ on a $\Phi^+(I(C)) = \Phi^+(C)$. ●

<u>proposition 1.4</u>

Soit $\Pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ un système simple de racines; alors:

$$Ch(\Pi) = \{\ \lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}\ /\ (\lambda|\alpha_i) > 0 \text{ pour } 1\le i\le l\ \}$$

est une chambre de Weyl et l'on a $\Pi = I(Ch(\Pi))$.

● On a évidemment:

$$Ch(\Pi) = \{\ \lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}\ /\ (\lambda|\alpha) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Phi^+(\Pi)\ \}$$

de sorte que $Ch(\Pi) \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R},reg}$.

De plus $Ch(\Pi)$ est un cône convexe: soient $\lambda,\mu \in Ch(\Pi)$ et $s,t\ge 0$ avec $s+t>0$; pour tout $\alpha \in \Phi^+$ on a:

$$(s\lambda + t\mu|\alpha) = s(\lambda|\alpha) + t(\mu|\alpha) > 0$$

d'où $s\lambda + t\mu \in Ch(\Pi)$.

Ainsi $Ch(\Pi)$ est un ouvert connexe de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R},reg}$ donc il existe une chambre de Weyl C telle que $Ch(\Pi) \subset C$. Mais si $\lambda \in C$ on a $(\lambda|\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+(\Pi)$ (car la fonction $\lambda \longrightarrow (\lambda|\alpha)$ est strictement positive sur C) et par suite $\lambda \in Ch(\Pi)$. On a donc $Ch(\Pi) = C$ et $Ch(\Pi)$ est une chambre de Weyl.

On a $\Phi^+(\Pi) \subset \Phi^+(Ch(\Pi))$ et $-\Phi^+(\Pi) \subset -\Phi^+(Ch(\Pi))$ de sorte que $\Phi^+(\Pi) = \Phi^+(Ch(\Pi))$. Il en résulte que $\Pi \subset I(Ch(\Pi))$: soit $\alpha \in \Pi$, supposons que $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta,\gamma \in \Phi^+(Ch(\Pi)) = \Phi^+(\Pi)$; puisque β et γ sont des combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de Π on voit qu'alors β ou γ est nul ce qui est contradictoire; donc α est indécomposable dans $\Phi^+(\mathrm{Ch}(\Pi))$ ie $\alpha \in I(\mathrm{Ch}(\Pi))$. L'inclusion opposée est immédiate et on a $\Pi = I(\mathrm{Ch}(\Pi))$. ●

corollaire 1

Les applications $C \longrightarrow I(C)$ et $\Pi \longrightarrow \mathrm{Ch}(\Pi)$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des chambres de Weyl de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ et l'ensemble des systèmes simples de racines de Φ.

● On a vu que $\Pi = I(\mathrm{Ch}(\Pi))$ pour tout système simple de racines Π. Soit C une chambre de Weyl; $\mathrm{Ch}(I(C))$ est une chambre de Weyl contenant C (si $\lambda \in C$ on a $(\alpha|\lambda) > 0$ pour tout $\alpha \in I(C) \subset \Phi^+(C)$ de sorte que $\lambda \in \mathrm{Ch}(I(C))$); on a donc $\mathrm{Ch}(I(C)) = C$. ●

On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ par:

$\mathcal{R}(\lambda,\mu) \Leftrightarrow$ pour chaque hyperplan singulier S
$\lambda,\mu \in S$ ou bien λ et μ sont strictement d'un même côté de S

Les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ sont les facettes de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$.

Soit F une facette, pour tout hyperplan singulier S on a $F \cap S = \emptyset$ ou $F \subset S$; le support de F est le sous-espace $\mathrm{Supp}(F)$ de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, intersection de hyperplans singuliers S contenant F.

Les chambres de Weyl sont alors les facettes qui ne sont contenues dans aucun hyperplan singulier. Soit C une chambre de Weyl, les faces de C sont les facettes F telle que:

$F \subset \bar{C}$
$\mathrm{Supp}(F)$ est un hyperplan

et les murs de C sont les hyperplans qui sont les supports des faces de C.

corollaire 2

Soient C une chambre de Weyl et $\mathcal{M}$ l'ensemble des murs de C, pour chaque mur $M \in \mathcal{M}$ on désigne par α_M l'unique racine orthogonale à M située du même côté de M que C, alors $\Pi = \{\alpha_M \ / \ M \in \mathcal{M}\}$ est le système simple de racines tel que $C = \mathrm{Ch}(\Pi)$.

● Soit $\Pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ l'unique système simple de racines tel que $C = Ch(\Pi)$ de sorte que C est l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ tels que $(\lambda|\alpha_i) > 0$ pour $1\le i\le l$.

Pour $1\le i\le l$, soient M_i l'hyperplan orthogonal à α_i et F_i l'ensemble des $\lambda \in M_i$ tels que $(\lambda|\alpha_j) > 0$ pour $j \ne i$; alors F_i est une face de C de support M_i: on a évidemment $F_i \subset \bar{C}$; d'autre part soit α une racine telle que l'hyperplan orthogonal à α contienne F_i, or on a $\alpha = n_i\alpha_i + \sum_{j\ne i} n_j\alpha_j$ avec les coefficients entiers tous du même signe de sorte que $n_j = 0$ pour $j \ne i$ et $\alpha = \pm\alpha_i$ et ainsi M_i est l'unique hyperplan singulier contenant F_i.

Soit F une face de C, comme $F \subset \bar{C}$ on a $(\lambda|\alpha_i) \ge 0$ pour $1\le i\le l$ et pour tout $\lambda \in F$ et comme F est contenu (ie rencontre) un unique hyperplan singulier, il existe i tel que, pour tout $\lambda \in F$, $(\lambda|\alpha_i) = 0$ tandis que $(\lambda|\alpha_j) > 0$ pour $j \ne i$ de sorte que $F = F_i$. ●

2. Matrices de Cartan.

Soient C une chambre de Weyl et $\Pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ le système
simple de racines correspondant; on a:

$$(\alpha_i|\alpha_j) \le 0 \text{ pour } 1\le i,j\le l,\ i\ne j.$$

Autrement dit, l'angle entre deux racines simples est obtus.

Pour $1\le i,j\le l$ on pose $A_{i,j} = \alpha_j(H_i)$ (on pose $H_i = H_{\alpha_i}$ et $r_i = r_{\alpha_i}$ $1\le i\le l$). La matrice $A = (A_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ est appelée la <u>matrice de Cartan</u> de $\mathfrak{g}$ (relativement à C ou à Π).

Pour $1\le i,j\le l$, on désigne par $m_{i,j}$ l'ordre de r_ir_j dans le groupe de Weyl W. La matrice $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ est appelée la <u>matrice de Coxeter</u> de $\mathfrak{g}$ (relativement à C ou à Π).

<u>proposition 2.1</u>

1) La matrice de Cartan $A = (A_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ de $\mathfrak{g}$ possède les propriétés suivantes:

i) $A_{i,i} = 2$ pour $1\le i\le l$

ii) $A_{i,j}$ est un entier négatif pour $1\le i,j\le l$, $i\ne j$

iii) $A_{i,j} = 0 \Rightarrow A_{j,i} = 0$

2) La matrice de Coxeter $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ est donnée

par $m_{i,i} = 1$ $(1\le i\le l)$ et, pour $1\le i,j\le l$, $i\ne j$:

$A_{i,j}A_{j,i}$	0	1	2	3
$m_{i,j}$	2	3	4	6
$\theta_{i,j}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

où, pour $1\le i,j\le l$, $i\ne j$, $\theta_{i,j}$ est l'angle de α_i et α_j, de sorte que l'on a:

$$\theta_{i,j} = \pi - \frac{\pi}{m_{i,j}}$$

● Pour $1\le i\le l$, soit M_i l'hyperplan de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ orthogonal à α_i. Le sous-espace $\mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}\alpha_j$ de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ engendré par α_i et α_j $(i\ne j)$ est l'orthogonal de $M_i \cap M_j$ de sorte que

$$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}\alpha_j) \oplus (M_i \cap M_j)$$

Les sous-espaces $\mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}\alpha_j$ et $M_i \cap M_j$ sont stables par r_ir_j; on a

$$r_ir_j|M_i \cap M_j = I$$

et, dans la base (α_i,α_j) de $\mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}\alpha_j$, la matrice de $r_ir_j|(\mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}\alpha_j)$ est:

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} -1 + A_{i,j}A_{j,i} & A_{i,j} \\ -A_{j,i} & -1 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $m_{i,j}$ est donc égal à l'ordre de la matrice $M_{i,j}$ et le produit $A_{i,j}\,A_{j,i}$ prend l'une des valeurs 0,1,2 ou 3 et l'on sait que l'angle $\theta_{i,j}$ est obtus. ●

<u>proposition</u> <u>2.2</u>

a) Pour $1\le i\le l$, $\Phi^+(\Pi) \setminus \{\alpha_i\}$ est stable par r_i.

b) Pour $1\le i,j\le l$ on a $\alpha_j = w(\alpha_i) \Rightarrow r_j = w\circ r_i\circ w^{-1}$.

c) $\Phi = W(\Pi)$

d) W est engendré par $(r_i)_{1\le i\le l}$.

● a) Soit $\beta \in \Phi^+(\Pi)\setminus\{\alpha_i\}$; on a:

$$\beta = \sum_{1\le k\le l} n_k\alpha_k \text{ avec } n_k \ge 0$$

et il existe $j \ne i$ tel que $n_j > 0$. Alors:

$$r_i(\beta) = \beta - \beta(H_i)\alpha_i = \sum_{k\ne j} n_k\alpha_k + (n_i - \beta(H_i))\alpha_i$$

de sorte que $\beta \ne \alpha_i$ et tous les coefficients de $r_i(\beta)$ sont de même signe donc on a $r_i(\beta) \in \Phi^+(\Pi)$.

b) Puisque $\alpha_j = w(\alpha_i)$, on a $H_j = w(H_i)$ (ce qui signifie que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on a $\lambda(H_j) = w^{-1}(\lambda)(H_i)$). Il vient alors:

$$\begin{aligned} r_j(\lambda) &= \lambda - \lambda(H_j)\alpha_j \\ &= \lambda - w^{-1}(\lambda)(H_i)w(\alpha_i) \\ &= w(w^{-1}(\lambda) - w^{-1}(\lambda)(H_i)\alpha_i) \\ &= wr_i(w^{-1}(\lambda)) \end{aligned}$$

d'où $r_j = w \circ r_i \circ w^{-1}$.

L'ensemble $\mathcal{F}_\Pi$ des parties Ψ finies et symétriques de $\mathfrak{h}^* \backslash \{0\}$ telles que:

i) $\Pi \subset \Psi$

ii) $r_i(\Psi) \subset \Psi \qquad 1 \leq i \leq l$

contient Φ et est stable par intersection donc possède un plus petit élément Φ_o.

On a évidemment $\Phi_o \subset \Phi$. Supposons qu'il existe $\alpha \in \Phi \backslash \Phi_o$; on peut prendre $\alpha \in \Phi_+$ et $ht(\alpha)$ minimale. Mais il existe $i \in \{1,..,l\}$ tel que $ht(r_i(\alpha)) < ht(\alpha)$: supposons que $ht(r_i(\alpha)) \geq ht(\alpha)$ pour tout i, $1 \leq i \leq l$, comme $\alpha \neq \alpha_i$ on a $r_i(\alpha) \in \Phi_+$ de sorte que $\alpha(H_i) \leq 0$ ie $(\alpha|\alpha_i) \leq 0$ pour $1 \leq i \leq l$ d'où finalement $\|\alpha\| \leq 0$ et $\alpha = 0$. Mais $r_i(\alpha) \in \Phi_+ \backslash \Phi_o$ ce qui contredit le choix de α. Ainsi on a $\Phi_o = \Phi$.

c) Désignons par W_o le sous-groupe de W engendré par les r_i, $1 \leq i \leq l$; l'ensemble $\Psi = W_o(\Pi)$ vérifie les conditions i)-iv) de sorte que $\Phi \subset \Psi$ d'où $\Phi = W_o(\Pi)$.

d) Montrons enfin que $W_o = W$; soit $\alpha \in \Phi$ on a $\alpha = w(\alpha_i)$ avec $w \in W_o$ d'où $r_\alpha = wr_iw^{-1} \in W_o$ pour tout $\alpha \in \Phi$. ●

<u>corollaire 1</u>

Soit $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+(\Pi)} \alpha$ la demi-somme des racines positives; on a $r_i(\rho) = \rho - r_i$, $1 \leq i \leq l$.

● Soit ρ_i la demi-somme des racines positives distinctes de α_i de sorte que:

$$\rho = \rho_i + \alpha_i/2$$

Puisque $\Phi^+(\Pi) \backslash \{\alpha_i\}$ est stable par r_i, on a $r_i(\rho_i) = \rho_i$. Il en résulte que $r_i(\rho) = \rho_i - \alpha_i/2 = \rho - \alpha_i$. ●

corollaire 2

Soit $Q^\vee$ est le sous-groupe de $\mathfrak{h}$ engendré par les H_α pour $\alpha \in \Phi$; pour tout système simple de racines $\Pi = \{ \alpha_i / 1 \le i \le l \}$, $\Pi^\vee = \{ H_i / 1 \le i \le l \}$ est une base du $\mathbb{Z}$-module $Q^\vee$.

● Soit Q_o le sous-groupe de $\mathfrak{h}$ engendré par la base $(H_i)_{1 \le i \le l}$ de $\mathfrak{h}$; or on a:

$$r_j(H_i) = H_i - A_{i,j} H_j$$

de sorte que:

$$r_i(Q_o) \subset Q_o \text{ pour } 1 \le i \le l$$

et comme W est engendré par $(r_i)_{1 \le i \le l}$, Q_o est stable par W.

Soit $\alpha \in \Phi$, on a $\alpha = w(\alpha_i)$ et par suite $H_\alpha = w(H_i)$ de sorte que $H_\alpha \in Q_o$; ainsi $Q_o = Q^\vee$. ●

remarque:

Soit $\alpha \in \Phi$, on a $\alpha = \sum_{1 \le i \le l} n_i \alpha_i$ où les coefficients n_i, $1 \le i \le l$, sont des entiers tous de même signe. On a alors:

$$H_\alpha = \frac{2 h_\alpha}{\|\alpha\|^2} = \sum_{1 \le i \le l} \frac{2 n_i}{\|\alpha\|^2} h_{\alpha_i} = \sum_{1 \le i \le l} \frac{n_i \|\alpha_i\|^2}{\|\alpha\|^2} H_i$$

de sorte que les coefficients $\frac{n_i \|\alpha_i\|^2}{\|\alpha\|^2}$, $1 \le i \le l$, de H_α dans la base $\Pi^\vee$ sont aussi des entiers tous de même signe.

Soit W un groupe engendré par une famille $S = (r_i)_{i \in I}$ d'éléments d'ordre 2; la longueur $\ell(w)$ d'un élément $w \in W$ est le plus petit entier k tel qu'il existe une décomposition de w de la forme:

$$w = r_{i_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_k} \quad \text{avec } i_1, \ldots, i_k \in I$$

Une décomposition de w, de longueur minimale $k = \ell(w)$ est dite réduite.

proposition 2.3 (condition d'échange)

Soient $w \in W$ et $\alpha_i \in \Pi$ tels que $w^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_-$; pour toute décomposition réduite $(r_{i_1}, \ldots, r_{i_k})$ de w, il existe $j \in \{1, .., k\}$ tel que:

$$r_i w = r_{i_1} \ldots r_{i_{j-1}} r_{i_{j+1}} \ldots r_{i_k} .$$

● On a $w^{-1} = r_{i_k} \ldots r_{i_1}$. Posons:

$$\beta_o = \alpha_i$$
$$\beta_j = r_{i_j}\dots r_{i_1}(\alpha_i) \qquad \text{pour } 1 \le j \le k$$

On a donc $\beta_o = \alpha_i \in \Phi_+$ et $\beta_k = w^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_-$.
Soit j le plus petit indice tel que $\beta_j \in \Phi_-$ (de sorte que $\beta_{j-1} \in \Phi_+$). Puisque $\beta_j = r_{i_j}(\beta_{j-1})$ on a $\beta_{j-1} = \alpha_{i_j}$.
Ainsi:

$$\alpha_{i_j} = r_{i_{j-1}}\dots\dots r_{i_1}(\alpha_i)$$

d'où $\alpha_i = \pi(\alpha_{i_j})$ avec $\pi = r_{i_1}\dots r_{i_{j-1}}$ de sorte que:

$$r_i = \pi\circ r_{i_j}\circ\pi^{-1}$$

d'où:

$$\pi = r_i\circ\pi\circ r_{i_j}$$

et enfin on a:

$$r_{i_1}\dots\dots r_{i_{j-1}} r_{i_{j+1}}\dots\dots r_{i_k} = r_i w. \bullet$$

<u>corollaire 1</u>

On a $w^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_-$ si et seulement si $\ell(r_i w) < \ell(w)$.

● La condition d'échange implique que si $w^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_-$ on a $\ell(r_i w) < \ell(w)$.
Réciproquement si $w^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_+$ on a:

$$\begin{aligned}(r_i w)^{-1}(\alpha_i) &= w^{-1}(r_i(\alpha_i))\\ &= w^{-1}(-\alpha_i)\\ &= -w^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_-\end{aligned}$$

de sorte que $\ell(r_i^2 w) = \ell(w) < \ell(r_i w)$. ●

<u>corollaire 2</u>

Soit Π un système simple de racines; pour tout $w \in W$ l'ensemble $\Phi_w = \Phi_+ \cap w^{-1}(-\Phi_+)$ possède $\ell(w)$ éléments.

● On procède par récurrence sur $\ell(w)$; pour $1\le i\le l$ on a $\Phi_{r_i} = \{\alpha_i\}$.
Soient $w \in W$ tel que $\mathrm{Card}(\Phi_w) = \ell(w)$ et r_i telle que $\ell(wr_i) > \ell(w)$; on a donc $\alpha_i \notin \Phi_w$. Pour $\beta \in \Phi_{wr_i}$ on a deux possibilités:

i) $r_i(\beta) \in -\Phi_+$ donc $\beta = \alpha_i$

ii) $r_i(\beta) \in \Phi_+$ de sorte que $\beta = r_i(\alpha)$ avec $\alpha \in \Phi_v$ d'où $\mathrm{Card}(\Phi_{vr_i}) = \mathrm{Card}(\Phi_v) + 1$. ●

<u>proposition 2.4</u>

1) Pour toute chambre de Weyl C on a:

$$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \bigcup_{w\in W} \overline{w(C)}$$

2) Le groupe de Weyl W opère simplement transitivement dans l'ensemble des chambres de Weyl de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ et dans l'ensemble des systèmes simples de racines de Φ.

● 1) Soient C une chambre de Weyl, $\Pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ le système simple de racines correspondant, r_i, $1\le i\le l$, les symétries par rapport aux murs de C et $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+(\Pi)} \alpha$ la demi-somme des racines positives; pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, il existe $w \in W$ tel que $(w(\lambda)|\rho)$ soit maximal; on a donc, pour $1\le i\le l$:

$$\begin{aligned}(r_i w(\lambda)|\rho) &= (w(\lambda)|r_i(\rho))\\ &= (w(\lambda)|\rho - \alpha_i)\\ &\le (w(\lambda)|\rho)\end{aligned}$$

Par suite:

$$(w(\lambda)|\alpha_i) \ge 0 \quad \text{pour tout } i\ (1\le i\le l)$$

de sorte que $w(\lambda) \in \bar{C}$.

2) Pour tout $w \in W$, puisque w est une isométrie on a $w(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R},reg}) = \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R},reg}$ et si C est une chambre de Weyl, l'image w(C) est aussi une chambre de Weyl Soient C' une chambre de Weyl et $\lambda' \in C'$; il existe $w \in W$ tel que $\lambda = w(\lambda') \in \bar{C}$ et λ est régulier donc $\lambda \in C$. Ainsi $w(C')$ est une chambre rencontrant C donc $w(C') = C$.

3) Supposons que l'on ait $w(C) = C$ avec $w \in W$; on a alors $w(\Phi_+) = \Phi_+$, où Φ_+ est le système positif défini par C; mais la longueur $\ell(w)$ de w est égale au nombre de racines positives α telles que $w(\alpha) \in -\Phi_+$ de sorte que l'on a $\ell(w) = 0$ ie $w = 1$. ●

<u>corollaire</u>

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ et Π un système simple de racines de Φ; alors la matrice de Cartan $A = (A_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ de $\mathfrak{g}$ relativement à Π est indépendante (à une permutation de $\{1,\ldots,l\}$ près) du choix de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et du choix du système simple de racines Π.

● Fixons d'abord une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Soient $\Pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ et $\Pi' = \{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_l\}$ deux système simples de racines (relativement à Φ). Il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha_i) = \alpha'_i$ pour $1\leq i\leq l$ (à une permutation près). On a alors:

$$A'_{i,j} = \alpha'_j(H'_i) = \alpha'_j\left[\frac{2h_{\alpha'_i}}{(\alpha'_i|\alpha'_i)}\right] = 2\frac{(\alpha'_j|\alpha'_i)}{(\alpha'_i|\alpha'_i)}$$

$$= 2\frac{(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)} = \alpha_j\left[\frac{2h_{\alpha_i}}{(\alpha_i|\alpha_i)}\right] = \alpha_j(H_i) = A_{i,j}.$$

Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ (resp Ψ) l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ (resp à $\mathfrak{k}$) et $u \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$; on sait que $\Phi = {}^t u(\Psi)$. Soient $\Pi^{(\Phi)}$ une partie de Φ et $\Pi^{(\Psi)}$ une partie de Ψ telle que ${}^t u(\Pi^{(\Psi)}) = \Pi^{(\Phi)}$; alors $\Pi^{(\Phi)}$ est un système simple de racines relativement à $\mathfrak{h}$ si et seulement si $\Pi^{(\Psi)}$ est un système simple relativement à $\mathfrak{k}$; puisque si $\alpha = \gamma\circ u$ et $\beta = \delta\circ u$ avec $\alpha,\beta \in \Phi$ et $\gamma,\delta \in \Psi$ on a $a^{(\Phi)}_{\beta,\alpha} = a^{(\Psi)}_{\delta,\gamma}$ on en conclut à l'égalité des matrices de Cartan relatives à $\Pi^{(\Phi)}$ et $\Pi^{(\Psi)}$. ●

3. Définition du groupe de Weyl par générateurs et relations.

Un groupe D est diédral s'il est engendré par deux éléments s et s' d'ordre 2.

Pour $k \geq 0$, considérons les deux suites de longueur k:

$$\mathbf{s}_k = (s,s',s,\ldots\ldots)$$
$$\mathbf{s}'_k = (s',s,s',\ldots\ldots)$$

et s_k (resp s'_k) le produit des termes des suites $\mathbf{s}_k$ (resp $\mathbf{s}'_k$).

<u>proposition 3.1</u>

Soit D un groupe diédral; on pose $\pi = ss'$. Alors:

i) D est engendré par s et π.

ii) Le sous-groupe $\langle\pi\rangle$ de D engendré par π est distingué d'indice 2 et l'on a $s\pi s^{-1} = \pi^{-1}$.

iii) si π est d'ordre infini; on a:

$$D = \{e\} \cup \{s_k \ / \ k\geq 1\} \cup \{s'_k \ / \ k\geq 1\}$$

et chaque élément de D possède une unique décomposition réduite.

iv) si π est d'ordre fini m, alors D est d'ordre $2m$:

$$D = \{e\} \cup \{s_k \ / \ 1\leq k\leq m-1\} \cup \{s'_k \ / \ 1\leq k\leq m-1\} \cup \{s_m\}$$

et les éléments s_k et s'_k, $1\leq k\leq m-1$, possèdent une unique décomposition réduite tandis que l'élément $s_m = s'_m$ en possède deux.

● On a $s' = s\pi$. D'autre part $\langle\pi\rangle \neq D$ sinon D serait abélien d'ordre 2 (on aurait $o(\pi) = 2$) alors qu'il est au moins d'ordre 3. On a $s\pi s^{-1} = s^2s's = \pi^{-1}$. Il en résulte que D est produit semi-direct de $\langle s\rangle$ et de $\langle\pi\rangle$ donc $\langle\pi\rangle$ est d'indice 2 dans D.

On a:

$$s_{2k} = \pi^k \qquad \mathbf{s}'_{2k} = \pi^{-k}$$

$$s_{2k+1} = \pi^k s \qquad \mathbf{s}'_{2k+1} = \pi^{-k}s' = \pi^{-k-1}s$$

<u>Cas 1</u>: Supposons π d'ordre infini; les éléments de D sont les s_k pour $k \geq 0$ et s'_k pour $k \geq 1$ qui sont deux à deux distincts. On a

$$\ell(s_k) = \ell(s'_k) = k \quad \text{pour } k \geq 0$$

de sorte que $\mathbf{s}_k$ (resp $\mathbf{s}'_k$) est l'unique décomposition réduite de s_k (resp de s'_k).

<u>Cas 2</u>: Supposons π d'ordre fini m de sorte que D est d'ordre $2m$; il en résulte que les éléments de D sont les s_k pour $0 \leq k \leq 2m-1$. Mais on a $s_k = s'_{2m-k}$ pour $m \leq k \leq 2m-1$ de sorte que D est formé des éléments suivants: s_o, s_k pour $1\leq k\leq m-1$, s'_k pour $1\leq k\leq m-1$ et $\mathbf{s}_m = s'_m$.

Ainsi, pour $0\leq k\leq m-1$, $\mathbf{s}_k$ (resp $\mathbf{s}'_k$) est l'unique décomposition réduite de s_k (resp de s'_k) tandis que l'élément $s_m = s'_m$ de D possède les deux décompositions réduites $\mathbf{s}_m$ et $\mathbf{s}'_m$. ●

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq l}$ la matrice de Coxeter de W, ie $m_{i,j}$ est l'ordre de r_ir_j dans W.

<u>proposition 3.2</u> (lemme des mots de Matsumoto)

Soit Γ un monoïde; pour toute application $f : S \longrightarrow \Gamma$ telle que:

i) $f(r_i)^2 = 1$ pour tout $i \in I$

ii) $f(r_i)f(r_j)f(r_i)\ldots\ldots = f(r_j)f(r_i)f(r_j)\ldots\ldots$

avec $m_{i,j}$ termes dans chaque membre pour tout (i,j) tel que $m_{i,j} \neq \infty$, il existe une unique application $F : W \longrightarrow \Gamma$ telle que pour tout $w \in W$ et toute décomposition réduite $(r_{i_1},\ldots\ldots,r_{i_k})$ de w on ait:

$$F(w) = f(r_{i_1})\ldots\ldots f(r_{i_k}).$$

● Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des décompositions réduites des éléments de W et pour chaque $w \in W$ soit $\mathcal{D}_w$ l'ensemble des décompositions réduites de w. On définit une application :

$$F : \quad \mathcal{D} \longrightarrow \Gamma$$

$$w = (r_{i_1},\ldots r_{i_k}) \longrightarrow F(w) = f(r_{i_1})\ldots\ldots f(r_{i_k})$$

Il suffit de montrer que F est constante sur $\mathcal{D}_w$ pour tout $w \in W$.

On procède par récurrence sur $k = \ell(w)$:

– C'est vrai pour $k = 0,\ 1$.

– Hypothèse de récurrence: F est constante sur $\mathcal{D}_w$ pour tout $w \in W$ tel que $\ell(w) < k$. Prenons alors $w, w' \in \mathcal{D}_w$ avec $\ell(w) = k$.

On pose:

$$w_0 = w' = (r_{i'_1},\ldots\ldots,r_{i'_k})$$

$$w_1 = w = (r_{i_1},\ldots\ldots,r_{i_k}).$$

Supposons que $F(w_0) \neq F(w_1)$ et appliquons la condition d'échange:

puisque

$$w = r_{i_1}\ldots\ldots r_{i_k} = r_{i'_1}\ldots\ldots r_{i'_k}$$

on a $\ell(r_{i'_1}w) < \ell(w)$ de sorte que:

$$w_2 = (r_{i'_1},r_{i_1},\ldots\ldots,r_{i_{j-1}},r_{i_{j+1}},\ldots\ldots,r_{i_k}) \in \mathcal{D}_w$$

avec $1 \leq j \leq k$.

Compte tenu de la définition de F et de l'hypothèse de récurrence on a $F(w_2) = F(w_0)$.

Pour les mêmes raisons si on avait $j \neq k$ on aurait $F(w_2) = F(w_1)$ ce qui n'est pas possible donc $j = k$.

Ainsi:

$$w_2 = (r_{i'_1},r_{i_1},\ldots\ldots,r_{i_{k-1}}) \in \mathcal{D}_w$$

et $F(w_1) \neq F(w_2)$.

En continuant de la sorte on construit pour $0 \leq j \leq k$ un suite d'éléments de $\mathcal{D}_v$:

$$w_{j+1}=\begin{cases}(r_{i_1},r_{i'_1},\ldots,r_{i_1},r_{i'_1},r_{i_1},\ldots,r_{i_{k-j}}) & j\text{pair}\\ (r_{i'_1},r_{i_1},\ldots,r_{i'_1},r_{i_1},r_{i'_1},r_{i_1},\ldots,r_{i_{k-j}}) & j\text{impair}\end{cases}$$

tels que $F(w_j) \neq F(w_{j+1})$.

Finalement les deux suites (de longueur k) de $\mathcal{D}_v$:

$$(r_{i_1},r_{i'_1},r_{i_1},r_{i'_1},\ldots\ldots\ldots)$$

$$(r_{i'_1},r_{i_1},r_{i'_1},r_{i_1},\ldots\ldots\ldots)$$

ont des images par F qui sont distinctes; ces deux suites sont des décompositions réduites dans le sous-groupe diédral de W engendré par $(r_{i_1},r_{i'_1})$ du même élément w de longueur k; on a donc $k = m_{i_1,i'_1}$ mais l'hypothèse montre qu'alors ces deux suites doivent avoir la même image par F. On a donc une contradiction et par suite on a $F(w) = F(w')$. ●

<u>proposition 3.3</u>

Le groupe W est défini par les générateurs r_i $i \in I$ soumis aux relations:

i) $r_i^2 = I$ pour tout $i \in I$

ii) $r_ir_jr_i\ldots\ldots = r_jr_ir_j\ldots\ldots$ ($m_{i,j}$ termes)

ie W est un groupe de Coxeter.

● Soient G un groupe et $f : S \longrightarrow G$ une application telle que:

i) $f(r_i)^2 = 1$ pour tout $i \in I$

ii) $f(r_i)f(r_j)f(r_i)\ldots\ldots = f(r_j)f(r_i)f(r_j)\ldots\ldots$

avec $m_{i,j}$ termes dans chaque membre pour tout (i,j) tel que $m_{i,j} \neq \infty$; d'après le lemme de Matsumoto, il existe une unique application:

$$F : W \longrightarrow G$$

telle que pour tout $w \in W$ et toute décomposition réduite:

$$w = (r_{i_1},\ldots\ldots,r_{i_k})$$

de w on ait:

$$F(w) = f(r_{i_1})\ldots\ldots f(r_{i_k}).$$

Il s'agit de montrer que F est un homomorphisme de groupes. Comme

G est engendré par les r_i, $i \in I$, il suffit de montrer que:

$$F(r_i w) = f(r_i)F(w).$$

On a deux cas:

a) $\ell(r_i w) = \ell(w) + 1.$

Si $w = (r_{i_1}, \ldots\ldots, r_{i_k})$ est une décomposition réduite de w, alors $(r_i, r_{i_1}, \ldots\ldots, r_{i_k})$ est une décomposition réduite de $r_i w$.

b) $\ell(r_i w) = \ell(w) - 1.$

Dans ce cas posons $w' = r_i w$ de sorte que l'on peut appliquer a) à w' d'où:

$$F(w) = F(r_i w') = f(r_i)F(w')$$

donc:

$$F(r_i w) = f(r_i)^{-1}F(w) = f(r_i)F(w). \bullet$$

APPENDICE III

LA CLASSIFICATION DE CARTAN-KILLING

1. Diagrammes de Dynkin.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, on considère:

$\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$

Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$

W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ (avec $W \subset GL(\mathfrak{h}^*)$)

$\Pi = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ un système simple de racines de Φ

$A = (A_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ la matrice de $\mathfrak{g}$

$M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ la matrice de Coxeter de $\mathfrak{g}$

On sait que

$$A_{i,i} = 2 \quad \text{pour } 1\le i\le l$$
$$A_{i,j} \in \{0,-1,-2,-3\} \quad \text{pour } 1\le i,j\le l,\ i\ne j$$
$$A_{i,j} = 0 \Leftrightarrow A_{j,i} = 0$$

et que la matrice de Coxeter M est déterminée par la matrice de Cartan A puisque:

$$m_{i,i} = 1 \qquad 1\le i\le l$$

et que, pour $1\le i,j\le l$, $i\ne j$, $m_{i,j}$ est donné par:

$A_{i,j}A_{j,i}$	0	1	2	3
$m_{i,j}$	2	3	4	6
$\theta_{i,j}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

où, pour $1\le i,j\le l$, $i\ne j$, $\theta_{i,j} = \pi - \dfrac{\pi}{m_{i,j}}$ est l'angle de α_i et α_j dans l'espace euclidien $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ et l'on a:

$$A_{i,j} = -2(\|\alpha_j\|/\|\alpha_i\|)\cos(\pi/m_{i,j}) \qquad 1\le i,j\le l$$

Le graphe de Coxeter de $\mathfrak{g}$ est le graphe dont les sommets sont les racines simples $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ et dans lequel deux sommets distincts α_i et α_j sont reliés par $A_{i,j}A_{j,i}$ arêtes. En particulier l'algèbre $\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si son graphe de Coxeter est connexe.

Ce graphe ne détermine pas entièrement la matrice de Cartan: dans le cas où $A_{i,j}A_{j,i} = 2$ (resp 3) on sait que l'un des deux rapports $\|\alpha_j\|/\|\alpha_i\|$ ou $\|\alpha_i\|/\|\alpha_j\|$ est égal à $\sqrt{2}$ (resp $\sqrt{3}$) mais le graphe de Coxeter n'indique pas laquelle des deux racines α_i ou α_j est la plus grande. Pour cette raison on le complète en plaçant, sur les 2 ou 3 traits qui joignent deux sommets correspondant à des racines α_i et α_j de longueurs différentes, un signe > orienté vers la racine de la plus petite longueur. On obtient ainsi le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$.

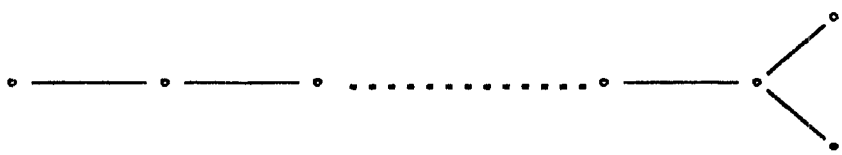
2. La classification de Cartan-Killing

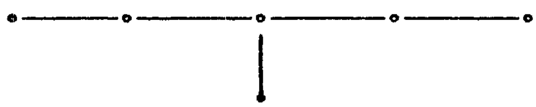
On se propose de montrer que le diagramme de Dynkin d'une algèbre de Lie simple de dimension finie est (à un isomorphisme près) l'un des diagrammes suivants:

A_l $(l\geq 1)$ 

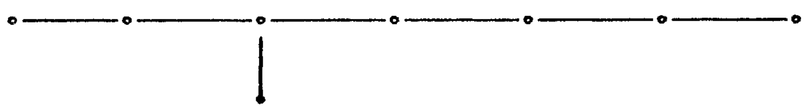
B_l $(l\geq 2)$ 

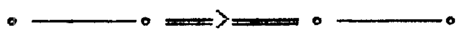
C_l $(l\geq 3)$ 

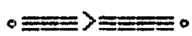
D_l $(l\geq 4)$ 

E_6 

E_7 

E_8 

F_4 

G_2 

Remarquons que si dans l'espace euclidien $E = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ on considère la base $(e_i)_{1\leq i\leq l}$ avec $e_i = \alpha_i/\|\alpha_i\|$ $(1\leq i\leq l)$ le produit scalaire est donné par:

$$(\lambda|\mu) = -\sum_{i,j} \cos(\pi/m_{i,j})\lambda\ \mu$$

$\lambda = \sum_i \lambda_i e_i$ et $\mu = \sum_i \mu_i e_i$.

On va classifier, en fait, les graphes de Coxeter sous-jacents aux diagrammes de Dynkin (on notera que les diagrammes de Dynkin B_l et C_l ont des graphes de Coxeter sous-jacents identiques).

Pour cela on va considérer une matrice symétrique $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le l}$ telle que:

i) $m_{i,i} = 1 \quad 1\le i\le l$

ii) $m_{i,j} = 2,3,4$ ou 6

On considère alors le graphe de Coxeter Γ_M dont les sommets sont $e_1,\ldots,e_l$ et dans lequel deux sommets distincts e_i et e_j sont reliés par 0,1,2 ou 3 traits selon que $m_{i,j} = 2,3,4$ ou 6 (d'ailleurs tout graphe de cette forme définit une unique matrice M).

On suppose de plus que:

iii) Γ_M est connexe.

On munit l'espace réel E de base canonique $(e_i)_{1\le i\le l}$ de la forme bilinéaire symétrique β_M telle que:

$$\beta_{i,j} = \beta(e_i,e_j) = -\cos(\pi/m_{i,j})$$

On suppose enfin que:

iv) β_M est définie positive.

(1) Le graphe de Coxeter Γ_M de $\mathfrak{g}$ est un arbre.

● Sinon ce graphe contiendrait un circuit $(e_{i_1},\ldots,e_{i_r})$ $(r\ge 3)$; on pose $m_j = m_{i_j,i_{j+1}}$ pour $1\le j\le r-1$ et $m_r = m_{i_r,i_1}$ et l'on a $m_j \ge 3$ pour $1\le j\le r$.

Soit $v = e_{i_1} + \ldots + e_{i_r}$; on a:

$$\|v\|^2 = 1 - 2\sum_{j<k} \cos(\pi/m_{i_j,i_k})$$

Mais:

$$\sum_{j<k} \cos(\pi/m_{i_j,i_k}) \ge \sum_j \cos(\pi/m_j) \ge 1.\cos(\pi/3) = 1/\ 2$$

d'où:

$$\|v\|^2 \le 1 - 21/\ 2 = 0$$

et $v = 0$ ce qui est contradictoire. ●

Si e_i est un sommet de Γ_M on note $J(i)$ l'ensemble des indices j tels que $\{e_i,e_j\}$ soit une arête et $\nu(i) = \mathrm{Card}(J(i))$; on a:

$$\begin{aligned}
\beta_{i,i} &= 1 \\
\beta_{i,j} &= 0 \iff j \notin J(i) \text{ et } j \neq i \\
\beta_{i,j} &= 1/2,\ \sqrt{2}/2 \text{ ou } \sqrt{3}/2 \text{ pour } j \in J(i)
\end{aligned}$$

(2) Pour tout i on a $\sum_{j\in J(i)} \beta_{i,j}^2 < 1$

● Si j et $k \in J(i)$, $\{e_j,e_k\}$, n'est pas une arête (sinon (e_i,e_j,e_k) serait un circuit) de sorte que e_j et e_k sont orthogonaux. Si on désigne par F le sous-espace de E engendré par e_j, $j \in J(i)$, on voit que $(e_j)_{j \in J(i)}$ est une base orthonormée de F de sorte que la distance δ de e_i à F est donnée par:

$$\delta^2 = 1 - \sum_{j\in J(i)} (e_i|e_j) = 1 - \sum_{j\in J(i)} \beta_{i,j}^2 > 0. \ ●$$

(3) Pour chaque sommet e_i on a $\nu(i) \leq 3$. Si $\nu(i) = 3$ on a $m_{i,j} = 3$ pour tout $j \in J(i)$.

● Pour tout $j \in J(i)$, on a:

$$\beta_{i,j} = -\cos(\pi/m_{i,j}) \leq -1/2$$

de sorte que:

$$\sum_{j\in J(i)} \beta_{i,j}^2 \geq \nu(i)/4$$

et l'on a $\nu(i) \leq 3$.

Supposons que $\nu(i) = 3$; s'il existait $j \in J(i)$ avec $m_{i,j} = 4$ ou 6 on aurait:

$$\sum_{j\in J(i)} \beta_{i,j}^2 \geq 1/4 + 1/4 + (\sqrt{2}/2)^2 = 1$$

ce qui est contradictoire. ●

(4) S'il existe une arête $\{e_i,e_j\}$ telle que $m_{i,j} = 6$ on a nécessairement $l = 2$ (ie le graphe est de type G_2)

● Si on avait $l > 2$ on aurait un troisième sommet e_k tel que $\{e_i,e_k\}$ soit une arête (puisque le graphe est connexe). On aurait alors:

$$\sum_{j\in J(i)} \beta_{i,j}^2 \geq 1/4 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1$$

ce qui est contradictoire. ●

On suppose dorénavant que le graphe n'est pas de type G_2 de sorte que pour chaque sommet e_i on a $m_{i,j} = 3$ ou 4 pour tout $j \in J(i)$.

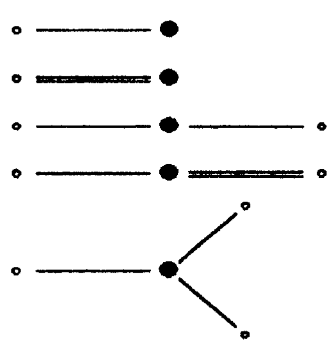
(5) Pour chaque sommet e_i il existe au plus un sommet e_j, $j \in J(i)$, tel que $m_{i,j} = 4$.

● Sinon on aurait:

$$\sum_{j\in J(i)} \beta_{i,j}^2 \geq 2.(\sqrt{2}/2)^2 = 1$$

ce qui est contradictoire. ●

Ainsi selon que e_i est relié à 1, 2, ou 3 sommets on a les possibilités:



(A_2)

(B_2)

(A_3)

(B_3)

(D_4)

Pour $l = 2$ ou 3 on a énuméré tous les cas possibles. On peut donc supposer $l \geq 4$.

Soit $\{e_s, e_t\}$ une arête du graphe Γ_M telle que $m_{s,t} = 3$; on définit un nouveau graphe $\bar{\Gamma}_M$ en identifiant les sommets e_s et e_t de Γ_M.

● Puisque Γ_M est un arbre, chaque sommet e_k distinct de e_s et de e_t ne peut pas être relié simultanément à e_s et à e_t de sorte que $\bar{\Gamma}_M = \Gamma_{\bar{M}}$ où $\bar{M}$ est une matrice vérifiant les conditions i) et ii) ci-dessus. Le graphe $\bar{\Gamma}_M$ est connexe (iii) donc il suffit de vérifier la condition (iv): considérons l'ensemble quotient $\{\bar{1}, \ldots, \bar{s} = \bar{t}, \ldots, \bar{l}\}$ de sorte que:

$$\bar{\beta}_{\bar{i},\bar{j}} = \begin{cases} \beta_{i,j} & \text{si } \bar{i} \neq \bar{s} \text{ et } \bar{j} \neq \bar{s} \\ \beta_{s,j} + \beta_{t,j} & \text{si } \bar{i} = \bar{s} \text{ et } \bar{j} \neq \bar{s} \end{cases}$$

avec $\bar{1} \leq \bar{i} < \bar{j} \leq \bar{l}$ de sorte que (puisque $\beta_{i,j} = -1/2$) on a:

$$\bar{\beta}(\bar{x},\bar{y}) = \beta(x,y)$$

pour tout $\bar{x},\bar{y} \in \bar{E}$ avec, par exemple, $x_i = x_{\bar{i}}$ pour $i \neq s$ et t et $x_s = x_t = x_{\bar{s}}$. ●

(6) Le graphe de Coxeter Γ_M vérifie l'une des conditions suivantes:

a) Γ_M est une chaîne et il y a au plus une arête $\{e_i,e_j\}$ telle que $m_{i,j} = 4$.

b) Γ_M possède un unique point de ramification et toutes les arêtes $\{e_i,e_j\}$ sont telles que $m_{i,j} = 3$.

● Le résultat est vrai pour $l \leq 4$. On procède par récurrence sur l.

a) Supposons que le graphe Γ_M soit une chaîne (c'est à dire que $\nu(i) = 1$ ou 2 pour tout sommet e_i) et soit $\{e_i,e_j\}$ une arête telle que $m_{i,j} = 4$; il existe une arête $\{e_i,e_k\}$ (par exemple) et l'on a nécessairement $m_{i,k} = 3$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence au graphe de Coxeter $\bar{\Gamma}_M$ obtenu en identifiant les sommets e_i et e_k du graphe Γ_M.

b) Supposons que le graphe Γ_M possède un point de ramification e_i; on a donc $\nu(i) = 3$ et $m_{i,j} = 3$ pour $j \in J(i)$. Puisque Γ_M est connexe, il existe $j \in J(i)$ tel que e_j soit relié à un sommet e_k ($k \neq i$ et $k \notin J(i)$). Soit $\bar{\Gamma}_M$ le graphe de Coxeter obtenu en identifiant les sommets e_i et e_j du graphe Γ_M; d'après l'hypothèse de récurrence $\bar{e}_i = \bar{e}_j$ est l'unique point de ramification de $\bar{\Gamma}_M$ et toutes ses arêtes ont un coefficient égal à 3 de sorte que toutes les arêtes de Γ_M ont un coefficient égal à 3 et n'a pas de point de ramification distinct de e_i et de e_j; mais si e_j était un point de ramification de Γ_M, $\bar{e}_j$ appartiendrait à 4 arêtes dans $\bar{\Gamma}_M$ ce qui est contradictoire. ●

(7) Si Γ_M est une chaîne, Γ_M est de type A_l, B_l ou F_4.

● Supposons que Γ_M soit une chaîne, quitte à changer l'ordre des sommets on peut supposer que les arêtes sont

$\{e_1,e_2\},\{e_2,e_3\},\ldots\ldots,\{e_{l-1},e_l\}$. Alors, ou bien $m_{j,j+1} = 3$ pour tout j et dans ce cas Γ_M est de type A_l ou bien il existe i tel que $m_{i,i+1} = 4$ et $m_{j,j+1} = 3$ pour tout $j \neq i$; si $i = 1$ ou $l-1$ le graphe Γ_M est de type B_l; supposons que $2 \le i \le l-2$ et posons:

$$u = e_1 + 2e_2 + \ldots\ldots + ie_i$$

$$v = (l-i)e_{i+1} + \ldots\ldots\ldots + 2e_{l-1} + e_l$$

On a:

$$\|u\|^2 = \Big(\sum_{1\le r\le i} re_r \,\Big|\, \sum_{1\le s\le i} se_s\Big) = \sum_{1\le r\le i} r^2 - 2\sum_{1\le r\le i-1} r(r+1)/2$$

$$= i^2 - (i-1)i/2 = i(i+1)/2.$$

De même on a:

$$\|v\|^2 = (l-i)(l-i+1)/2.$$

De plus:

$$(u|v) = i(l-i)(e_i|e_{i+1}) = -\sqrt{2}.i(l-i)/2$$

On a donc:

$$2i(l-i) < (i+1)(l-i+1)$$

$$(i-1)[(l-i)-1] < 2$$

Puisque $2 \le i \le l-2$ on a $i-1 \ge 1$ et $(l-i)-1 \ge 1$ le seul cas possible est $i = 2$ et $l-i = 2$ ie $l = 4$, autrement dit Γ_M est de type F_4. ●

(8) Si Γ_M n'est pas une chaîne, Γ_M est de type D_l, E_6, E_7 ou E_8.

● Alors Γ_M possède un unique point de ramification et les arêtes $\{e_i,e_j\}$ ont toutes un coefficient $m_{i,j} = 3$. Soit e_i le point de ramification de sorte que $J(i) = \{i_1,j_1,k_1\}$. Le graphe $\Gamma_M\backslash\{e_i\}$ a trois composantes connexes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de type A_r, A_s et A_t. Les arêtes de ces graphes sont:

Γ_1: $\{i_1,i_2\}$, $\{i_2,i_3\},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\{i_{r-1},i_r\}$

Γ_2: $\{j_1,j_2\}$, $\{j_2,j_3\},\ldots\ldots\ldots\ldots,\{j_{s-1},j_s\}$

Γ_3: $\{k_1,k_2\}$, $\{k_2,k_3\},\ldots,\{k_{t-1},k_t\}$

On supposera que $r \ge s \ge t \ge 1$ et on pose:

$$u = e_{i_r} + 2e_{i_{r-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + re_{i_1}$$

$$v = e_{j_s} + 2e_{j_{s-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + se_{j_1}$$

$$w = e_{k_t} + 2e_{k_{t-1}} + \ldots\ldots +te_{k_1}$$

de sorte que:

$$\|u\|^2 = r(r+1)/2, \quad \|v\|^2 = s(s+1)/2 \text{ et } \|w\|^2 = t(t+1)/2$$

tandis que:

$$(u|v) = (v|w) = (u|w) = 0.$$

Puisque e_i n'appartient pas au sous-espace F de E engendré par u,v et w on a:

$$d(e_i,F)^2 = 1 - [(e_i|u)/\|u\|]^2 - [(e_i|v)/\|v\|]^2 - [(e_i|w)/\|w\|]^2$$

$$= 1 - r/2(r+1) - s/2(s+1) - t/2(t+1)$$

$$= (-1 + 1/(r+1) + 1/(s+1) + 1/(t+1))/2 > 0$$

Puisque $r \geq s \geq t \geq 1$ on a $3/(t+1) > 1$ donc $t = 1$ donc

$$1/(r+1) + 1/(s+1) > 1/2 \text{ d'où } 2/(s+1) > 1/2 \text{ et } s = 1 \text{ ou } 2.$$

Si $s = 1$ le graphe Γ_M est de type D_l; supposons que $s = 2$: on a alors $1/(r+1) > 1/6$ donc $r = 2$, 3 ou 4. ●

CHAPITRE VI

ALGEBRES ENVELOPPANTES

1. Algèbres enveloppantes.

Désignons par $\mathcal{Alg}_{\mathbb{C}}$ la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres associatives unitaires et par $\mathcal{Lie}_{\mathbb{C}}$ la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie. On a un foncteur canonique:

$$\mathcal{Alg}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{Lie}_{\mathbb{C}}$$

qui, à une algèbre associative unitaire A associe l'algèbre de Lie ayant A comme espace vectoriel sous-jacent et dont le crochet est donné par $[x,y] = xy - yx$ pour tout $x,y \in A$.

<u>proposition</u> <u>1.1</u>

Le foncteur canonique $\mathcal{Alg}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{Lie}_{\mathbb{C}}$ possède un adjoint à gauche:

$$\mathcal{U} : \mathcal{Lie}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{Alg}_{\mathbb{C}}$$

● Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie; on pose:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$$

où $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y]$ avec $X,Y \in \mathfrak{g}$ (on a identifié $\mathfrak{g}$ avec le sous-espace $\mathcal{T}^1(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$) de sorte que l'on a une application linéaire canonique:

$$\varepsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

telle que:

$$\varepsilon([X,Y]) = \varepsilon(X)\varepsilon(Y) - \varepsilon(Y)\varepsilon(X) \text{ pour tout } X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Considérons alors une algèbre associative unitaire A et une application linéaire $f : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ telle que:

$$f([X,Y]) = f(X)f(Y) - f(Y)f(X) \text{ pour tout } X,Y \in \mathfrak{g};$$

il existe alors un homomorphisme d'algèbres associatives $\bar{f} : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tel que $\bar{f}|\mathfrak{g} = f$. Puisque $\bar{f}(\mathcal{J}) = \{0\}$ on en déduit un homomorphisme d'algèbres associatives $F : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tel que $F\circ\varepsilon = f$. Puisque l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est engendrée par l'image de ε un tel homomorphisme est unique. ●

En particulier, pour toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$, il existe une unique représentation $\tilde{\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ telle que $\rho = \tilde{\rho}\circ\varepsilon$ de sorte que l'on a un isomorphisme entre la catégorie de $\mathfrak{g}$-modules et celle des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modules.

2. Le théorème De Birkhoff-Poincaré-Witt

proposition 2.1 (Birkhoff-Poincaré-Witt)

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $\varepsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'application canonique;

i) ε est injective (ce qui permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à son image dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$).

ii) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une base de $\mathfrak{g}$, telle que l'ensemble I soit bien ordonné; alors les monômes $X_{i_1}^{\nu_1}\ldots\ldots X_{i_n}^{\nu_n}$ avec $n \geq 0$ et $i_1 < \ldots\ldots < i_n$ forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

● Soit $\mathfrak{I}$ l'ensemble des suites $\iota = (i_1,\ldots\ldots,i_n)$ d'éléments de I telles que $i_1 \leq \ldots\ldots \leq i_n$, $n \geq 0$; on pose $\ell(\iota) = n$.

Pour $i \in I$ et $\iota \in \mathfrak{I}$ on écrira $i \leq \iota$ si l'on a $i \leq i_1 \leq \ldots\ldots \leq i_n$ et l'on notera $i+\iota$ la suite $(i,i_1,\ldots\ldots,i_n) \in \mathfrak{I}$.

Pour $\iota \in \mathfrak{I}$ on pose $X_\iota = \varepsilon(X_{i_1})\ldots\ldots\varepsilon(X_{i_n})$ et il s'agit de montrer que $(X_\iota)_{\iota\in\mathfrak{I}}$ est une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

1) Une construction préliminaire:

Soit $V = \mathbb{C}[T_i]_{i\in I}$; on désigne par V_d le sous-espace de V des polynômes de degré $\leq$ d et on pose $T_\iota = T_{i_1}\ldots\ldots T_{i_n}$ pour tout $\iota \in \mathfrak{I}$ de sorte que $(T_\iota)_{\iota\in\mathfrak{I}}$ est une base de V.

On se propose de construire une représentation:

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

telle que:

i) Pour tout polynôme P de degré d et tout $i \in I$ on a:

$$\rho(X_i)P \equiv T_iP \pmod{V_d}$$

ii) Pour tout $\iota \in \mathfrak{I}$ et tout $i \in I$ tels que $i \leq \iota$ on a:

$$\rho(X_i)T_\iota = T_{i+\iota}$$

Il suffit évidemment de définir $\rho(X_i)T_\iota$ pour tout $\iota \in \mathfrak{I}$ et tout $i \in I$.

On a nécessairement:

$$\rho(X_i)T_\emptyset = T_i \text{ pour tout } i \in I.$$

Il s'agit de définir $\rho(X_i)T_\iota$ $(d = \ell(\iota) \geq 1)$ sous l'hypothèse de récurrence suivante:

a) $\rho(X)P$ est défini pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $P \in V_{d-1}$

b) $\rho(X_j)P$ est défini tout $P \in V_d$ et tout $j < i$.
Posons $\imath = j+\jmath$ de sorte que $\jmath \in \mathfrak{I}$ et $j \le \jmath$; alors:

$$\rho(X_i)T_\imath = \begin{cases} T_{i+\imath} & \text{si } i \le j \\ \rho(X_j)(\rho(X_i)T_\jmath) + \rho([X_i,X_j])T_\jmath & \text{si } i > j \end{cases}$$

On définit ainsi une application linéaire $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.
Il s'agit de montrer que c'est un homomorphisme d'algèbres de Lie.
On doit vérifier la propriété:

$$\mathcal{P}(X,Y,P):\quad \rho(X)\rho(Y)P - \rho(X)\rho(Y)P = \rho([X,Y])P$$

pour $X,Y \in \mathfrak{g}$ et $P \in V$ et il suffit de vérifier $\mathcal{P}(X_i,X_j,T_\jmath)$ pour tout $i,j \in I$ et tout $\jmath \in \mathfrak{I}$.

i) $\mathcal{P}(X_i,X_i,T_\jmath)$ est triviale

ii) $\mathcal{P}(X_i,X_j,T_\jmath) \Leftrightarrow \mathcal{P}(X_j,X_i,T_\jmath)$

iii) $\mathcal{P}(X_i,X_j,T_\emptyset)$ est vraie; on peut prendre $i > j$ alors on a:

$$\begin{aligned}\rho(X_i)(\rho(X_j)T_\emptyset) &= \rho(X_i)T_j \\ &= \rho(X_j)\rho(X_i)T_\emptyset + \rho([X_i,X_j])T_\emptyset\end{aligned}$$

iv) $\mathcal{P}(X_i,X_j,T_\jmath)$ est vraie pour $i \le \jmath$ ou $j \le \jmath$:

Supposons d'abord que $i > j$ et que $j \le \jmath$ de sorte que:

$$\begin{aligned}\rho(X_i)(\rho(X_j)T_\jmath) &= \rho(X_i)(T_{j+\jmath}) \\ &= \rho(X_j)\rho(X_i)T_\jmath + \rho([X_i,X_j])T_\jmath\end{aligned}$$

De même la propriété est vraie pour $j > i$ et $i \le \jmath$ et on conclut grâce à i) et ii).
On procède alors par récurrence: soit $\jmath \in \mathfrak{I}$ tel que $\ell(\jmath) = d \ge 1$ et l'on suppose (hypothèse de récurrence) que $\mathcal{P}(X,Y,P)$ est vraie pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$ et tout $P \in V_{d-1}$.
Il suffit de considérer le cas où $\jmath = k + \boldsymbol{k}$ avec $k \le \boldsymbol{k}$, $k < i$, $k < j$.
On a alors:

$$\rho(X_j)T_\jmath = \rho(X_j)(\rho(X_k)T_{\boldsymbol{k}})$$

mais $\mathcal{P}(X_j,X_k,T_{\boldsymbol{k}})$ est vraie par hypothèse de récurrence d'où:

$$\rho(X_j)T_\jmath = \rho(X_k)(\rho(X_j)T_{\boldsymbol{k}}) + \rho([X_j,X_k])T_{\boldsymbol{k}}$$

or on a:

$$\rho(X_j)T_{\boldsymbol{k}} = T_{j+\boldsymbol{k}} + P \qquad \text{avec } \deg(P) < d$$

$\mathcal{P}(X_i,X_k,T_{j+\boldsymbol{k}})$ est vraie parce que $k < j$ et $k \le \boldsymbol{k}$

$\mathcal{P}(X_i,X_k,P)$ est vraie par hypothèse de récurrence

Il en résulte que $\mathcal{P}(X_i,X_k,\rho(X_j)T_{\mathcal{k}})$ est vraie.

D'autre part $\mathcal{P}(X_i,[X_j,X_k],T_{\mathcal{k}})$ est vraie par hypothèse de récurrence.

On a alors:

$$\begin{aligned}\rho(X_i)\rho(X_j)T_{\mathcal{j}} &= \rho(X_i)\rho(X_k)(\rho(X_j)T_{\mathcal{k}}) + \rho(X_i)\rho([X_j,X_k])T_{\mathcal{k}}\\ &= \rho(X_k)\rho(X_i)(\rho(X_j)T_{\mathcal{k}}) + \rho([X_i,X_k])\rho(X_j)T_{\mathcal{k}}\\ &\quad + \rho([X_j,X_k])\rho(X_i)T_{\mathcal{k}} + \rho([X_i,[X_j,X_k]])T_{\mathcal{k}}\end{aligned}$$

De même on obtient que:

$$\begin{aligned}\rho(X_j)\rho(X_i)T_{\mathcal{j}} &= \rho(X_k)\rho(X_j)(\rho(X_i)T_{\mathcal{k}}) + \rho([X_j,X_k])\rho(X_i)T_{\mathcal{k}}\\ &\quad + \rho([X_i,X_k])\rho(X_j)T_{\mathcal{k}} + \rho([X_j,[X_i,X_k]])T_{\mathcal{k}}\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}&\rho(X_i)\rho(X_j)T_{\mathcal{j}} - \rho(X_j)\rho(X_i)T_{\mathcal{j}}\\ &\qquad= \rho(X_k)\rho(X_i)(\rho(X_j)T_{\mathcal{k}}) + \rho([X_i,X_k])\rho(X_j)T_{\mathcal{k}}\\ &\qquad\quad - \rho(X_k)\rho(X_j)(\rho(X_i)T_{\mathcal{k}}) - \rho([X_j,X_k])\rho(X_i)T_{\mathcal{k}}\\ &\qquad\quad + \rho([X_j,X_k])\rho(X_i)T_{\mathcal{k}} + \rho([X_i,[X_j,X_k]])T_{\mathcal{k}}\\ &\qquad\quad - \rho([X_i,X_k])\rho(X_j)T_{\mathcal{k}} - \rho([X_j,[X_i,X_k]])T_{\mathcal{k}}\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(X_i,X_j,T_{\mathcal{k}})$ on a:

$$\begin{aligned}\rho(X_i)\rho(X_j)T_{\mathcal{j}} - \rho(X_j)\rho(X_i)T_{\mathcal{j}} &= \rho(X_k)\rho([X_i,X_j])T_{\mathcal{k}}\\ &\quad + \rho([X_i,[X_j,X_k]])T_{\mathcal{k}} + \rho([X_j,[X_k,X_i]])T_{\mathcal{k}}\end{aligned}$$

En appliquant l'identité de Jacobi on trouve que:

$$\rho(X_i)\rho(X_j)T_{\mathcal{j}} - \rho(X_j)\rho(X_i)T_{\mathcal{j}} = \rho(X_k)\rho([X_i,X_j])T_{\mathcal{k}} - \rho(X_k,[X_i,X_j])T_{\mathcal{k}}$$

Enfin, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(X_k,[X_i,X_j],T_{\mathcal{k}})$ montre que:

$$\begin{aligned}\rho(X_i)\rho(X_j)T_{\mathcal{j}} - \rho(X_j)\rho(X_i)T_{\mathcal{j}} &= \rho([X_i,X_j])\rho(X_k)T_{\mathcal{k}}\\ &= \rho([X_i,X_j])T_{\mathcal{j}}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(X_i,X_j,T_{\mathcal{j}})$ est vérifiée.

<u>2) La famille</u> $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ <u>est libre dans</u> $\mathcal{U}(g)$

La propriété universelle de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(g)$ montre qu'il existe un unique homorphisme d'algèbre associatives:

$$\bar{\rho} : \mathcal{U}(g) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

tel que $\bar{\rho}\circ\varepsilon = \rho$.

Une récurrence immédiate montre que:

$$\bar{\rho}(X_i)T_\emptyset = T_i \quad \text{pour tout } i \in \mathfrak{I}$$

de sorte que $\sum c_i X_i = 0 \Rightarrow \sum c_i \bar{\rho}(X_i)T_\emptyset = 0 \Rightarrow \sum c_i T_i = 0$

donc $c_i = 0$ pour tout $i \in \mathfrak{I}$.

<u>3) La famille</u> $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ <u>est une base de</u> $\mathcal{U}(g)$.

L'application $\varepsilon : g \longrightarrow \mathcal{U}(g)$ est injective. On identifie g à son image dans $\mathcal{U}(g)$.

Désignons par $\mathcal{U}_n(g)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}(g)$ engendré par les produits $Z_1.....Z_r$, $0 \le r \le n$, $Z_1,..,Z_r \in g$, d'au plus n éléments de g.

et montrons, par récurrence sur n, que $\mathcal{U}_n(g)$ est engendré par les X_i tels que $\ell(i) \le n$ (c'est trivial pour $n = 0$).

On sait que la famille $(X_i)_{i\in I}$ engendre l'algèbre $\mathcal{U}(g)$ (puisqu'il en est ainsi pour l'algèbre tensorielle $\mathcal{T}(g)$).

Considérons alors un monôme $X_{i_1}.....X_{i_n}$ avec $n \ge 1$ et $i_1,.....,i_n \in I$. Il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $i = (i_{\sigma(1)},....,i_{\sigma(n)}) \in \mathfrak{I}$; mais on a $X_i - X_{i_1}.....X_{i_n} \in \mathcal{U}_{n-1}(g)$: en effet il suffit de décomposer σ en un produit de transpositions $\sigma = \tau_{j_1}....\tau_{j_k}$ où τ_j $(1 \le j \le n-1)$ est la tranposition $(j,j+1)$; on a alors pour $Z_1,....,Z_n \in g$:

$$Z_{\tau_j(1)}.....Z_{\tau_j(n)} - Z_1......Z_n$$

$$= Z_1..Z_{j-1}Z_{j+1}Z_jZ_{j+2}....Z_n - Z_1..Z_{j-1}Z_jZ_{j+1}Z_{j+2}....Z_n$$

$$= Z_1..Z_{j-1}[Z_{j+1},Z_j]Z_{j+2}....Z_n \in \mathcal{U}_{n-1}(g). \bullet$$

3. La filtration canonique de l'algèbre enveloppante.

Pour tout $n\ge 0$, soit $\mathcal{U}_n(g)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}(g)$ engendré par les produits d'au plus n éléments de g et $\mathcal{U}_n(g) = \{0\}$ pour $n < 0$. On a:

$$\mathcal{U}_0(g) = \mathbb{C}1$$

$$\mathcal{U}_1(g) = \mathbb{C}1 \oplus g$$

$$\mathcal{U}_{n-1}(g) \subset \mathcal{U}_n(g)$$

$$\bigcup_{n\ge 0} \mathcal{U}_n(g) = \mathcal{U}(g)$$

$$\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_{m+n}(\mathfrak{g})$$

de sorte que $(\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}))_{n\geq 0}$ est une filtration de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Le produit de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ induit sur l'espace vectoriel $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, somme directe des $\mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})/\mathcal{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$, $n \geq 0$, une structure d'algèbre telle que:

$$\mathcal{G}r^m(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))\mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{G}r^{m+n}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

Puisque pour $X_1,\ldots,X_n \in \mathfrak{g}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a:

$$X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(n)} - X_1\ldots X_n \in \mathcal{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$$

on voit que l'algèbre $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ est commutative. Par suite, il existe un unique homomorphisme d'algèbres:

$$\varphi \,;\, \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

prolongeant l'inclusion canonique $\mathfrak{g} = \mathcal{G}r^1(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \longrightarrow \mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

<u>proposition 3.1</u>

L'homomorphisme canonique:

$$\varphi \,;\, \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées.

● Soit $(X_i)_{i\in I}$ une base de $\mathfrak{g}$, telle que l'ensemble I soit bien ordonné de sorte que les monômes $X_{i_1}^{\nu_1}\ldots X_{i_k}^{\nu_k}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$ et $\nu_1 + \ldots + \nu_k \leq n$ forment une base de $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$.

Les monômes $X_{i_1}^{\nu_1}\ldots X_{i_k}^{\nu_k}$, calculés dans $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, avec $i_1 < \ldots < i_k$ et $\nu_1 + \ldots + \nu_k = n$ forment une base de $\mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ et sont les images par φ des monômes analogues calculés dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, or ces derniers forment une base de $\mathcal{S}^n(\mathfrak{g})$. ●

<u>corollaire 1</u>

i) L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est intègre

ii) Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est noethérienne.

● i) $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, donc $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, est intègre. Soient u,v des éléments non nuls de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et m (resp n) le plus petit entier tel que $u \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ (resp $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$) de sorte que les images de u et v dans $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ sont non nulles de sorte m+n est le plus petit entier tel que $uv \in \mathcal{U}_{m+n}(\mathfrak{g})$ et en particulier uv est non nul.

ii) Supposons $\mathfrak{g}$ de dimension finie; $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, donc $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, est noethérien d'après de théorème de la base finie de Hilbert. Soit $\mathfrak{I}$

un idéal (à gauche, par exemple) de $\mathcal{U}(g)$; pour $n \geq 0$, posons $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I} \cap \mathcal{U}_n(g)$ de sorte que la somme directe $\mathcal{G}r(\mathfrak{I})$ des $\mathcal{G}r^n(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}_n / \mathfrak{I}_{n-1}$ est un idéal gradué de $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(g))$. Si $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont deux idéaux de $\mathcal{U}(g)$ tels que $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{J}$ et $\mathcal{G}r(\mathfrak{I}) = \mathcal{G}r(\mathfrak{J})$ on a alors $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ de sorte que toute suite croissante $(\mathfrak{I}_n)_{n\geq 0}$ d'idéaux de $\mathcal{U}(g)$ est stationnaire. ●

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g)$ d'une structure d'algèbre en posant:

$$(u\otimes v)(u'\otimes v') = (uu')\otimes(vv') \text{ pour } u,u',v,v' \in \mathcal{U}(g)$$

Le co-produit de $\mathcal{U}(g)$ est l'unique homomorphisme d'algèbres:

$$\Delta : \mathcal{U}(g) \longrightarrow \mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g)$$

tel que $\Delta(X) = X\otimes 1 + 1\otimes X$ pour tout $X \in g$. Un élément $u \in \mathcal{U}(g)$ est primitif s'il vérifie la relation: $\Delta(u) = u\otimes 1 + 1\otimes u$.

<u>corollaire 2</u>

g est l'ensemble des éléments primitifs u de $\mathcal{U}(g)$.● 1) Supposons d'abord l'algèbre de Lie g abélienne; si $(X_i)_{i\in I}$ est une base de g, $\mathcal{U}(g) = \mathcal{S}(g)$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[X_i]_{i\in I}$ tandis que $\mathcal{S}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(g)$ s'identifie à $\mathbb{C}[U_i,V_i]_{i\in I}$ et l'on a, pour tout $f \in \mathbb{C}[X_i]_{i\in I}$, $\Delta(f)((U_i,V_i)_{i\in I}) = f((U_i+V_i)_{i\in I})$ de sorte que f est primitif si et seulement si:

$$f((U_i+V_i)_{i\in I}) = f((U_i)_{i\in I}) + f((V_i)_{i\in I})$$

ie f est homogène de degré 1.

2) Revenons au cas général. Posons, pour $n \geq 0$:

$$(\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g))_n = (\sum_{p+q=n} \mathcal{U}_p(g) \otimes \mathcal{U}_q(g))$$

ce qui munit l'algèbre $\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g)$ d'une filtration et permet de considérer l'algèbre graduée associée $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g))$, somme directe des espaces:

$$\mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g)) = (\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g))_n/(\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g))_{n-1}$$

de sorte que l'on a un isomorphisme:

$$\mathcal{G}r(\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g)) \simeq \mathcal{G}r(\mathcal{U}(g)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{G}r(\mathcal{U}(g))$$

On a:

$$\Delta(\mathcal{U}(g)_n) \subset (\mathcal{U}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(g))_n$$

de sorte que Δ induit un homomorphisme d'algèbres:

$$\mathcal{G}r(\mathcal{U}(g)) \longrightarrow \mathcal{G}r(\mathcal{U}(g)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{G}r(\mathcal{U}(g))$$

qui, par l'intermédiaire de l'isomorphisme φ s'identifie au coproduit:

$$\mathcal{S}(g) \longrightarrow \mathcal{S}(g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(g)$$

Soit $u \in \mathcal{U}_n(g)$ un élément primitif; sa classe $\bar{u} \in \mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(g))$ est alors un élément primitif de $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(g)) \simeq \mathcal{S}(g)$ de sorte que $\bar{u} = \bar{0}$ si $n \neq 1$. On a donc $u = 0$ si $n = 0$ et $u \in \mathcal{U}_{n-1}(g)$ si $n > 1$ de sorte que $u \in \mathcal{U}_1(g)$ ie $u = X + s1_{\mathcal{U}(g)}$; alors $s = 0$ et $u = X \in g$. ●

CHAPITRE VII

REPRESENTATIONS DE DIMENSION FINIE

1. Modules de Verma.

Considérons une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Φ l'ensemble des racires de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

Soit $\Pi = \{\alpha_i / 1 \leq i \leq l\}$ un système simple de racines; le sous-$\mathbb{Z}$-module Q de $\mathfrak{h}^*$ engendré par Φ est libre de base Π tandis que le sous-$\mathbb{Z}$-module P de $\mathfrak{h}^*$ formé des $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ (il suffit que $\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq l$) est libre de base $(\Lambda_i)_{1\leq i\leq l}$ (où $(\Lambda_i)_{1\leq i\leq l}$ est la base duale de la base $(H_i)_{1\leq i\leq l}$ de $\mathfrak{h}$). On a $Q \subset P$.

On définit une relation d'ordre sur $\mathfrak{h}^*$ en posant $\lambda \geq \mu$ si et seulement si $\lambda - \mu \in Q_+ = \sum_i \mathbb{N}\, \alpha_i$.

Un $\mathfrak{g}$-module V est <u>diagonalisable</u> si l'on a la décomposition en somme directe:

$$V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

où $V_\lambda = \{v \in V / Hv = \lambda(H)v \;\; \forall H \in \mathfrak{h}\}$. On désigne par $P(V)$ l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ telles que $V_\lambda \neq \{0\}$ (ie l'ensemble des poids de V). Un vecteur $v \in V_\lambda$, avec $\lambda \in F(V)$, est dit isobare de poids λ.

<u>exemple:</u> La représentation:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \\ X &\longrightarrow ad_X : (u \longrightarrow Xu - uX) \end{aligned}$$

est diagonalisable.

● Pour tout λ, $\lambda' \in Q$, on a:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^\lambda . \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\lambda'} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\lambda+\lambda'}$$

où, pour tout $\lambda \in Q$:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^\lambda = \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / [H,u] = \lambda(H)u \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Posons $\Phi_+ = \{\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_s\}$ et considérons une base de $\mathfrak{g}$ de la forme:

$$\{Z_{\gamma_k},\ Z_{-\gamma_k}\ /\ 1\le k\le s\} \cup \{H_i\ /\ 1\le i\le l\}$$

avec $Z_{\gamma_k} \in \mathfrak{g}_{\gamma_k}$, $Z_{-\gamma_k} \in \mathfrak{g}_{-\gamma_k}$ et $[Z_{\gamma_k}, Z_{-\gamma_k}] = H_{\gamma_k}$ pour $1\le k\le s$

Pour $\mu,\nu \in \mathbb{N}^s$ et $\sigma \in \mathbb{N}^l$ on pose:

$$Z_-(\nu) = Z_{-\gamma_1}^{\nu_1}\ldots\ldots Z_{-\gamma_s}^{\nu_s}$$

$$H(\sigma) = H_1^{\sigma_1}\ldots\ldots H_l^{\sigma_l}$$

$$Z_+(\mu) = Z_{\gamma_1}^{\mu_1}\ldots\ldots Z_{\gamma_s}^{\mu_s}$$

D'après le théorème de Birkhoff-Poincaré-Witt, les éléments:

$$\begin{aligned} Z(\nu,\sigma,\mu) &= Z_-(\nu)H(\sigma)Z_+(\mu) \\ &= Z_{-\gamma_1}^{\nu_1}\ldots\ldots Z_{-\gamma_s}^{\nu_s} H_1^{\sigma_1}\ldots\ldots H_l^{\sigma_l} Z_{\gamma_1}^{\mu_1}\ldots\ldots Z_{\gamma_s}^{\mu_s} \end{aligned}$$

forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et l'on a:

$$Z(\nu,\sigma,\mu) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{(\mu_1 - \nu_1)\gamma_1 + \ldots\ldots + (\mu_s - \nu_s)\gamma_s}$$

de sorte que:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda\in Q} \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\lambda}\ \bullet.$$

<u>Proposition 1.1</u>

Soit V un $\mathfrak{g}$-module diagonalisable; tout sous-module W de V est diagonalisable et l'on a la décomposition en somme directe:

$$W = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} W \cap V_\lambda$$

● Soit $v \in W$; on a $v = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} v_\lambda$ avec $v_\lambda \in V_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Considérons l'ensemble $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$ des $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tels que $v_\lambda \neq 0$; on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$H^k v = \sum_{1\le i\le r} \lambda_i(H)^k v_{\lambda_i} \in W \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}.$$

On pose, pour $H \in \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= \det(\lambda_i(H)^{j-1})_{1\le i,j\le r} \\ &= \prod_{1\le i<j\le r} (\lambda_i(H) - \lambda_j(H)) \end{aligned}$$

Soit $H \in \mathfrak{h}$ tel que $\Delta(H) \neq = 0$; considérons l'inverse $(C_{i,j})_{1\le i,j\le r}$ de la matrice $(\lambda_i(H)^{j-1})_{1\le i,j\le r}$ de sorte que:

$$\begin{aligned} \sum_{1\le j\le r} C_{j,k} H^{j-1} v &= \sum_{1\le i,j\le r} \lambda_i(H)^{j-1} C_{j,k} v_{\lambda_i} \\ &= v_{\lambda_k} \in W \quad \text{pour } 1 \le k \le r.\ \bullet \end{aligned}$$

Considérons la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ définie par le système simple de racines Π; on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ avec $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Phi_+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{b}'$.

Soit $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$; <u>le module de Verma $M(\Lambda)$</u> associé à Λ est le $\mathfrak{g}$-module:

$$M(\Lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\Lambda$$

où $\mathbb{C}_\Lambda$ est le $\mathfrak{b}$-module ayant $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sous-jacent et tel que, pour tout $c \in \mathbb{C}$:

$$Hc = \Lambda(H)c \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}$$
$$\mathfrak{n} \subset \mathrm{ann}(\mathbb{C}_\Lambda).$$

<u>Proposition 1.2</u>

Soit $v_\Lambda = 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \otimes 1 \in M(\Lambda)$, alors:

i) v_Λ est isobare de poids Λ et engendre $M(\Lambda)$

ii) $\mathfrak{n} \subset \mathrm{ann}(v_\Lambda)$

iii) $(Z_-(\nu)v_\Lambda)$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M(\Lambda)$

iv) $Z_-(\nu)v_\Lambda$ est isobare de poids $\Lambda -\nu_1\gamma_1 -\ldots\ldots -\nu_s\gamma_s$

v) $M(\Lambda)$ est diagonalisable, Λ est le plus grand élément de $P(M(\Lambda))$ et l'on a, pour tout $\lambda \in P(M(\Lambda))$:

$$\dim M(\Lambda)_\lambda = \mathcal{P}(\Lambda-\lambda).$$

(où, pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mathcal{P}(\lambda)$ est le nombre de familles $\nu = (\nu_k)_{1\le k\le s} \in \mathbb{N}^s$ telles que $\lambda = \sum_k \nu_k\gamma_k$). En particulier on a $\dim M(\Lambda)_\Lambda = 1$.

● Le $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module $M(\Lambda)$ est engendré par v_Λ est l'on a:

$$Z_+(\mu)v_\Lambda = \begin{cases} v_\Lambda & \text{si } \mu = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$H(\sigma)v_\Lambda = \Lambda(H_1)^{\sigma_1}\ldots\ldots\Lambda(H_l)^{\sigma_l}v_\Lambda$$

et pour toute famille à support finie $(c_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^s}$ d'éléments de $\mathbb{C}$, on a, puisque $(Z_-(\nu))_\nu$ est une base du $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$-module à droite $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$\sum c_\nu Z_-(\nu)v_\Lambda = 0 \Rightarrow \sum Z_-(\nu) \otimes c_\nu = 0 \Rightarrow c_\nu = 0 \text{ pour tout } \nu \in \mathbb{N}^s$$

Il en résulte que $(Z_-(\nu)v_\Lambda)_\nu$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M(\Lambda)$.

On a alors, pour tout $H \in \mathfrak{h}$:

$$HZ_-(\nu)v_\Lambda = [H,Z_-(\nu)]v_\Lambda + Z_-(\nu)Hv_\Lambda$$
$$= (-\nu_1\gamma_1 - \ldots\ldots - \nu_s\gamma_s)(H)Z_-(\nu)v_\Lambda + \Lambda(H)Z_-(\nu)v_\Lambda$$
$$= (\Lambda - \nu_1\gamma_1 - \ldots\ldots - \nu_s\gamma_s)(H)Z_-(\nu)v_\Lambda$$

de sorte que $Z_-(\nu)v_\Lambda$ est de poids $\Lambda - \nu_1\gamma_1 - \ldots\ldots - \nu_s\gamma_s$.
Il reste à calculer $\mathcal{P}(0)$. Supposons que $\nu_k\gamma_k = 0$; mais on a $\gamma_k = \sum_i n_{i,k}\alpha_i$ avec $n_{i,k} \geq 0$ d'où $\sum_k n_{i,k}\nu_k = 0$ pour $1 \leq i \leq l$. S'il existait k avec $\nu_k \neq 0$ on aurait $n_{i,k} = 0$ pour tout i d'où $\gamma_k = 0$ ce qui n'est pas possible puisque γ_k est une racine et par suite $\mathcal{P}(0) = 1$. ●

Soit $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$; un $\mathfrak{g}$-module V est dit <u>à plus grand poids Λ</u> s'il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que:

i) $H.v = \Lambda(H)v$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ (v isobare de poids Λ)

ii) $\mathfrak{n} \subset \mathrm{ann}(v)$ (v est primitif)

iii) $\mathcal{U}(\mathfrak{g}).v = V$ (v est un générateur du $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module V).

(le module de Verma $M(\Lambda)$ est donc à plus grand poids Λ).

<u>Proposition 1.3</u>

Soit V un $\mathfrak{g}$-module à plus grand poids Λ;

i) pour tout $v \in V_\Lambda$, il existe un $\mathfrak{g}$-homomorphisme unique, surjectif:

$$f : M(\Lambda) \longrightarrow V$$

tel que $f(v_\Lambda) = v$.
En particulier, V est diagonalisable, Λ est le plus grand élément de $P(V)$, V_λ est de dimension finie pour tout $\lambda \in P(V)$ et $\dim(V_\Lambda) = 1$.

ii) $\mathrm{End}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(V) = \mathbb{C}I_V$.

En particulier V est indécomposable.

● L'application:

$$f_o : \mathbb{C}_\Lambda \longrightarrow V$$
$$c \longrightarrow cv$$

est un $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$-homomorphisme, donc se prolonge en un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-homomorphisme:

$$f : M(\Lambda) \longrightarrow V$$

tel que $f(v_\Lambda) = v$. Puisque v engendre V, f est surjectif et comme

$$f(Z_-(\nu)v_\Lambda) = Z_-(\nu)v$$

pour tout ν, f est unique.

Soit T un élément du commutant de V; on a:

$$HT(v) = T(Hv) = \Lambda(H)T(v)$$

de sorte que $T(v) = cv$. On a alors:

$$T(Z_-(\nu)v) = Z_-(\nu)T(v) = cZ_-(\nu)v$$

de sorte que T est l'homothétie de rapport c. ●

<u>Proposition 1.4</u>

i) L'ensemble des sous-modules de $M(\Lambda)$ distincts de $M(\Lambda)$, possède un plus grand élément $M_{max}(\Lambda)$.

ii) Le $\mathfrak{g}$-module quotient $L(\Lambda) = M(\Lambda)/M_{max}(\Lambda)$ est simple à plus grand poids Λ (on désignera encore par v_Λ l'image dans $L(\Lambda)$ du générateur canonique de $M(\Lambda)$).

● Soit N un sous-module de $M(\Lambda)$; on a:

$$N = \sum_{\lambda\leq\Lambda} (N \cap M(\Lambda)_\lambda)$$

Ainsi N est distinct de $M(\Lambda)$ si et seulement si $v_\Lambda \notin N$ de sorte que la somme de tous les sous-modules de $M(\Lambda)$, distincts de $M(\Lambda)$, est un sous-module $M_{max}(\Lambda)$ de $M(\Lambda)$ distinct de $M(\Lambda)$. ●

<u>Proposition 1.5</u>

Soit V un $\mathfrak{g}$-module à plus grand poids Λ; les conditions suivantes sont équivalentes:

a) V est simple

b) tout vecteur primitif de V est de poids Λ.

c) $V \simeq L(\Lambda)$.

Ainsi l'application $\Lambda \longrightarrow [L(\Lambda)]$ est une bijection de $\mathfrak{h}^*$ sur l'ensembles de classes à isomorphisme près de $\mathfrak{g}$-modules simples à plus grand poids.

● a) ⇒ b) Soit v un vecteur primitif non nul de poids λ; on a donc $\lambda \leq \Lambda$; d'autre part $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v = V$ puisque V est simple de sorte que V est à plus haut poids λ et l'on a $\lambda \geq \Lambda$ ie $\lambda = \Lambda$.

b) ⇒ a) Soit V' un sous-module non nul de V; $P(V')$ est majoré par Λ donc possède un élément maximal λ; si $v \in V'_\lambda$ on a $Xv \in V'_{\lambda+\alpha} = \{0\}$ pour tout $\alpha \in \Phi_+$ de sorte que v est primitif: on a donc $v \in V_\Lambda = \mathbb{C}v_\Lambda$ d'où $v_\Lambda \in V'$ et $V' = V$.

c) ⇒ a) puisque $L(\Lambda)$ est simple.

a) ⇒ c) soit $v \in V_\Lambda$; il existe un unique $\mathfrak{g}$-homomorphisme surjectif:

$$f : M(\Lambda) \longrightarrow V$$

tel que $f(v_\Lambda) = v$. Comme V est simple $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-module maximal de $M(\Lambda)$, donc égal $M_{max}(\Lambda)$. ●

2. Représentations de dimension finie.

Pour tout $\alpha \in \Phi$; choisissons un élément non nul X_α de $\mathfrak{g}_\alpha$ et soit Y_α l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$; puisque X_α et Y_α sont des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ on peut considérer l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ défini par:

$$\theta_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})\exp(-\mathrm{ad}_{Y_\alpha})\exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})$$

<u>Proposition 2.1</u>

Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, l'automorphisme θ_α laisse $\mathfrak{h}$ stable et l'on a $\theta_\alpha|\mathfrak{h} = r_\alpha$.

● En effet on a:

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathrm{Ker}(\alpha)$$

(décomposition orthogonale pour la forme de Cartan-Killing K); comme le résultat est trivial lorsque $\alpha(H) = 0$, il suffit de considérer lecas où $H = H_\alpha$. On a alors:

$$\exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})H_\alpha = H_\alpha - 2X_\alpha$$

$$\exp(-\mathrm{ad}_{Y_\alpha})(H_\alpha - 2X_\alpha) = H_\alpha - 2X_\alpha - 2Y_\alpha - 2H_\alpha + 2Y_\alpha = -2X_\alpha - H_\alpha$$

$$\exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})(-2X_\alpha - H_\alpha) = -2X_\alpha - H_\alpha + 2X_\alpha = -H_\alpha. \bullet$$

Un $\mathfrak{g}$-module V est <u>intégrable</u> s'il est diagonalisable et si les endomorphismes:

$$(X_\alpha)_V : v \longrightarrow X_\alpha v$$
$$(Y_\alpha)_V : v \longrightarrow Y_\alpha v$$

soient localement nilpotents pour $\alpha \in \Phi$; on peut alors considérer, pour toute racine $\alpha \in \Phi$, l'automorphisme de V défini par:

$$\theta_\alpha^V = \exp((X_\alpha)_V)\exp(-(Y_\alpha)_V)\exp((X_\alpha)_V)$$

<u>Proposition 2.2</u>

1) Un $\mathfrak{g}$-module diagonalisable V est intégrable si et seulement si les endomorphismes $(X_\alpha)_V$ et $(Y_\alpha)_V$ sont localement nilpotents pour tout $\alpha \in \Pi$.

2) Soit V un $\mathfrak{g}$-module intégrable; on a alors, pour tout poids $\lambda \in P(V)$:

$$\theta_\alpha^V(V_\lambda) = V_{r_\alpha(\lambda)}$$

de sorte que l'ensemble des poids $P(V)$ de V est stable par le groupe de Weyl W.

● Tout d'abord, remarquons que si S et T sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel V avec S localement nilpotent, alors $ad_S = L_S - R_S$ est localement nilpotent et l'on a (en appliquant la formule du binôme):

$$\exp(ad_S)T = \exp(S)T\exp(-S)$$

Soit $\alpha \in \Phi$ tel que les endomorphismes $(X_\alpha)_V$ et $(Y_\alpha)_V$ soient localement nilpotents de sorte que l'automorphisme θ_α^V de V est défini; on a alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$:

$(\theta_\alpha^V)X_v(\theta_\alpha^V)^{-1} =$

$\exp((X_\alpha)_v)\exp(-(Y_\alpha)_v)\exp((X_\alpha)_v)X_v\exp(-(X_\alpha)_v)\exp((Y_\alpha)_v)\exp(-(X_\alpha)_v)$

$\quad = \exp(ad_{(X_\alpha)_v})\exp(-ad_{(Y_\alpha)_v})\exp(ad_{(X_\alpha)_v})X_v$

$\quad = (\exp(ad_{X_\alpha})\exp(-ad_{Y_\alpha})\exp(ad_{X_\alpha})X)_v$

$\quad = (\theta_\alpha(X))_v.$

En particulier, on voit que si X_v est localement nilpotent, il en est de même de $(\theta_\alpha(X))_v$.

D'autre part, soient $\lambda \in P(V)$ et $v \in V_\lambda$; on a donc $Hv = \lambda(H)v$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$; si $\alpha(H) = 0$ (de sorte que H commute avec X_α et Y_α) on a:

$$H\theta_\alpha^V(v) = \theta_\alpha^V(Hv)) = \lambda(H)\theta_\alpha^V v = r_\alpha(\lambda)(H)\theta_\alpha^V v$$

Il reste donc à établir que:

$$H_\alpha\theta_\alpha^V v = r_\alpha(\lambda)(H_\alpha)\theta_\alpha^V v$$

$$= -\lambda(H_\alpha)\theta_\alpha^V v = -\theta_\alpha^V(H_\alpha v)$$

c'est à dire que (puisque V est diagonalisable):

$$(\theta_\alpha^V)(H_\alpha)_v(\theta_\alpha^V v)^{-1} = -(H_\alpha)_v$$

Or on a, d'après la formule ci-dessus:

$(\theta_\alpha^V)(H_\alpha)_v(\theta_\alpha^V v)^{-1} = (\theta_\alpha(H_\alpha))_v = (r_\alpha(H_\alpha))_v = -(H_\alpha)_v.$

Ainsi, pour tout $\lambda \in P(V)$:

$$\theta_\alpha^V(V_\lambda) = V_{r_\alpha(\lambda)}$$

En particulier on voit que, pour tout $\beta \in \Phi$ on a:

$$\theta_\alpha(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{r_\alpha(\beta)}$$

Soit alors $\alpha \in \Phi$; on a $\alpha = w(\alpha_i)$ et $w = r_{i_1}\circ\ldots\ldots\circ r_{i_k}$ et tout $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ s'écrit $Y = \theta_{\alpha_{i_1}} \circ \ldots\ldots \circ \theta_{\alpha_{i_k}}(X)$ avec $X \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ de sorte que si X_V est localement nilpotent, Y_V l'est aussi. ●

Proposition 2.3

Soit V un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-module; les conditions suivantes sont équivalentes:

i) V est intégrable

ii) V est réunion de sous-modules de dimension finie

iii) V est somme directe d'une famille de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-modules simples de dimension finie.

● i) ⇒ ii) Dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ on a les relations:

$$[H,X^n] = 2nX^n$$
$$[H,Y^n] = -2nY^n$$
$$[X,Y^n] = -n(n-1)Y^{n-1}+nY^{n-1}H$$

Il en résulte que pour $\lambda \in P(V)$ et $v \in V_\lambda$ on a:

$$X_V Y_V^n v = n(\lambda(H)+1-n)Y_V^{n-1}v + Y_V^n X_V v$$

Par suite, le sous-espace de V:

$$W = \sum_{m,n\geq 0} \mathbb{C} Y_V^n X_V^m v$$

est un sous-$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-module de V de dimension finie contenant v.

ii) ⇒ iii) Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille maximale de sous-modules simples de V telle que la somme $V_o = \sum_{i\in I} L_i$ soit directe et supposons qu'il existe $v \in V\backslash V_o$; il existe donc un sous-module W de dimension finie de V tel que $v \in W$ et par suite, un sous-module simple L de W non contenu dans V_o de sorte que la somme $V_o + L$ est directe. On a donc $V_o = V$.

iii) ⇒ i) Tout module de dimension finie est intégrable. ●

corollaire

Soit V un $\mathfrak{g}$-module intégrable avec V_λ de dimension finie pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$; on a $P(V) \subset P$.

● Pour tout poids $\lambda \in P(V)$ et toute racine $\alpha \in \Phi$, on a une représentation intégrable de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$\rho_\alpha : \mathfrak{s}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} V_{\lambda+k\alpha})$$

de sorte que l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\lambda + k\alpha \in P(V)$ est un intervalle $[-p,q]$ de $\mathbb{Z}$ et $p - q = \lambda(H_\alpha)$. ●

Proposition 2.4

Soit $L(\Lambda)$ le $\mathfrak{g}$-module simple de plus grand poids $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$; les conditions suivantes sont équivalentes:

a) $L(\Lambda)$ est intégrable

b) $L(\Lambda)$ est de dimension finie.

c) $\Lambda \in P \cap \bar{C}$ (ie $\Lambda(H_i) \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq l$)

L'application $\Lambda \longrightarrow [L(\Lambda)]$ est une bijection de $P \cap \bar{C}$ sur l'ensemble des classes à isomorphisme près des $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie.

● a) ⇒ b) Soit $\lambda \in P(L(\Lambda))$; on a, puisque $\Lambda \geq \lambda$:

$$\lambda = \Lambda - \sum_i m_i \alpha_i \quad \text{avec les } m_i \in \mathbb{N}$$

Il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha_i) = -\alpha_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq l$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_l$; on a, puisque $P(L(\Lambda))$ est stable par W:

$$w(\lambda) = \Lambda - \sum_i n_i \alpha_{\sigma(i)} \quad \text{avec les } n_i \in \mathbb{N}$$

de sorte que:

$$\lambda = w^{-1}(\Lambda) + \sum_i n_i \alpha_i$$

et finalement:

$$\sum_i (m_i + n_i)\alpha_i = \Lambda - w^{-1}(\Lambda) = \sum_i p_i \alpha_i$$

On a donc $m_i \leq p_i$ pour $1 \leq i \leq l$ et l'ensemble $P(L(\Lambda))$ est fini; par suite $L(\Lambda)$ est de dimension finie.

b) ⇒ c) Pour $\alpha \in \Phi_+$, soit $\mathfrak{s}_\alpha$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$) engendrée par X_α et Y_α; on a $X_\alpha v_\Lambda = 0$ et $H_\alpha v_\Lambda = \Lambda(H_\alpha) v_\Lambda$ de sorte que v_Λ est primitif de poids $\Lambda(H_\alpha)$ pour le $\mathfrak{s}_\alpha$-module $L(\Lambda)$; par suite $\Lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$.

c) ⇒ a) Pour $1 \leq i \leq l$, on a, pour tout $n \geq 1$, la formule:

$$X_i Y_i^n v_\Lambda = n(\Lambda(H_i) - n+1) Y_i^{n-1} v_\Lambda.$$

avec $X_i = X_{\alpha_i}$ et $Y_i = Y_{\alpha_i}$.

En l'appliquant à $n = \Lambda(H_i)+1$, on obtient:

$$X_i Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda = 0.$$

Comme $[X_j, Y_i] = 0$ pour $i \neq j$, si $v = Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda$ n'était pas nul ce serait un élément primitif de $L(\Lambda)$ ce qui n'est pas possible (puisqu'il est de poids $\Lambda - (\Lambda(H_i)+1)\alpha_i$). On a donc $Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda = 0$.

Soit Z l'un des éléments X_i ou Y_i de $\mathfrak{g}$; dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ on a:

$$Z^n a = \sum_{0 \le k \le n} C_n^k (ad_Z a)^k Z^{n-k}$$

(on applique la formule du binôme à $L_Z = ad_Z + R_Z$); il en résulte que pour $v = av_\Lambda \in V_\lambda$ ($\lambda \in V_\lambda$, $a \in \mathcal{U}(g)$) on a $Z^n a = 0$ pour n assez grand. Ainsi $X_{i,L(\Lambda)}$ et $Y_{i,L(\Lambda)}$ sont des endomorphismes localement nilpotents de $L(\Lambda)$. ●

CHAPITRE VIII

L'ISOMORPHISME D'HARISH-CHANDRA

1. L'isomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$-modules entre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

Pour $X \in \mathfrak{g}$, on désigne par ad_X l'unique dérivation de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (resp $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$) telle que $ad_X Y = [X,Y]$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$; on munit ainsi l'espace vectoriel $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (resp $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$) d'une structure de $\mathfrak{g}$-module.

<u>proposition</u> <u>1.1</u>

Il existe un unique $\mathfrak{g}$-isomorphisme:

$$\psi : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

tel que:

$$\psi(X_1 \ldots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(n)}$$

pour $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ et $n \geq 0$.

● On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^n(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\tau_n} & \mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \end{array}$$

où σ_n et τ_n proviennent de ce que $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sont des quotients de l'algèbre tensorielle, π_n est l'homomorphisme canonique de $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$ et

$$\varphi : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

est l'isomorphisme canonique d'algèbres graduées de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{G}r(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

Soit $\mathcal{U}^n(\mathfrak{g}) = \tau_n(\mathcal{T}^n_{sym}(\mathfrak{g}))$; on a la décomposition en somme directe:

$$\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}^n(\mathfrak{g}) \oplus \mathcal{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$$

et puisque σ_n induit une bijection linéaire de $\mathcal{T}^n_{sym}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{S}^n(\mathfrak{g})$, l'application linéaire:

$$\pi_n \circ \tau_n : \mathcal{T}^n_{sym}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

est bijective de sorte que l'application linéaire τ_n induit une bijection de $\mathcal{T}^n_{sym}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}^n(\mathfrak{g})$.

Finalement, on a le diagramme commutatif de bijections linéaires:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^n_{sym}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[d, "\sigma_n"'] & \mathcal{U}^n(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\pi_n"] \\
\mathcal{S}^n(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathcal{G}r^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))
\end{tikzcd}$$

d'où l'application linéaire bijective:

$$\psi_n : \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}^n(\mathfrak{g})$$

telle que:

$$\psi_n(X_1 \ldots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(n)}$$

et le $\mathfrak{g}$-isomorphisme:

$$\psi : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

$$\begin{aligned}
\psi(ad_X(X_1 \ldots X_n)) &= \psi\Big(\sum_i (X_1 \ldots (ad_X X_i) \ldots X_n)\Big) \\
&= \sum_i \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} X_{\sigma(1)} \ldots (ad_X X_{\sigma(i)}) \ldots X_{\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sum_i (X_{\sigma(1)} \ldots (ad_X X_{\sigma(i)}) \ldots X_{\sigma(n)}) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} ad_X (X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(i)} \ldots X_{\sigma(n)}) \\
&= ad_X \Big(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(i)} \ldots X_{\sigma(n)})\Big) \\
&= ad_X(\psi(X_1 \ldots X_n)). \bullet
\end{aligned}$$

2. Invariants dans l'algèbre symétrique.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on désigne par ad^*_X la restriction à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ de l'endomorphisme $-{}^t(ad_X)$ de $(\mathcal{S}(\mathfrak{g}))^*$ de sorte que $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ est muni de la structure de $\mathfrak{g}$-module définie par:

$$ad^*_X f(X_1, \ldots, X_n) = -\sum_i f(X_1, \ldots, X_{i-1}, ad_X X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n)$$

pour $f \in \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}^*)$, $X_1 \ldots X_n \in \mathfrak{g}^*$ et $n \geq 0$.

proposition 2.1

Soit $f \in \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}^*)$, les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $f \in \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$

ii) $f(u(X_1),\ldots,u(X_n)) = f(X_1,\ldots,X_n)$ pour tout $X_1,\ldots X_n \in \mathfrak{g}$ et tout $u \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

● Soit $f \in \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}^*)$; puisque $\mathfrak{g}$ est engendrée par ses éléments nilpotents, la condition i) équivaut à:

i') $f(\mathrm{ad}_X X_1,\ldots,X_n) + \ldots + f(X_1,\ldots,\mathrm{ad}_X X_n) = 0$

pour tout $X_1,\ldots X_n \in \mathfrak{g}$ et tout élément nilpotent X de $\mathfrak{g}$ tandis que, d'après la définition du groupe $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, la condition ii) équivaut à:

ii') $f(\exp(\mathrm{ad}_X)(X_1),\ldots,\exp(\mathrm{ad}_X)(X_n)) = f(X_1,\ldots,X_n)$

pour tout $X_1,\ldots X_n \in \mathfrak{g}$ et tout élément nilpotent X de $\mathfrak{g}$.

Pour tout $t \in \mathbb{C}$ on a alors:

$$f(\exp(\mathrm{ad}_{tX})(X_1),\ldots,\exp(\mathrm{ad}_{tX})(X_n)) - f(X_1,\ldots,X_n)$$
$$= f(\exp(t\mathrm{ad}_X)(X_1),\ldots,\exp(t\mathrm{ad}_X)(X_n)) - f(X_1,\ldots,X_n)$$
$$= t(f(\mathrm{ad}_X X_1,\ldots,X_n) + \ldots + f(X_1,\ldots,\mathrm{ad}_X X_n)) + o(t).$$

D'autre part on a:

$$f(\exp(\mathrm{ad}_X)(X_1),\ldots,\exp(\mathrm{ad}_X)(X_n)) = \exp(\mathrm{ad}_X^*)f(X_1,\ldots X_n)$$

puisque, $\mathrm{ad}_X^{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}$ étant localement nilpotent sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, $\exp(\mathrm{ad}_X^{\mathcal{S}(\mathfrak{g})})$ est l'unique automorphisme de l'algèbre $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ prolongeant l'automorphisme $\exp(\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{g}})$ de $\mathfrak{g}$. L'équivalence des conditions i') et ii') en résulte. ●

L'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ (resp $\mathcal{S}(\mathfrak{h}^*)$) s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales de $\mathfrak{g}$ (resp $\mathfrak{h}$) dans $\mathbb{C}$.

proposition 2.2

L'homomorphisme de restriction:

$$i : \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h}^*)$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h}^*)^W$

● Soient $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ et $w \in W$; il existe $u \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $u|\mathfrak{h} = w$; comme $f\circ u = f$ on a que $i(f)\circ w = i(f)$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ tel que $i(f) = 0$; comme $f\circ u = f$ pour tout $u \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ on voit que f s'annule sur toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, donc sur l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ qui est dense dans $\mathfrak{g}$ pour la topologie de Zariski donc $f = 0$.

Ainsi on a un homomorphisme injectif:

$$i : \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h}^*)^{W}$$

Pour la surjectivité de i, il suffit de montrer que:

a) $X \longrightarrow tr(\rho(X)^n)$ appartient à $\mathcal{S}^n(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ pour toute représentation de rang finie ρ de $\mathfrak{g}$.

b) les fonctions $H \longrightarrow tr(\rho(H)^n)$, pour ρ représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ engendrent $\mathcal{S}^n(\mathfrak{h}^*)^W$

a) Posons $g(X_1,..,X_n) = tr(\rho(X_1)...\rho(X_n))$ de sorte que:

$$-(ad^*_X g)(X_1,...,X_n)$$
$$= \sum_i tr(\rho(X_1)...(ad_{\rho(X)}\rho(X_i))...\rho(X_n))$$
$$= tr(\rho(X_1)...\rho(X)\rho(X_i)...\rho(X_n)) - tr(\rho(X_1)...\rho(X_i)\rho(X)...\rho(X_n))$$
$$= 0$$

On a donc $ad^*_X g = 0$ et $g(X,...,X) = tr(\rho(X)^n)$.

b) Les fonctions λ^n sur $\mathfrak{h}$, avec $\lambda \in P$ engendrent l'espace vectoriel $\mathcal{S}^n(\mathfrak{h}^*)$.

Pour tout $f \in \mathcal{S}^n(\mathfrak{h}^*)$ soit $f^\# = \sum_{v\in W} f\circ w$. Puisque toute orbite de W dans P rencontre $P \cap \bar{C}$ il en résulte que les fonctions $(\Lambda^n)^\#$ avec $\Lambda \in P \cap \bar{C}$ engendrent $\mathcal{S}^n(\mathfrak{h}^*)^W$.

Soient $\Lambda \in P \cap \bar{C}$ et E_Λ l'ensemble des $\lambda \in P \cap \bar{C}$ tels que $\lambda<\Lambda$; si ρ_Λ est la représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$ de plus grand poids Λ, la fonction $H \longrightarrow g(H) = tr(\rho_\Lambda(H)^n)$ est combinaison linéaire à coefficients non nuls des $(\lambda^n)^\#$ pour les poids λ de ρ_Λ qui appartiennent à $P \cap \bar{C}$ de sorte que $(\Lambda^n)^\#$ est combinaison linéaire de g et des $(\lambda^n)^\#$ pour $\lambda \in E_\Lambda$. On conclut alors par récurrence sur $Card(E_\Lambda)$ que les $(\Lambda^n)^\#$ avec $\Lambda \in P \cap \bar{C}$ sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $H \longrightarrow tr(\rho(H)^n)$. ●

<u>proposition</u> <u>2.3</u>

Soit J l'idéal de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{n}_+ \cup \mathfrak{n}_-$, on a:

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \oplus J$$

et la projection

$$j : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h})$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h})^W$

● On a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{j} & \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*) & \xrightarrow{i} & \mathcal{S}(\mathfrak{h}^*) \end{array}$$

où:

$$\alpha : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$$

est l'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules induit par la forme de Killing K tandis que

$$\beta : \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h}^*)$$

est l'isomorphisme de W-modules induit par la restriction de K à $\mathfrak{h}$.

Soit $X \in \mathfrak{g}$; pour tout $H \in \mathfrak{h}$ on a:

$$\begin{aligned} i(\alpha(X))(H) &= \alpha(X)(H) \\ &= K(X,H) \\ &= K(j(X),H) \text{ puisque } \mathfrak{h} \text{ est orthogonal à } \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_- \\ &= \beta(j(X))(H) \end{aligned}$$

On a donc:

$(i \circ \alpha)(X) = (\beta \circ j)(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, mais $i \circ \alpha$ et $\beta \circ j$ sont des homorphismes d'algèbres d'où $i \circ \alpha = \beta \circ j$. ●

3. L'isomorphisme d'Harish-Chandra.

On désigne par Π un système simple de racines de $\mathfrak{g}$, d'où des sous-algèbres $\mathfrak{n}_+$ et $\mathfrak{n}_-$ de $\mathfrak{g}$.

<u>proposition 3.1</u>

i) On a la décomposition:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{n}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+)$$

ii) $\mathfrak{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ} = \mathfrak{n}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ}$

iii) $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ} = \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{I}$

● i) $(Z(\nu,\sigma,\mu))_{\mu\neq 0}$ est une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$ et $(Z(\nu,\sigma,\mu))_{\nu\neq 0}$ est une base de $\mathfrak{n}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

ii) $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ contenant $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ et:

$$Z(\nu,\sigma,\mu) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ} \Leftrightarrow \sum \nu_k\gamma_k = \sum \mu_k\gamma_k$$

Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ}$ engendré par les $Z(\nu,\sigma,\mu)$ avec $\sum \nu_k\gamma_k = \sum \mu_k\gamma_k$ et $\sum \nu_k + \sum \mu_k \neq 0$ est un supplémentaire de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ}$ et l'on a:

$$\mathfrak{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+ \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ} = \mathfrak{n}_-\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\circ}. \bullet$$

La projection canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{o}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$:

$$\mathcal{H} : \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{o} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h})$$

est un homomorphisme d'algèbres.

On peut identifier $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ à l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{h}^*$, de sorte que pour tout $\mathfrak{g}$-module diagonalisable V on a:

$$s_V v = s(\lambda) v$$

tout $v \in V_\lambda$ et $\lambda \in P(V)$.

<u>proposition 3.2</u>

Soit V un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module de plus grand poids $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$;

i) il existe un unique homomorphisme d'algèbres:

$$\chi_V : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

tel que $z_V v = \chi_V(z) v$ pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ et tout $v \in V$.
(χ_V est le caractère central de V)

ii) Pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ on a:

$$\chi_V(z) = \mathcal{H}(z)(\Lambda).$$

● Soit $v \in V_\Lambda$; on a:

$$z = \mathcal{H}(z) + \sum u_k Z_{\gamma_k}$$

de sorte que:

$$z_V v = \mathcal{H}(z)_V v = \mathcal{H}(z)(\Lambda) v. \bullet$$

On considère l'automorphisme c de $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ tel que $c(X) = X - \rho(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

<u>proposition 3.3</u>

L'application

$$c \circ \mathcal{H} : \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{o} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h})$$

induit un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h})^{W}$ indépendant du système simple Π.

● ▶ Montrons que, pour tout Λ tel que $\Lambda+\rho \in P \cap \bar{C}$ et pour tout $w \in W$, $M(w(\Lambda+\rho)-\rho)$ est isomorphe à un sous-module de $M(\Lambda)$. Supposons d'abord $w = r_i$ et posons $v = Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda$; on a $v \neq 0$ puisque $M(\Lambda)$ est un $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$-module libre de base v_Λ et on a $v \in M(\Lambda)_{\Lambda-(\Lambda(H_i)+1)\alpha_i}$. Mais on a $r_i(\Lambda+\rho) = \Lambda+\rho-(\Lambda(H_i)+1)\alpha_i$ de sorte que $v \in M(\Lambda)_{r_i(\Lambda+\rho)-\rho}$. Pour $j \neq i$, on a $[X_j, Y_i] = 0$ et

$X_j v_\Lambda = 0$, d'où $X_j v = 0$ tandis que pour $j = i$ on a:

$$\begin{aligned} X_i v &= X_i(Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda) \\ &= Y_i^{\Lambda(H_i)+1} X_i v_\Lambda - (\Lambda(H_i)+1) Y_i^{\Lambda(H_i)} (H_i - \Lambda(H_i)) v_\Lambda = 0 \end{aligned}$$

(on peut supposer $\Lambda(H_i) \geq 0$ puisque le cas $\Lambda(H_i) = -1$ est immédiat). Alors on en conclut que le sous-module de $M(\Lambda)$ engendré par v est isomorphe à $M(r_i(\Lambda+\rho)-\rho))$.

On procède alors par récurrence sur $\ell(w)$: on a $w = r_i w'$ avec $\ell(w') < \ell(w)$ et $w'^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_+$ de sorte que:

$$w'(\Lambda+\rho)(H_i) = (\Lambda+\rho)(H_{w'^{-1}(\alpha_i)}) \geq 0$$

et $M(r_i w'(\Lambda+\rho)-\rho) = M(w(\Lambda+\rho)-\rho)$ est isomorphe à un sous-module de $M(w'(\Lambda+\rho)-\rho)$ tandis que, par hypothèse de récurrence $M(w'(\Lambda+\rho)-\rho)$ est isomorphe à un sous-module de $M(\Lambda)$.

1) Pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ on a:

$$c \circ \mathcal{H}(z) \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})^W$$

▶ Pour tout $\lambda \in P \cap \bar{C}$ et tout $w \in W$, $M(w(\lambda)-\rho)$ est isomorphe à un sous-$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module de $M(\lambda-\rho)$ de sorte que:

$$\mathcal{H}(z)(w(\lambda)-\rho) = \mathcal{H}(z)(\lambda-\rho)$$

pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ (puisque $\chi_V(z) = \mathcal{H}(z)(\Lambda)$ lorsque V est à plus haut poids Λ). On a donc:

$$c \circ \mathcal{H}(z)(w(\lambda)) = c \circ \mathcal{H}(z)(\lambda)$$

Mais $P \cap \bar{C}$ est dense dans $\mathfrak{h}^*$ pour la topologie de Zariski de sorte que:

$$c \circ \mathcal{H}(z) \circ w = c \circ \mathcal{H}(z)$$

pour tout $w \in W$. On a donc $c \circ \mathcal{H}(z) \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})^W$. ▶

2) L'homomorphisme d'algèbres:

$$c \circ \mathcal{H} : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{h})^W$$

est indépendant du choix d'un système simple de racines Π

▶ Soit V un $\mathfrak{g}$-module à plus grand poids $\Lambda \in P \cap \bar{C}$ relativement au système simple Π; si Π' est un autre système simple, on a $\Pi' = w(\Pi)$ avec $w \in W$ est le plus grand poids de V relativement à Π' est $w(\Lambda)$ de sorte que l'on a, pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$:

$$\chi_V(z) = \mathcal{H}(z)(\Lambda) = \mathcal{H}'(z)(w(\Lambda))$$

d'où, pour tout $\lambda \in P \cap \bar{C} + \rho$, puisque $\rho' = w(\rho)$:

$$\begin{aligned} c' \circ \mathcal{H}'(z)(\lambda) &= c' \circ \mathcal{H}'(z)(w(\lambda)) \\ &= \mathcal{H}'(z)(w(\lambda)-\rho') \end{aligned}$$

$$= \mathcal{X}'(z)(w(\lambda-\rho))$$
$$= \mathcal{X}(z)(\lambda-\rho)$$
$$= c\circ\mathcal{X}(z)(\lambda) \;\blacktriangleright$$

3) L'application:

$$c \circ \mathcal{X} : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})^W$$

est un isomorphisme d'algèbres.

▶ La bijection canonique:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules et induit un isomorphisme d'algèbres:

$$\theta : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$$

On a le diagramme (non commutatif):

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "c\circ\mathcal{X}"] & \\ \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \arrow[rr, "i"'] & & \mathcal{S}(\mathfrak{h})^W \end{tikzcd}$$

Soit $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$; on a donc:

$$z = \sum_{|\nu|+|\sigma|+|\mu|\leq n} c_{\nu,\sigma,\mu} Z(\nu,\sigma,\mu)$$

de sorte que:

$$\theta(z) \equiv \sum_{|\nu|+|\sigma|+|\mu|=n} c_{\nu,\sigma,\mu} S(\nu,\sigma,\mu) \mod \mathcal{S}_{n-1}(\mathfrak{g})$$

d'où:

$$i(\theta(z)) \equiv \sum_{|\sigma|=n} c_{0,\sigma,0} S(0,\sigma,0) \mod \mathcal{S}_{n-1}(\mathfrak{g})$$
$$= \mathcal{X}(z)$$

Les filtrations canoniques sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ induisent des filtrations sur $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{h})^W$ et les isomorphismes θ et i sont compatibles avec ses filtrations donc induisent des isomorphismes:

$$\mathrm{Gr}(i \circ \theta) : \mathrm{Gr}(\mathcal{Z}(\mathfrak{g})) \longrightarrow \mathrm{Gr}(\mathcal{S}(\mathfrak{h}))^W$$

Or on a:

$$\mathrm{Gr}(i \circ \theta) = \mathrm{Gr}(\mathcal{X}) = \mathrm{Gr}(c\circ\mathcal{X})$$

donc $c\circ\mathcal{X}$ est un isomorphisme. ▶ ●

proposition 3.4

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit χ_λ le caractère central du module de Verma $M(\lambda)$;

i) L'application:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\mathbb{C}) \\ \lambda \longrightarrow \chi_\lambda \end{array}$$

est surjective

ii) on a, pour $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*$:

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \Leftrightarrow W(\lambda+\rho) = W(\mu+\rho)$$

● i) Puisque l'algèbre $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ est entière sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h})^W$ tout homomorphisme $\xi : \mathcal{S}(\mathfrak{h})^W \longrightarrow \mathbb{C}$ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\xi} : \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbb{C}$ de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\tilde{\xi}(s) = s(\lambda)$ pour tout $s \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$; soit $\chi \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}}(\mathcal{Z}(\mathfrak{g}),\mathbb{C})$, il existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que:

$$\begin{aligned} \chi(z) &= (c\circ\mathscr{H})(z)(\lambda) \\ &= \mathscr{H}(z)(\lambda-\rho) \\ &= \chi_{\lambda-\rho}(z) \end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

ii) Soient $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\chi_\lambda = \chi_\mu$; on a alors pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned} ((c\circ\mathscr{H})(z))(\lambda+\rho) &= (\mathscr{H}(z))(\lambda) \\ &= \chi_\lambda(z) \\ &= \chi_\mu(z) \qquad\qquad = (\mathscr{H}(z))(\mu) \\ &= ((c\circ\mathscr{H})(z))(\mu+\rho) \end{aligned}$$

Il en résulte que les homomorphismes $\xi_{\lambda+\rho} : s \longrightarrow s(\lambda+\rho)$ et $\xi_{\mu+\rho} : s \longrightarrow s(\mu+\rho)$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{C}$ coïncident sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^W$ d'où le résultat. ●

Posons, pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $D'(\Lambda) = D(\Lambda) \cap (W(\Lambda+\rho)-\rho)$.

proposition 3.5

Soit V un $\mathfrak{g}$-module à plus grand poids $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$;

i) tout sous-quotient simple de V est de la forme $L(\lambda)$ avec $\lambda \in D'(\Lambda)$.

ii) V est de longueur finie.

● i) Soient N et N' des sous-$\mathfrak{g}$-modules de V tels que $N' \subset N$ avec N/N' simple;on a la décomposition en somme directe:

$$N/N' = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} N_\lambda/N'_\lambda$$

de sorte que $P(N/N') \subset P(V)$ et par suite $P(N/N')$ possède un élément maximal $\lambda \leq \Lambda$ de sorte que tout $\bar{v} \in (N/N')_{\lambda}\setminus\{0\}$ est primitif; ainsi N/N' est isomorphe à $L(\lambda)$ et l'on a $\chi_{\lambda} = \chi_{\Lambda}$.
ii) L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est noethérienne. Comme le $\mathfrak{g}$-module V est de type fini, il est noethérien donc tout sous-module N de V contient un sous-module N' tel que le quotient N/N' soit simple.

Si V n'était pas de longueur finie il existerait donc une suite infinie décroissante $(N_i)_i$ de sous-modules de V telle chaque sous-quotient N_i/N_{i+1} soit simple de sorte qu'une infinité de ces quotients seraient isomorphes entre eux ce qui contredirait le fait que tous les poids de V sont de multiplicité finie. ●

CHAPITRE IX

LA FORMULE DES CARACTERES DE WEYL

1. Le groupe de Grothendieck des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie.

On désigne par $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ le groupe abélien des applications f de $\mathfrak{h}^*$ dans $\mathbb{Z}$ dont le support est contenu dans une réunion finie de parties de $\mathfrak{h}^*$ de la forme $D(\Lambda) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* / \lambda \leq \Lambda\}$. Pour $f, g \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$, on pose:

$$(fg)(\lambda) = \sum_{\mu\in\mathfrak{h}^*} f(\mu)g(\lambda-\mu)$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ de sorte que $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ est muni d'une structure d'anneau commutatif et unitaire.

Pour chaque $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note e^λ l'application $\mu \longrightarrow \delta_{\lambda,\mu}$; c'est un élément de $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ (on notera symboliquement $\sum f(\lambda)e^\lambda$ l'élément f de $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$). On a $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ pour $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ de sorte que le sous-groupe de $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ engendré par les e^λ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (resp pour $\lambda \in P$) est un sous-anneau $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ isomorphe à $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ (resp à $\mathbb{Z}[P]$).

<u>Proposition 1.1</u>

Soit ρ la demi-somme des racines positives; on a:

$$\mathfrak{D} = e^\rho \prod_{\alpha\in\Phi_+} (1 - e^{-\alpha}) \in \mathbb{Z}[P]$$

De plus $\mathfrak{D}$ est inversible dans $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ et l'on a:

$$\mathfrak{D}^{-1} = e^{-\rho}\Big(\sum_{\gamma\in Q} \mathcal{P}(\gamma)e^{-\gamma}\Big).$$

(où, pour $\gamma \in \mathfrak{h}^*$, $\mathcal{P}(\gamma)$ est le nombre de familles $\nu = (\nu_k)_{1\leq k\leq s} \in \mathbb{N}^s$ telles que $\gamma = \sum_k \nu_k\gamma_k$ avec $\Phi_+ = \{\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_s\}$).

● Pour $1\leq i\leq l$, $r_i(\rho) = \rho - \alpha_i$ de sorte que:

$$r_i(\rho)(H_i) = \rho(r_i(H_i)) = -\rho(H_i)$$
$$= \rho(H_i) - \alpha_i(H_i) = \rho(H_i) - 2$$

d'où $\rho(H_i) = 1$. D'autre part, on a, dans $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$:

$$\sum_{\gamma\in Q} \mathcal{P}(\gamma)e^{-\gamma} = \prod_{\alpha\in\Phi_+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots\ldots.)$$

$$= (\prod_{\alpha\in\Phi_+} (1 - e^{-\alpha}))^{-1}. \bullet$$

Un $\mathfrak{g}$-module V <u>possède un caractère</u> s'il vérifie les conditions:

i) V est diagonalisable

ii) V_λ est de dimension finie pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

iii) P(V) est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ensembles de la forme $D(\Lambda)$ avec $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Le caractère de V est alors défini par:

$$ch(V) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \dim(V_\lambda)e^\lambda \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$$

<u>Proposition 1.2</u>

Soit $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$, le module de Verma $M(\Lambda)$ possède un caractère et l'on a:

$$ch(M(\Lambda) = \frac{e^{\Lambda+\rho}}{\mathcal{D}}$$

● Posons $\Phi_+ = \{\gamma_1,\ldots\ldots,\gamma_s\}$; pour chaque k, $1 \le k \le s$, soit $Z_{-\gamma_k}$ un élément non nul de $\mathfrak{g}_{-\gamma_k}$ de sorte, pour tout $\lambda \le \Lambda$, les vecteurs:

$$Z_-(\nu)v_\Lambda = Z_{-\gamma_1}^{\nu_1}\ldots\ldots Z_{-\gamma_s}^{\nu_s}v_\Lambda$$

tels que $\sum_{1\le k\le s} \nu_k\gamma_k = \Lambda - \lambda$ forment une base de $M(\Lambda)_\lambda$. On a donc:

$$ch(M(\Lambda)) = \sum_{\lambda\le\Lambda} \mathcal{P}(\Lambda - \lambda)e^\lambda = e^\Lambda(\sum_{\gamma\in Q} \mathcal{P}(\gamma)e^{-\gamma}). \bullet$$

Le groupe de Weyl W opère sur l'anneau $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ en posant $w.e^\lambda = e^{w(\lambda)}$ pour $w \in W$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Les sous-anneaux $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ et $\mathbb{Z}[P]$ sont stables pour cette action.

Proposition 1.3

i) On a, pour tout $w \in W$:

$$w.\mathfrak{D} = \varepsilon(w)\mathfrak{D}$$

(où on pose $\varepsilon(w) = \det(w)$).

ii) $(S(e^{\Lambda}))_{\Lambda \in P \cap \bar{C}}$ est une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[P]^{W}$ (avec $S(e^{\lambda}) = \sum_{v \in W} e^{v(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in P$)

● i) Il suffit de vérifier cette relation pour $w = r_i$, $1 \leq i \leq l$. On a:

$$r_i.\mathfrak{D} = r_i.(e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Phi_+} (1 - e^{-\alpha}))$$

$$= e^{\rho - \alpha_i}(1 - e^{\alpha_i}) \prod_{\alpha \in \Phi_+ \setminus \langle \alpha_i \rangle} (1 - e^{-r_i(\alpha)})$$

$$= \varepsilon(r_i)\mathfrak{D}$$

puisque $\Phi_+ \setminus \{\alpha_i\}$ est stable par r_i et que $\varepsilon(r_i) = -1$.

ii) Si $f = \sum_{\lambda \in P} n_{\lambda} e^{\lambda} \in \mathbb{Z}[P]^{W}$, on a $n_{v(\lambda)} = n_{\lambda}$ pour tout $\lambda \in P$ et tout $w \in W$; de plus toute orbite de W dans P rencontre $P \cap \bar{C}$ en un unique point de sorte que $f = \sum_{\Lambda \in P \cap \bar{C}} n_{\Lambda} S(e^{\Lambda})$. ●

Désignons par $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie; le produit tensoriel défini par $X(u \otimes v) = (Xu) \otimes v + u \otimes (Xv)$ pour $X \in \mathfrak{g}$, $u \in V$ et $v \in W$ induit sur $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ une structure d'anneau commutatif (et unitaire).

Proposition 1.4

i) L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[P]^{W} \\ [V] & \longrightarrow & \mathrm{ch}(V) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

ii) L'homorphisme d'anneaux

$$\phi : \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_l] \longrightarrow \mathcal{R}(\mathfrak{g})$$

tel que $\phi(T_i) = [L(\Lambda_i)]$ pour $1 \leq i \leq l$ est un isomorphisme.

● Si V est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie on a $\mathrm{ch}(V) \in \mathbb{Z}[P]$. Puisque l'on a $\dim(V_{w(\lambda)}) = \dim(V_{\lambda})$ pour tout $\lambda \in P$ et tout $w \in W$

on a:

$$w(ch(V)) = \sum \dim(V_\lambda)e^{w(\lambda)} = \sum \dim(V_{w^{-1}(\lambda)})e^\lambda = ch(V).$$

Considérons deux modules V et V' de dimension finie tels que:

$$ch(V) = ch(V')$$

et montrons par récurrence sur $\dim(V) = \dim(V')$ que V et V' sont isomorphes. On peut naturellement supposer que V et V' sont non nuls. Soient λ un élément maximal de $P(V) = P(V')$ et v (resp v') un vecteur non nul de V_λ (resp V'_λ); $W_1 = \mathcal{U}(g)v$ (resp $W'_1 = \mathcal{U}(g)v'$) est un sous-module de V (resp de V') à plus grand poids λ. Comme W_1 et W'_1 sont des g-modules indécomposables et semi-simples, ils sont donc simples et isomorphes (à $L(\lambda)$) donc $ch(W_1) = ch(W'_1)$. Or on a $V = W_1 \oplus W_2$ (resp $V = W_2 \oplus W'_2$) de sorte que l'on a $ch(W_2) = ch(W'_2)$; mais W_2 et W'_2 sont isomorphes d'après l'hypothèse de récurrence donc, finalement, V et V' sont isomorphes.

Ainsi l'application $[V] \longrightarrow ch(V)$ est un homomorphisme injectif d'anneaux de $\mathcal{R}(g)$ dans $\mathbb{Z}[P]^W$.

Montrons que $(ch(L(\Lambda)))_{\Lambda\in P\cap\bar{C}}$ est une base de $\mathbb{Z}[P]^W$. On sait que $(S(e^\Lambda))_{\Lambda\in P\cap\bar{C}}$ est une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[P]^W$ et que l'on a:

$$ch(L(\Lambda)) = S(e^\Lambda) + \sum_{\lambda<\Lambda,\, \lambda\in P\cap\bar{C}} n_\lambda S(e^\lambda)$$

pour tout $\Lambda \in P \cap \bar{C}$ (ie $S(e^\Lambda)$ est le plus grand terme de $ch(L(\Lambda))$. De plus, toute partie non vide de $P \cap \bar{C}$ contient un élément minimal (en effet l'ensemble des $\lambda \in P \cap \bar{C}$ tels que $\lambda \leq \Lambda$ est fini pour tout $\Lambda \in P \cap \bar{C}$: cet ensemble est discret et borné puisque l'on a $(\Lambda-\lambda|\lambda) \geq 0$ et $(\Lambda-\lambda|\Lambda) \geq 0$ d'où $\|\lambda\|^2 \leq (\Lambda|\lambda) \leq \|\Lambda\|^2$).

Pour toute partie E de $P \cap \bar{C}$, soit I_E le sous-$\mathbb{Z}$-module de $I = \mathbb{Z}[P]^W$ de base $(S(e^\Lambda))_{\Lambda\in E}$; l'ensemble des parties E de $P \cap \bar{C}$ telles que:

i) $\Lambda \in E$ et $\lambda \in D(\Lambda) \cap P \cap \bar{C} \Rightarrow \lambda \in E$

ii) $(ch(L(\Lambda)))_{\Lambda\in E}$ est une base de I_E

est inductif et possède donc un élément maximal E. Supposons que $E \neq P \cap \bar{C}$ et soit λ un élément minimal de $P \cap \bar{C} \setminus E$. Alors $E \cup \{\lambda\}$ est une partie de $P \cap \bar{C}$ vérifiant i) et ii) ce qui contredit la maximalité de E.

Ainsi $(ch(L(\Lambda)))_{\Lambda\in P\cap\bar{C}}$ est une base de $\mathbb{Z}[P]^W$; d'autre part $([L(\Lambda])_{\Lambda\in P\cap\bar{C}}$ est un système générateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{R}(g)$ (d'après le théorème de semi-simplicité de Weyl puisque l'application $\Lambda \longrightarrow [L(\Lambda)]$ est une bijection de $P \cap \bar{C}$ sur l'ensemble des classes à isomorphisme près de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie). Il en résulte que $([L(\Lambda)])_{\Lambda\in P\cap\bar{C}}$ est une base de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ et que $[V] \longrightarrow ch(V)$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ sur $\mathbb{Z}[P]^W$.

Puisque, pour tout i, $1\leq i\leq l$, $S(e^{\Lambda_i})$ est le plus grand terme de $ch(L(\Lambda_i))$, on voit que, pour toute famille $(n_i)_{1\leq i\leq l} \in \mathbb{N}^l$, e^{Λ} est le plus grand terme de $ch(\phi(T_1^{n_1}\dots T_n^{n_l}))$, avec $\Lambda = \sum_i n_i\Lambda_i \in P \cap \bar{C}$. On conclut comme précédemment que $(ch(\phi(T_1^{n_1}\dots T_n^{n_l})))_{(n_i)_{1\leq i\leq l}\in\mathbb{N}^l}$ est une base de $\mathbb{Z}[P]^W$ donc que ϕ est un isomorphisme. ●

2. La formule des caractères de Weyl.

<u>Proposition</u> <u>2.1</u> (formule des caractères de Weyl)

Soit $\Lambda \in P \cap \bar{C}$; on a:

$$ch(L(\Lambda)) = \frac{\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w(\Lambda+\rho)}}{\mathcal{D}}$$

● Pour $\Lambda \in P \cap \bar{C}$, l'application:

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow D'(\Lambda) \\ w &\longrightarrow w(\Lambda+\rho)-\rho \end{aligned}$$

est bijective, où $D'(\Lambda) = D(\Lambda) \cap (W(\Lambda+\rho)-\rho)$. L'application est surjective et si $w(\Lambda+\rho) = \Lambda+\rho$, puisque $\Lambda+\rho \in C$ et que W opère simplement dans l'ensemble des chambres de Weyl on a $w = 1$.

Pour tout $\lambda \in D'(\Lambda)$, le module de Verma $M(\lambda)$ est de longueur finie et les sous-quotients simples de $M(\lambda)$ sont de la forme $L(\mu)$ avec $\mu \in D'(\lambda)$ de sorte que l'on a:

$$ch(M(\lambda)) = \sum_{\mu\in D'(\lambda)} n_\mu ch(L(\mu))$$

avec $n_\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \in D'(\Lambda)$ et $n_\lambda = 1$. Il en résulte que:

$$ch(L(\Lambda)) = \sum_{\lambda\in D'(\Lambda)} k_\lambda ch(M(\lambda))$$

avec $k_\lambda \in \mathbb{Z}$ et $k_\Lambda = 1$.
En multipliant cette égalité par $\mathfrak{D}$ on obtient:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\,ch(L(\Lambda)) &= \sum_{\lambda\in D'(\Lambda)} k_\lambda\ \mathfrak{D}\,ch(M(\lambda))\\ &= \sum_{\lambda\in D'(\Lambda)} k_\lambda\ e^{\lambda+\rho}\\ &= \sum_{w\in W} k_w e^{w(\Lambda+\rho)}\end{aligned}$$

avec $k_w \in \mathbb{Z}$ pour tout $w \in W$. Or on a pour tout $w' \in W$:

$$w(\mathfrak{D}) = \varepsilon(w')\mathfrak{D}$$

$$w'(ch(L(\Lambda))) = ch(L(\Lambda))$$

d'où:

$$k_{w'w} = \varepsilon(w')k_w \text{ pour tout } w,w' \in W.$$

On a donc:

$$\mathfrak{D}\,ch(L(\Lambda)) = k\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w(\Lambda+\rho)}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et comme le coefficient de $e^{\Lambda+\rho}$ dans $\mathfrak{D}\,ch(L(\Lambda))$ est égal à 1 on a finalement $k = 1$. ●

<u>corollaire 1</u> (formule du dénominateur de Weyl).

On a:

$$\mathfrak{D} = \sum_{w\in W}\varepsilon(\rho)e^{w(\rho)}$$

● C'est le cas particulier $\Lambda = 0$ de la formule des caractères. ●

<u>corollaire 2</u>

Pour tout $\Lambda \in P \cap \bar{C}$, on a:

$$\dim(L(\Lambda)) = \prod_{\alpha\in\Phi_+}\frac{(\Lambda+\rho|\alpha)}{(\rho|\alpha)}$$

● Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ posons:

$$J(e^\lambda) = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w(\lambda)} \in \mathbb{Z}[T]$$

et pour tout $\mu \in P$ soit:

$$f_\mu : \mathbb{Z}[P] \longrightarrow \mathbb{R}[[T]]$$

l'unique homomorphisme d'anneaux tel que

$$f_\mu(e^\lambda) = \exp((\lambda|\mu)T)$$

On a alors:

$$f_\mu(J(e^\lambda)) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\exp(w(\lambda)|\mu) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\exp(\lambda|w^{-1}(\mu)) = f_\lambda(J(e^\mu))$$

Il en résulte que:

$$f_\rho(J(e^\lambda)) = f_\lambda(\mathfrak{D}) = (\exp(\lambda|\rho)T) \prod_{\alpha\in\Phi_+} (1 - \exp(-(\lambda|\alpha)T)$$

$$= T^N \prod_{\alpha\in\Phi_+} (\lambda|\alpha) + T^{N+1}h$$

avec $N = \mathrm{Card}(\Phi_+)$ et $h \in \mathbb{R}[[T]]$.

Il résulte de la formule des caractères de Weyl que:

$$\prod_{\alpha\in\Phi_+} (\Lambda+\rho|\alpha) = f_\rho(\mathrm{ch}(L(\Lambda)) \prod_{\alpha\in\Phi_+} (\lambda|\alpha) + Th(T)$$

et $\dim(L(\Lambda))$ est le terme constant de la série $f_\rho(\mathrm{ch}(L(\Lambda))$. ●

CHAPITRE X

GROUPE ASSOCIE A UNE ALGEBRE DE LIE SEMI-SIMPLE

1. Groupe associé à une algèbre de Lie semi-simple complexe.

Considérons une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan et Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

<u>Proposition 1.1</u>

1) Il existe un groupe G et une application:

$$\exp : \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

uniques à un isomorphisme près, tels que:

i) $\exp(\bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g})$ engendre G

ii) pour toute représentation $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension finie V, il existe un représentation (nécessairement unique) $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ de G dans V telle que:

$$\rho(\exp(X)) = \exp(\rho'(X))$$

pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$.

iii) si $g \in G$ est tel que $\rho(g) = id_V$ pour toute représentation $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}'$ dans un espace vectoriel de dimension finie V on a $g = e$.

2) Soient ρ'_1 et ρ'_2 deux représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$, ρ_1 et ρ_2 les représentations associées de G; alors $\rho_1 \oplus \rho_2$ (resp $\rho_1 \otimes \rho_2$) est la représentation associée à $\rho'_1 \oplus \rho'_2$ (resp $\rho'_1 \otimes \rho'_2$).

3) Soit Π un système simple de racines; la représentation:

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

associée à la somme directe des représentations fondamentales:

$$\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

est fidèle.

● Soit $\Gamma^*(\mathfrak{g})$ la somme (dans la catégorie des groupes) de la famille des groupes additifs $(\mathfrak{g}_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ et pour tout $\alpha \in \Phi$, soit

$$j_\alpha : \mathfrak{g}_\alpha \longrightarrow \Gamma^*(\mathfrak{g})$$

le morphisme canonique; toute représentation de $\mathfrak{g}$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie:

$$\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

définit un homomorphisme

$$\rho^* : \Gamma^*(\mathfrak{g}) \longrightarrow GL(V)$$

tel que $\rho^* \circ j_\alpha(X) = \exp(\rho'(X))$ pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Soit $N^*(\mathfrak{g})$ l'intersection des noyaux de ces homomorphismes; alors $G = \Gamma^*(\mathfrak{g})/ N^*(\mathfrak{g})$ et si $p : \Gamma^*(\mathfrak{g}) \longrightarrow G$ est l'homomorphisme canonique on pose, pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$:

$$\exp(X) = p \circ j_\alpha(X).$$

Soient Π un système simple de racines, $(\Lambda_i)_{1\le i\le l}$ la famille de poids fondamentaux relativement à Π, $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ la somme directe des représentations irréductibles de plus grand poids Λ_i, $\rho'_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(L(\Lambda_i))$ et $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ la représentation associée à ρ'; si $\rho(g) = e$ avec $g \in G$ on a $\rho_i(g) = e$ pour $1\le i\le l$ et comme toute représentation de dimension finie est une somme directe de produits tensoriels des représentations ρ_i, $1\le i\le l$ on a $g = e$.

Ainsi ρ induit un isomorphisme de G sur le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les $\exp(\rho'(X)) = \rho(\exp(X))$, $X \in \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}$ d'où l'unicité de G à un isomorphisme près. ●

<u>Proposition</u> <u>1.2</u>

Soient G le groupe associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ la représentation de G associée à la représentation adjointe $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$;

i) pour toute représentation $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension finie V, on a, pour tout $g \in G$ et tout $X \in \mathfrak{g}$:

$$\rho'(Ad(g)X) = \rho(g)\rho'(X)\rho(g)^{-1}$$

ii) Pour tout $g \in G$, $Ad(g)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

iii) Le noyau de Ad est égal au centre $\mathcal{Z}(G)$ du groupe G.

● Notons que si S et T sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie avec S nilpotent, alors $ad_S = L_S - R_S$ est nilpotent et l'on a (en appliquant la formule du binôme):

$$\exp(ad_S)T = \exp(S)T\exp(-S)$$

de sorte que pour $X \in \mathfrak{g}$ et $Z \in \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}$ on a:

$$\begin{aligned}\rho'(Ad(\exp(Z))X) &= \rho'(\exp(ad_Z)X)\\ &= \exp(ad_{\rho'(Z)}\rho'(X))\\ &= \exp(\rho'(Z))\rho'(X)\exp(\rho'(Z))^{-1}\\ &= \rho(\exp(Z))\rho'(X)\rho(\exp(Z))^{-1}\end{aligned}$$

d'où le résultat puisque G est engendré par $\exp(\bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha)$.

Pour $X,Y \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$ on a:

$$\begin{aligned}\rho'(Ad(g)[X,Y]) &= \rho(g)\rho'([X,Y])\rho(g)^{-1}\\ &= [\rho(g)\rho'(X)\rho(g)^{-1},\rho(g)\rho'(Y)\rho(g)^{-1}]\\ &= [\rho'(Ad(g)X),\rho'(Ad(g)Y)]\\ &= \rho'(Ad(g)X,Ad(g)Y]\end{aligned}$$

pour toute représentation $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Enfin, pour $g \in Ker(Ad)$ on a pour tout $X \in \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ et toute représentation ρ':

$$\rho(g)\rho'(X) = \rho'(X)\rho(g)$$

de sorte que:

$$\rho(g)\exp(\rho'(X)) = \exp(\rho'(X))\rho(g)$$

d'où:

$$\rho(g\exp(X)) = \rho(\exp(X)g)$$

ie $g \in \mathcal{Z}(G)$.

Réciproquement si $g \in C(G)$, on a:

$$\begin{aligned}\exp(\rho'(X)) &= \rho(g)\exp(\rho'(X))\rho(g)^{-1}\\ &= \exp(\rho(g)\rho'(X)\rho(g)^{-1})\\ &= \exp(\rho'(Ad(g)X))\end{aligned}$$

pour tout $X \in \bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ et toute représentation ρ'. Comme $\rho'(X)$ est nilpotent, il en est de même de $\rho'(Ad(g)X)$ de sorte que:

$$\rho'(X) = \rho'(Ad(g)X)$$

et finalement $g \in Ker(Ad)$. ●

<u>remarque</u>

Soient $g \in G$ et $\alpha \in \Phi$ tels qu'il existe $\beta \in \Phi$ vérifiant:

$$Ad(g)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\beta$$

alors on a, pour tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$:

$$\exp(Ad(g)X) = g\exp(X)g^{-1}$$

● Pour toute représentation $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension finie V, on a:

$$\rho(\exp(\mathrm{Ad}(g)X) = \exp(\rho'(\mathrm{Ad}(g)X))$$
$$= \rho(g)\exp(\rho'(X))\rho(g)^{-1}$$
$$= \rho(g\exp(X)g^{-1}) \bullet$$

2. Les sous-groupes SL(2,ℂ) associés aux racines.

Pour tout $\alpha \in \Phi$; on désigne par G_α le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{g}_\alpha \cup \mathfrak{g}_{-\alpha})$.

Proposition 2.1

i) Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha \backslash \{0\}$, il existe un unique homomorphisme de groupes:

$$\varphi_{\alpha,X} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G$$

tel que, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_{\alpha,X}(x(s)) = \exp(sX)$$
$$\varphi_{\alpha,X}(y(s)) = \exp(sY)$$

où Y l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[X,Y] = H_\alpha$;

ii) Pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ on a:

$$\varphi_{\alpha,tX}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varphi_{\alpha,X}\begin{pmatrix} a & tb \\ t^{-1}c & d \end{pmatrix}$$

pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$.

iii) Pour tout $\beta \in \Phi$, tout $X' \in \mathfrak{g}_\beta \backslash \{0\}$ et tout $g \in SL(2,\mathbb{C})$ on a $\mathrm{Ad}(q_{\alpha,X})(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{r_\alpha(\beta)}$ et:

$$\varphi_{r_\alpha(\beta),\mathrm{Ad}(q_{\alpha,X})(X')}(g) = q_{\alpha,X}\varphi_{\beta,X'}(g)q_{\alpha,X}^{-1}$$

où $q_{\alpha,X} = \exp(X)\exp(-Y)\exp(X)$.

iv) Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha \backslash \{0\}$

$$\varphi_{\alpha,X} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G$$

induit un isomorphisme de SL(2,ℂ) sur G_α.

De plus, l'homomorphisme (injectif):

$$\mathbb{C}^* \longrightarrow G$$
$$t \longrightarrow t^{H_\alpha} = \varphi_{\alpha,X}(h(t))$$

ne dépend pas du choix de l'élément $X \in \mathfrak{g}_\alpha \backslash \{0\}$ et l'on a, pour toute représentation de dimension finie:

$$\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

pour tout $v \in V_\lambda$ et tout $\lambda \in P(V)$:

$$\rho(t^{H_\alpha})v = t^{\lambda(H_\alpha)}v$$

v) Pour $\alpha,\beta \in \Phi$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha\backslash\{0\}$ et $X' \in \mathfrak{g}_\beta\backslash\{0\}$ on a:

$$t^{H_\alpha}\varphi_{\beta,X'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}(t^{H_\alpha})^{-1} = \varphi_{\beta,X'}\begin{pmatrix} a & t^{\beta(H_\alpha)}b \\ t^{-\beta(H_\alpha)}c & d\end{pmatrix}$$

pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$.

● i) On pose, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$x_{\alpha,X}(s) = \exp(sX)$$
$$y_{\alpha,X}(s) = \exp(sY)$$

et, pour $t \in \mathbb{C}^*$

$$q_{\alpha,X}(t) = x_{\alpha,X}(t)y_{\alpha,X}(-t^{-1})x_{\alpha,X}(t)$$
$$h_{\alpha,X}(t) = q_{\alpha,X}(t)q_{\alpha,X}(1)^{-1}$$

Alors les relations suivantes sont vérifiées:

$$x_{\alpha,X}(s+t) = x_{\alpha,X}(s)x_{\alpha,X}(t)$$
$$q_{\alpha,X}(t)x_{\alpha,X}(s)q_{\alpha,X}(t)^{-1} = y_{\alpha,X}(-st^{-2})$$
$$h_{\alpha,X}(st) = h_{\alpha,X}(s)h_{\alpha,X}(t)$$

Soit $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ la représentation de G associée; on a donc:

$$\rho(x_{\alpha,X}(s)) = \exp(s\rho'(X))$$
$$\rho(y_{\alpha,X}(s)) = \exp(s\rho'(Y))$$

Soit d'autre part $\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathbb{C}Y$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par X et Y; $\mathfrak{s}_\alpha$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ d'où une représentation:

$$\rho'_{\alpha,X} : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

qui a pour homomorphisme associé une représentation:

$$\rho_{\alpha,X} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(V)$$

telle que:

$$\rho_{\alpha,X}(x(s)) = \exp(s\rho'(X))$$
$$\rho_{\alpha,X}(y(s)) = \exp(s\rho'(Y))$$

et l'on a alors:

$$\rho_{\alpha,X}(q(t)) = \rho(q_{\alpha,X}(t))$$
$$\rho_{\alpha,X}(h(t)) = \rho(h_{\alpha,X}(t))$$

Par suite, grâce à la définition par générateurs et relations du groupe SL(2,$\mathbb{C}$) on en conclut qu'il existe un unique homomorphisme de groupes

$$\varphi_{\alpha,X} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G$$

tel que, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_{\alpha,X}(x(s)) = x_{\alpha,X}(s)$$
$$\varphi_{\alpha,X}(y(s)) = y_{\alpha,X}(s)$$

On a encore:

$$\varphi_{\alpha,X}(q(t)) = q_{\alpha,X}(t)$$
$$\varphi_{\alpha,X}(h(t)) = h_{\alpha,X}(t)$$

ii) Puisque les deux membres sont des homomorphismes de SL(2,$\mathbb{C}$) dans G il suffit de montrer l'égalité pour $g = x(s)$ ou $y(s)$:

$$\varphi_{\alpha,X}(x(ts)) = \varphi_{\alpha,tX}(x(s))$$
$$\varphi_{\alpha,X}(y(t^{-1}s)) = \varphi_{\alpha,tX}(y(s))$$

Puisque $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1, on voit que l'homomorphisme:

$$t \longrightarrow t^{H_\alpha} = \varphi_{\alpha,X}(h(t))$$

ne dépend pas du choix de $X \in \mathfrak{g}_\alpha\backslash\{0\}$ et l'on a:

$$\begin{aligned}\rho(t^{H_\alpha})v &= \rho(\varphi_{\alpha,X}(h(t)))v \\ &= \rho(h_{\alpha,X}(t))v \\ &= \rho_{\alpha,X}(h(t))v \\ &= t^{\lambda(H_\alpha)}v\end{aligned}$$

iii) Posons:

$$q_{\alpha,X} = q_{\alpha,X}(1)$$

on a alors:

$$\begin{aligned}Ad(q_{\alpha,X}) &= Ad(\exp(X)\exp(-Y)\exp(X)) \\ &= \exp(ad_X)\exp(-ad_Y)\exp(ad_X) \\ &= \theta_{\alpha,X}\end{aligned}$$

On sait que $\theta_{\alpha,X}|\mathfrak{h} = r_\alpha$ et que $\theta_{\alpha,X}(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{r_\alpha(\beta)}$ pour toute racine $\alpha \in \Phi$.

On a alors, pour tout $g \in SL(2,\mathbb{C})$ et tout $X' \in \mathfrak{g}_\beta$

$$\varphi_{r_\alpha(\beta),\theta_{\alpha,x}(X')}(g) = q_{\alpha,x}\varphi_{\beta,X'}(g)q_{\alpha,x}^{-1}$$

Il suffit encore de démontrer cette égalité pour $g = x(s)$ ou $y(s)$.

$$\begin{aligned}\varphi_{r_\alpha(\beta),\theta_{\alpha,x}(X')}(x(s)) &= \exp(s\theta_{\alpha,x}(X'))\\ &= \exp(\mathrm{Ad}(q_{\alpha,x})(sX'))\\ &= q_{\alpha,x}\exp(sX')q_{\alpha,x}^{-1}\\ &= q_{\alpha,x}\varphi_{\beta,X'}(x(s))q_{\alpha,x}^{-1}\end{aligned}$$

et de même pour $y(s)$ puisque l'on a:

$$\begin{aligned}[\theta_{\alpha,x}(X'),\theta_{\alpha,x}(Y')] &= \theta_{\alpha,x}([X',Y'])\\ &= \theta_{\alpha,x}(H_\beta) = r_\alpha(H_\beta) = H_{r_\alpha(\beta)}.\end{aligned}$$

iv) Soient $\Pi = \{\alpha_i \ / \ 1 \le i \le l\}$ un système simple de racines et $(X_i)_{1\le i\le l}$ une famille d'éléments non nuls de $\mathfrak{g}$ avec $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$; on pose $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i,X_i}$. Il suffit de démontrer que:

$$\varphi_i : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G$$

est injectif pour $1 \le i \le l$.

Soit $\Lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ défini par $\Lambda_i(H_j) = \delta_{i,j}$; le $\mathfrak{g}$-module $L(\Lambda_i)$ est de dimension finie et l'on a:

$$(-1)^{H_i}.v_{\Lambda_i} = (-1)^{\Lambda_i(H_i)}v_{\Lambda_i} = -v_{\Lambda_i}$$

de sorte que $h(-1) \notin \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Or $\mathrm{Ker}(\varphi_i)$ est un sous-groupe distingué de $SL(2,\mathbb{C})$ donc égal à $SL(2,\mathbb{C})$ ou contenu dans son centre; il en résulte que φ_i est injectif.

v) Il suffit de démontrer l'égalité pour $g = x_{\beta,X'}(s)$ ou $y_{\beta,X'}(s)$.

Il vient, pour tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V, $\lambda \in P(V)$ et $v \in V_\lambda$:

$$\begin{aligned}t^{H_\alpha}x_{\beta,X'}(s)\ (t^{H_\alpha})^{-1}v &= t^{H_\alpha}x_{\beta,X'}(s)\ (t^{-\lambda(H_\alpha)}v)\\ &= t^{-\lambda(H_\alpha)}\,t^{H_\alpha}x_{\beta,X'}(s)(v)\\ &= t^{-\lambda(H_\alpha)}\,t^{H_\alpha}\sum_k \frac{s^k}{k!}X'^k v\\ &= t^{-\lambda(H_\alpha)}\sum_k \frac{s^k}{k!}t^{\lambda(H_\alpha)+k\beta(H_\alpha)}X'^k v\\ &= x_{\beta,X'}(t^{\lambda(H_\alpha)}s)\end{aligned}$$

et de même pour $g = y_{\beta,X'}(s)$. ●

remarqué

Pour tout $\alpha \in \Phi$, on a $G_\alpha = G_{-\alpha}$; pour $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, soit Y l'unique élément de $\mathfrak{g}_\alpha$ tel que $[X,Y] = H_\alpha$; on a alors $\theta_{\alpha,X}(X) = -Y$ de sorte que l'on a:

$$\varphi_{-\alpha,Y}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = q_{\alpha,X}\ \varphi_{\alpha,X}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}(q_{\alpha,X})^{-1}$$

Pour tout $\alpha \in \Phi$, on désigne par T_α l'image de l'homomorphisme injectif:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow G \\ t &\longrightarrow t^{H_\alpha} \end{aligned}$$

par N_α le normalisateur de T_α dans G_α et on pose $M_\alpha = N_\alpha \setminus T_\alpha$.
(on a $T_{-\alpha} = T_\alpha$ et par suite $N_{-\alpha} = N_\alpha$ et $M_{-\alpha} = M_\alpha$)
Puisque l'on a $q_{\alpha,sX}(t) = q_{\alpha,X}(st)$, l'application:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\} &\longrightarrow M_\alpha \\ X &\longrightarrow q_{\alpha,X} \end{aligned}$$

est une bijection et l'on a, pour $\alpha, \beta \in \Phi$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$:

$$M_\alpha = q_{\alpha,X}\ T_\alpha$$

$$M_{r_\alpha(\beta)} = q_{\alpha,X}\ M_\beta\ (q_{\alpha,X})^{-1}.$$

On a encore une bijection:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\} &\longrightarrow M_\alpha \\ Y &\longrightarrow q_{-\alpha,Y} \end{aligned}$$

et si $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$ l'unique élément tel que $[X,Y] = H_\alpha$, on a:

$$q_{-\alpha,Y} = q_{\alpha,-X} = (q_{\alpha,X})^{-1}$$

On désigne encore par T le sous-groupe de G engendré par $\{T_\alpha \ / \ \alpha \in \Phi\}$ et par N le sous-groupe engendré par $\{N_\alpha \ / \ \alpha \in \Phi\}$.

D'autre part, étant donné un système simple de racines $\Pi = \{\alpha_i \ / \ 1 \le i \le l\}$, pour chaque $i \in \{1,..,l\}$, on choisit X_i un élément non nul de $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ et on désigne par Y_i l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tel que $[X_i,Y_i] = H_i$; on pose $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i,X_i}$, $q_i = q_{\alpha_i,X_i}$ et $\theta_i = \theta_{\alpha_i,X_i}$.

Proposition 2.2

1) L'application:

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{C}^*)^l & \longrightarrow & T \\ (t_i)_{1\le i\le l} & \longrightarrow & \prod_{1\le i\le l} t_i^{H_i}\end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

2) Soit $\bar{W}$ le sous-groupe de G engendré par $(q_i)_{1\le i\le l}$ et $\bar{T}$ le sous-groupe de $\bar{W}$ engendré par $(q_i^2)_{1\le i\le l}$, alors:

i) $\bar{W}$ est défini par les relations:

$$q_j\, q_i^2\, q_j^{-1} = q_i^2\, q_j^{-2A_{i,j}}$$

$$q_i\, q_j\, q_i \ldots = q_j\, q_i\, q_j \ldots \qquad (m_{i,j} \text{ termes})$$

où $m_{i,j}$ est l'ordre de $r_i r_j$ dans le groupe de Weyl W.

ii) $\bar{T}$ est un sous-groupe distingué de $\bar{W}$; il est égal à l'ensemble des éléments d'ordre ≤ 2 de T et est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$.

iii) La représentation adjointe induit un isomorphisme de groupes:

$$\begin{array}{rcl}\bar{\pi} : \bar{W} / \bar{T} & \longrightarrow & W \\ q\bar{T} & \longrightarrow & Ad(q)|\mathfrak{h}\end{array}$$

3) Le groupe N est engendré par les sous-groupes T et $\bar{W}$, normalise H et la représentation adjointe induit un isomorphisme de groupes:

$$\begin{array}{rcl}\pi : N / T & \longrightarrow & W \\ nT & \longrightarrow & Ad(n)|\mathfrak{h}\end{array}$$

● 1) Puisque pour tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V, tout $v \in V_\lambda$ et tout $\lambda \in P(V)$ on a:

$$\rho(t^{H_\alpha})v = t^{\lambda(H_\alpha)}v$$

on voit que le groupe T est abélien et que, pour $1\le j\le l$ et toute racine $\alpha \in \Phi$:

$$t^{H_{r_j(\alpha)}} = t^{H_\alpha}\,(t^{-\alpha_j(H_\alpha)})^{H_j}$$

d'où il résulte, par récurrence sur la longueur des éléments de W, compte tenu de ce que $\Phi = W(\Pi)$, que l'application:

$$(t_i)_{1\le i\le l} \longrightarrow \prod_{1\le i\le l} t_i^{H_i}$$

est surjective. Enfin , si l'on a $\prod_{1\le i\le l} t_i^{H_i} = e$, on voit que:

$$\prod_{1\le i\le l} t_i^{\Lambda_j(H_i)} v_{\Lambda_j} = v_{\Lambda_j} \qquad 1\le j\le l$$

où $(\Lambda_j)_{1\le j\le l}$ est la base de P duale de la base $(H_i)_{1\le i\le l}$ de $Q^\vee$; on a donc $t_i = 1$ pour $1\le i\le l$.

2) On a $q_i^2 = (-1)^{H_i}$ de sorte que:

$$q_i^2\ q_j\ q_i^{-2} = \varphi_j\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{A_{i,j}} \\ -(-1)^{A_{i,j}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \varphi_j((-1)^{A_{i,j}}\ q(1))$$

$$= \varphi_j(q(1)^{1-2A_{i,j}}) = q_j^{1-2A_{i,j}}$$

Posons: $q = q_i\ q_j\ q_i\ \ldots$ ($m_{i,j}$ termes)

$q' = q_j\ q_i\ q_j\ \ldots$ ($m_{i,j}$ termes)

et $k = j$ si $m_{i,j}$ est pair ou $k = i$ sinon de sorte que $q' = q_j\ q\ q_k^{-1}$. Puisque $\bar\pi(q_i) = r_i$, $\bar\pi(q_j) = r_j$ et que $m_{i,j}$ est l'ordre de r_ir_j dans W on a $\bar\pi(q) = \bar\pi(q')$ et $r_j = \bar\pi(q)\ r_k\ (\bar\pi(q))^{-1}$ d'où $\alpha_j = \bar\pi(q)(\alpha_k)$. On a alors:

$$q'\ q^{-1} = q_j\ q\ q_k^{-1}\ q^{-1} \in q_j\ (q\ M_{\alpha_k}\ q^{-1})$$

Mais $q\ M_{\alpha_k}\ q^{-1} = M_{\bar\pi(q)\alpha_k} = M_{\alpha_j}$ et ainsi:

$$q'\ q^{-1} \in q_j\ M_{\alpha_j} = T_{\alpha_j}$$

On montre de même que $q'\ q^{-1} \in T_{\alpha_i}$ mais $T_{\alpha_i} \cap T_{\alpha_j} = \{e\}$ ie $q = q'$.

Soit $\hat W$ le groupe engendré par l générateurs $\hat q_1,\ldots,\hat q_l$ soumis aux relations:

$$\hat q_j\ \hat q_i^2\ \hat q_j^{-1} = \hat q_i^2\ \hat q_j^{-2A_{i,j}}$$

$$\hat q_i\ \hat q_j\ \hat q_i \ldots = \hat q_j\ \hat q_i\ \hat q_j \ldots \qquad (m_{i,j} \text{ termes})$$

On déduit de la première relation que $\hat q_i^4 = \hat e$ et que $(\hat q_i^2, \hat q_j^2) = \hat e$ de sorte que le sous-groupe $\hat T$ engendré par $(\hat q_i^2)_{1\le i\le l}$ est abélien et distingué dans $\hat W$, et on a un unique homomorphisme:

$$\hat\pi : \hat W \longrightarrow \bar W$$

tel que $\hat\pi(\hat q_i) = q_i$ pour $1\le i\le l$. De plus $\hat\pi$ induit un isomorphisme de $\hat T$ sur $\bar T$: en effet si $\hat t \in \hat T\setminus\{\hat e\}$ on a $\hat t = \hat q_{i_1}\hat q_{i_2}\ldots\hat q_{i_k}$ avec $k\ge 1$ de sorte que, pour tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V, tout $\lambda \in P(V)$ et $v \in V_\lambda$ on a $\hat{\pi}(\hat{t})v = (-1)^{\lambda(H_{i_1})+\lambda(H_{i_2})+\ldots+\lambda(H_{i_k})}v$ et par suite $\hat{\pi}(\hat{t}) \neq e$.

Or on a, puisque $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, $\bar{T} \subset \mathrm{Ker}(\bar{\pi})$ d'où un homomorphisme de groupes:

$$f : \hat{W} / \hat{T} \xrightarrow{\tilde{\hat{\pi}}} \bar{W} / \bar{T} \xrightarrow{\tilde{\bar{\pi}}} W$$

tel que $f(\hat{q}_i\hat{T}) = r_i$ pour $1 \leq i \leq l$.

D'après la définition de W par générateurs et relations, il existe un unique homomorphisme:

$$g : W \longrightarrow \hat{W} / \hat{T}$$

tel que $g(r_i) = \hat{q}_i\hat{T}$ pour $1 \leq i \leq l$, de sorte que f et g sont des isomorphismes réciproques. Il en résulte que $\tilde{\bar{\pi}}$ et $\tilde{\hat{\pi}}$ sont des isomorphismes. Enfin, puisque $\hat{\pi}|\hat{T}$ et $\tilde{\hat{\pi}}$ sont des isomorphismes, il en est de même de $\hat{\pi}$.

Soit $T_{(2)}$, l'ensemble des éléments de T d'ordre ≤ 2; on a $\bar{T} \subset T_{(2)}$. Réciproquement soit $t \in T_{(2)}$: on a, de manière unique, $t = \prod_{1 \leq i \leq l} t_i^{H_i}$ de sorte que $t_i^2 = 1$ pour $1 \leq i \leq l$.

3) N est engendré par T et les M_α, $\alpha \in \Phi$; mais on a $M_{r_i(\alpha)} = q_i\, M_\alpha\, q_i^{-1}$ et $M_{\alpha_i} = q_i\, T_{\alpha_i}$ donc N est engendré par $\bar{W}$ et T. Puisque l'on a:

$$q_{\alpha,x}\, t^{H_\beta}\, (q_{\alpha,x})^{-1} = t^{H_{r_\alpha(\beta)}}$$

on voit que T est un sous-groupe distingué de N. On a $T \subset \mathrm{Ker}(\pi)$, puisque $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, d'où un homomorphisme surjectif:

$$\tilde{\pi} : N / T \longrightarrow W$$

tel que $\tilde{\pi}(nT) = \mathrm{Ad}(n)|\mathfrak{h}$ de sorte que, pour $1 \leq i \leq l$ on a $\tilde{\pi}(q_iT) = r_i$ et on voit comme ci-dessus que $\tilde{\pi}$ est un isomorphisme. ●

3. Bases de Chevalley.

Soit $\Pi = \{\alpha_i \;/\; 1 \leq i \leq l\}$ un système simple de racines et pour chaque $i \in \{1,..,l\}$, soit X_i un élément non nul de $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, on pose $q_i = q_{\alpha_i,X_i}$.

Soit $\bar{W}$ le sous-groupe de G engendré par $(q_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $\bar{T}$

le sous-groupe abélien distigué de $\overline{W}$ engendré par les éléments $q_i^2 = (-1)^{H_i}$ $1 \le i \le l$; on a un isomorphisme de groupes:

$$\overline{\pi} : \overline{W} / \overline{T} \longrightarrow W$$

tel que $\overline{\pi}(q_i) = r_i$ pour $1 \le i \le l$.

<u>proposition 3.1</u>

Pour tout $\alpha \in \Phi$, on pose $\overline{M}_\alpha = M_\alpha \cap \overline{W}$; on a:

1) $\overline{M}_{\alpha_i} = \{q_i, (-1)^{H_i} q_i\}$ pour $1 \le i \le l$

2) $\overline{M}_{\overline{\pi}(q)\alpha} = q\, \overline{M}_\alpha\, q^{-1}$ pour tout $q \in \overline{W}$ et $\alpha \in \Phi$.

3) $\overline{M}_\alpha$ est formé de deux éléments inverses l'un de l'autre.

4) Si $m \in \overline{M}_\alpha$ on a $\overline{\pi}(m) = r_\alpha$

● On a effet $M_{\alpha_i} = q_i T_{\alpha_i}$ et $\overline{T}_{\alpha_i} = T_{\alpha_i} \cap \overline{W} = \{1, (-1)^{H_i}\}$ de sorte que $\overline{M}_{\alpha_i} = q_i \overline{T}_{\alpha_i} = \{q_i, (-1)^{H_i} q_i\}$ et comme $q_i^2 = (-1)^{H_i}$, ces deux éléments sont inverses l'un de l'autre; d'autre part on a:

$$\overline{M}_{r_i(\alpha)} = q_i\, \overline{M}_\alpha\, (q_i)^{-1}$$

pour $1 \le i \le l$ de sorte que:

$$\overline{M}_{r_{i_1} \dots r_{i_k}(\alpha)} = q_{i_1} \dots q_{i_k}\, \overline{M}_\alpha\, (q_{i_k})^{-1} \dots (q_{i_1})^{-1}$$

d'où $\overline{M}_{\overline{\pi}(q)\alpha} = q\, \overline{M}_\alpha\, q^{-1}$ pour tout $q \in \overline{W}$ ce qui montre que $\overline{M}_\alpha$ est formé de deux éléments inverses l'un de l'autre. Si m est l'un des éléments de $\overline{M}_\alpha$, on a $m^{-1} = (-1)^{H_\alpha} m$.

On a $\overline{\pi}(q_i) = r_i$. On a $\alpha = w(\alpha_i)$; soit $q \in \overline{W}$ tel que $\overline{\pi}(q) = w$ de sorte que $\overline{M}_\alpha = q\, \overline{M}_{\alpha_i}\, q^{-1}$ et $m = q m_i q^{-1}$ d'où $\overline{\pi}(m) = w r_i w^{-1} = r_\alpha$. ●

<u>proposition 3.2</u>

Pour chaque $m \in M_\alpha$, soit $X_{\alpha,m}$ l'unique élément de $\mathfrak{g}_\alpha \backslash \{0\}$ tel que $q_{\alpha, X_{\alpha,m}} = m$. On a donc:

$$X_{\alpha_i, q_i} = X_i \qquad 1 \le i \le l$$

$$X_{\alpha, m^{-1}} = -X_{\alpha,m}$$

$$[X_{\alpha,m}, X_{-\alpha,m}] = -H_\alpha$$

$Ad(q)X_{\alpha,m} = X_{\overline{\pi(q)\alpha},qmq^{-1}}$ pour tout $q \in \bar{W}$ et tout $\alpha \in \Phi$ et $m \in \bar{M}_\alpha$.

En particulier on a $Ad(m)X_{\alpha,m} = X_{-\alpha,m}$ pour tout $m \in \bar{M}_\alpha$.

● $q_{\alpha,-X_{\alpha,m}} = (-1)^{H_\alpha} q_{\alpha,X_{\alpha,m}} = (-1)^{H_\alpha} m = m^{-1}$.

Soient $X \in g_\alpha \setminus \{0\}$ et Y l'unique élément de $g_{-\alpha}\setminus\{0\}$ tel que $[X,Y] = H_\alpha$, on a vu que $q_{-\alpha,Y} = (q_{\alpha,X})^{-1}$; de sorte que, si l'on pose $m = q_{\alpha,X}$ on a $Y = X_{-\alpha,m^{-1}} = -X_{-\alpha,m}$ ●

Ainsi $(X_{\alpha,m})_{\alpha\in\Phi,\, m\in M_\alpha}$ est la réunion d'une base de $\sum_{\alpha\in\Phi} g_\alpha$ et de son opposée et, pour $\alpha,\beta\in \Phi$, $m \in \bar{M}_\alpha$, $n \in \bar{M}_\beta$ on a:

$$[X_{\alpha,m}, X_{\beta,n}] = \begin{cases} (-1)^{\delta_{m,n}} H_\alpha & \text{si}\, \alpha+\beta = 0 \\ 0 & \text{si}\, \alpha+\beta \notin \Phi \cup \{0\} \end{cases}$$

Il reste donc à déterminer les constantes de structure de g lorsque $\alpha+\beta \in \Phi$; on a dans ce cas $[g_\alpha, g_\beta] = g_{\alpha+\beta}$. On peut donc poser, pour $\alpha,\beta,\gamma \in \Phi$ telles que $\alpha+\beta+\gamma = 0$, $m \in \bar{M}_\alpha$, $n \in \bar{M}_\beta$ et $p \in \bar{M}_{-\gamma}$:

$$[X_{\alpha,m}, X_{\beta,n}] = \varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p)\, f(\alpha,\beta)\, X_{-\gamma,p}$$

avec:

$$\varepsilon : \coprod_{\alpha+\beta+\gamma=0} (\bar{M}_\alpha \times \bar{M}_\beta \times \bar{M}_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

et $f(\alpha,\beta)$ le plus petit entier $f \in \mathbb{N}$ tel que $\beta - f\alpha \notin \Phi$.

<u>proposition 3.3</u>

La fonction de Tits ε est caractérisée par les trois propriétés suivantes , où α,β et γ sont trois racines telles que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et $m \in \bar{M}_\alpha$, $n \in \bar{M}_\beta$ et $p \in \bar{M}_\gamma$:

i) $\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p) = \varepsilon(\beta,n,\gamma,p,\alpha,m)$

ii) $\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p^{-1}) = -\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p)$

iii) $\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,mnm^{-1}) = (-1)^{f(\alpha,\beta)+1}$ si $\beta(H_\alpha) = -1$.

En particulier, la fonction ε est à valeurs dans $\mathbb{Z}^\times = \{-1,1\}$.

• Tout d'abord on a:

$$\begin{aligned}[X_{\alpha,m}, X_{\beta,n}] &= \varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p)f(\alpha,\beta)X_{-\gamma,p} \\ &= \varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p^{-1})f(\alpha,\beta)X_{-\gamma,p^{-1}} \\ &= -\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p^{-1})f(\alpha,\beta)X_{-\gamma,p}\end{aligned}$$

d'où il résulte que:

$$\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p^{-1}) = -\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p)$$

Ensuite, l'identité de Jacobi s'écrit:

$$[[X_{\alpha,m}, X_{\beta,n}], X_{\gamma,p}] + [[X_{\beta,n}, X_{\gamma,p}], X_{\alpha,m}] + [[X_{\gamma,p}, X_{\alpha,m}], X_{\beta,n}] = 0$$

d'où:

$$\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p)f(\alpha,\beta)H_\gamma + \varepsilon(\beta,n,\gamma,p,\alpha,m)f(\beta,\gamma)H_\alpha + \varepsilon(\gamma,p,\alpha,m,\beta,n)f(\gamma,\alpha)H_\beta = 0$$

Or on a:

$$f(\alpha,\beta)H_\gamma + f(\beta,\gamma)H_\alpha + f(\gamma,\alpha)H_\beta = 0$$

d'où il résulte que:

$$\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p) = \varepsilon(\beta,n,\gamma,p,\alpha,m)$$

Supposons que $\beta(H_\alpha) = -1$ (ie $\|\alpha\| \geq \max(\|\beta\|,\|\gamma\|)$). Soit $\mathfrak{s}_\alpha$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$; la représentation:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_\alpha &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\sum_k \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}) \\ Z &\longrightarrow ad_Z|\sum_k \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}\end{aligned}$$

est irréductible de rang $d+1 = \dim(\sum_k \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}) = p+q+1$, où $[-p,q]$ est l'intervalle des $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta+k\alpha \in \Phi$ et l'on a $\beta(H_\alpha) = p-q = -1$ de sorte que $d = 2p+1$.

On a alors, pour $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Z \in \mathfrak{g}_\beta$

$$ad_X Z = (-1)^p(p+1)Ad(q_{\alpha,X})Z$$

avec $Ad(q_{\alpha,X})Z \in \mathfrak{g}_{r_\alpha(\beta)} = \mathfrak{g}_{-\gamma}$ ce qui donne, pour $m \in \bar{M}_\alpha$ et $n \in \bar{M}_\beta$:

$$\begin{aligned}[X_{\alpha,m}, X_{\beta,n}] &= (-1)^p(p+1)Ad(m)X_{\beta,n} \\ &= (-1)^p(p+1)X_{-\gamma,mnm^{-1}}\end{aligned}$$

On a donc:

$$\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,mnm^{-1}) = (-1)^{f(\alpha,\beta)+1} \bullet$$

corollaire

Pour $\alpha,\beta,\gamma \in \Phi$ telles que $\alpha+\beta+\gamma = 0$, $m \in \bar{M}_\alpha$, $n \in \bar{M}_\beta$ et $p \in \bar{M}_{-\gamma}$:

$$\varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p) = -\varepsilon(\beta,n,\alpha,m,\gamma,p)$$
$$\varepsilon(-\alpha,m,-\beta,n,-\gamma,p) = \varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p)$$

● L'antisymétrie de la fonction ε provient de celle du crochet de Lie et du fait que $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$ si $\alpha,\beta \in \Phi$ et $\alpha + \beta \in \Phi$.

Pour la deuxième propriété, posons:

$$\varepsilon'(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p) = -\varepsilon(-\alpha,m,-\beta,n,-\gamma,p)$$

On a alors les propriétés:

$$\begin{aligned}
\varepsilon'(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p) &= \varepsilon(-\alpha,m,-\beta,n,-\gamma,p)\\
&= \varepsilon(-\beta,n,-\gamma,p,-\alpha,m)\\
&= -\varepsilon'(\beta,n,\gamma,p,\alpha,m)\\
\varepsilon'(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p^{-1}) &= \varepsilon(-\alpha,m,-\beta,n,-\gamma,p^{-1})\\
&= -\varepsilon(-\alpha,m,-\beta,n,-\gamma,p)\\
&= -\varepsilon'(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p)\\
\varepsilon'(\alpha,m,\beta,n,\gamma,mnm^{-1}) &= \varepsilon(-\alpha,m,-\beta,n,-\gamma,mnm^{-1})\\
&= (-1)^{f(-\alpha,-\beta)+1}\\
&= (-1)^{f(\alpha,\beta)+1}\\
&= \varepsilon(\alpha,m,\beta,n,\gamma,p) \text{ si } \|\alpha\| \geq \max(\|\beta\|,\|\gamma\|)
\end{aligned}$$ ●

Proposition 3.4

L'unique élément ω de $GL(\mathfrak{g})$ défini par:

$$\omega(H) = -H \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}$$
$$\omega(X_{\alpha,m}) = X_{-\alpha,m} \text{ pour tout } \alpha \in \Phi \text{ et } m \in \bar{M}_\alpha$$

est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$.

(involution de Chevalley associée à Π et $(X_i)_{1\leq i\leq l}$)

● Puisqu'on a la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum \mathfrak{g}_\alpha$ et que $X_{\alpha,m}$ et $X_{\alpha,m^{-1}}$ sont deux éléments opposés de $\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$, ω est défini et

on a:

$$\begin{aligned}
[\omega(H),\omega(X_{\alpha,m})] &= [-H,X_{-\alpha,m}]\\
&= -\alpha(-H)X_{-\alpha,m}\\
&= \alpha(H)\omega(X_{\alpha,m})\\
&= \omega([H,X_{\alpha,m}])
\end{aligned}$$

Soient $\alpha,\beta \in \Phi$, $m \in \bar{M}_\alpha$ et $n \in \bar{M}_\beta$:

i) $\beta = -\alpha$ et $n = m$ ou m^{-1}

$$\begin{aligned}[\omega(X_{\alpha,m}),\omega(X_{-\alpha,n})] &= [X_{-\alpha,m}, X_{\alpha,n}] \\ &= -(-1)^{\delta_{m,n}} H_\alpha \\ &= (-1)^{\delta_{m,n}} \omega(H_\alpha) \\ &= \omega([X_{\alpha,m}, X_{-\alpha,n}])\end{aligned}$$

ii) $\alpha+\beta = 0$

$$\omega([X_{\alpha,m}, X_{\beta,n}]) = 0$$

$$[\omega(X_{\alpha,m}),\omega(X_{\beta,n})] = [X_{-\alpha,m}, X_{-\beta,n}] = 0$$

iii) $\alpha+\beta \in \Phi$ et $p \in \bar{M}_{-\alpha-\beta}$

$$\begin{aligned}[\omega(X_{\alpha,m}),\omega(X_{\beta,n})] &= [X_{-\alpha,m}, X_{-\beta,n}] \\ &= \varepsilon(-\alpha,m,-\beta,n,\alpha+\beta,p) f(-\alpha,-\beta) X_{-\alpha-\beta,p} \\ &= \varepsilon(\alpha,m,\beta,n,-\alpha-\beta,p) f(\alpha,\beta)\, \omega(X_{\alpha+\beta,p}) \\ &= \omega([X_{\alpha,m}, X_{\beta,n}]\end{aligned}$$

de sorte que ω est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. ●

Soit Φ_+ l'ensemble des racines positives relativement à Φ; posons $m_{\alpha_i} = q_i$ pour $1 \le i \le l$ et pour chaque $\alpha \in \Phi_+ \setminus \Pi$ soit m_α l'un des deux éléments de $\bar{M}_\alpha$ et $m_{-\alpha} = m_\alpha^{-1}$; on pose alors $X_\alpha = X_{\alpha,m_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ de sorte que $((X_\alpha)_{\alpha\in\Phi}, (H_i)_{1\le i\le l})$ est une <u>base de Chevalley de</u> $\mathfrak{g}$ c'est à dire telle que, pour tout $\alpha \in \Phi$:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$$
$$\omega(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$$

En posant, pour deux racines $\alpha,\beta \in \Phi$ telles que $\alpha+\beta \in \Phi$:

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$$

on a la relation de Weyl:

$$N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta}$$

et la relation de Chevalley:

$$|N_{\alpha,\beta}| = p+1$$

où p est le plus grand entier naturel tel que $\beta - p\alpha \in \Phi$. Le signe $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ de $N_{\alpha,\beta}$ étant déterminé par la fonction de Tits ε:

$$\varepsilon_{\alpha,\beta} = \varepsilon(\alpha, m_\alpha, \beta, m_\beta, -\alpha-\beta, m_{\alpha+\beta}).$$

CHAPITRE XI

SYSTEME DE TITS ASSOCIE A UNE ALGEBRE DE LIE SEMI-SIMPLE

1. Groupes munis d'une donnée radicielle.

On considère une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$, $\Pi = \{\alpha_i \ / \ 1 \leq i \leq l\}$ un système simple de racines, Φ_+ l'ensemble des racines positives relativement à Π et $(r_i)_{1 \leq i \leq l}$ le système générateur correspondant du groupe de Weyl W.

<u>proposition 1.1</u>

Soient G un groupe, $(T, (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$ une famille de sous-groupes de G; on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:

1) T normalise U_α et $U_\alpha \neq \{e\}$ pour tout $\alpha \in \Phi$

2) $G = \langle T, U_\alpha \ / \ \alpha \in \Phi \rangle$

3) On désigne par U_+ (resp U_-) le sous-groupe de G engendré par les U_α avec $\alpha \in \Phi_+$ (resp $\alpha \in -\Phi_+$), alors l'application:

$$\begin{aligned} U_+ \times T \times U_- &\longrightarrow G \\ (u_+, h, u_-) &\longrightarrow u_+ h u_- \end{aligned}$$

est injective.

4) Pour $1 \leq i \leq l$, il existe $q_i \in \langle U_{\alpha_i}, U_{-\alpha_i} \rangle$ tel que:

q_i normalise T

$q_i U_\alpha q_i^{-1} = U_{r_i(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Phi$

Soit N le sous-groupe de G engendré par T et les q_i $1 \leq i \leq l$; alors T est un sous-groupe distingué de G et il existe un unique homomorphisme de groupes:

$$\pi : N / T \longrightarrow W$$

tel que $nU_\alpha n^{-1} = U_{\pi(n)(\alpha)}$ pour tout $n \in N$ et tout $\alpha \in \Phi$. On suppose de plus que:

5) π est un isomorphisme

6) Pour $\alpha, \beta \in \Phi_+$ telles que $\beta(H_\alpha) \geq 0$ (de sorte que $(\mathbb{N}^*\alpha + \mathbb{N}^*\beta) \cap \Phi \subset \{\alpha+\beta\}$) on a:

$$(U_\alpha, U_\beta) = \begin{cases} U_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \in \Phi \\ \{e\} & \text{sinon} \end{cases}$$

7) $U_{-\alpha_i} \setminus \{e\} \subset U_{\alpha_i} q_i T\, U_{\alpha_i}$

Soit B le sous-groupe de G engendré par T et U_+; alors (B,N) est un système de Tits de groupe de Weyl W dans le groupe G.

● **lemme 1**

Soient $\alpha,\beta \in \Phi_+$ telles que $\beta(H_\alpha) \geq 0$; alors:

$$(\mathbb{N}^*\alpha + \mathbb{N}^*\beta) \cap \Phi = \{\alpha+\beta\}$$

▶ Soit $\gamma = a\alpha + b\beta \in \Phi$ avec $a,b \in \mathbb{N}^*$. On a $\gamma(H_\alpha) \geq 2a$; soit $[-p,q]$ l'intervalle des $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\gamma+k\alpha \in \Phi$ de sorte que $p-q \geq 2a$ et $\gamma-a\alpha = b\beta \in \Phi$ d'où $b = 1$ et de même $a=1$ et $\gamma = \alpha+\beta$. ▶

lemme 2

Pour tout $w \in W$, il existe $n \in N$ tel que $nU_\alpha n^{-1} = U_{w(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

▶ Si $w = r_{i_1} \ldots\ldots r_{i_k}$, il suffit de poser $n = q_{i_1} \ldots\ldots q_{i_k}$ ▶

lemme 3

Si $\alpha,\beta \in \Phi$ et $\alpha \neq \beta$, on a $U_\alpha \neq U_\beta$

▶ Il existe $w \in W$ tel que $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ ne sont pas simultanément dans Φ_+: il existe $w_1 \in W$ tel que $w_1(\alpha) \in \Pi$, si $w_1(\beta) \in -\Phi_+$ on prend $w = w_1$ sinon on prend $w = r_{w_1(\alpha)} \circ w_1$ d'où $w(\alpha) \in -\Pi$ et $w(\beta) \in \Phi_+$. Il existe $n \in N$ tel que, par exemple, $nU_\alpha n^{-1} = U_{w(\alpha)}$ et $nU_\beta n^{-1} = U_{w(\beta)}$. On a $U_{w(\alpha)} \subset U$ et $U_{w(\beta)} \subset V$ d'où $U_\alpha \subset U_\beta$. ▶

lemme 4

Il existe un unique homomorphisme de groupes:

$$\pi : N / T \longrightarrow W$$

tel que $nU_\alpha n^{-1} = U_{\pi(n)(\alpha)}$ pour tout $n \in N$ et tout $\alpha \in \Phi$.

▶ On a $hU_\alpha h^{-1} = U_\alpha$ pour tout $h \in T$ et $q_i U_\alpha q_i^{-1} = U_{r_i(\alpha)}$ pour $1 \leq i \leq l$. Soit $n \in N$ il existe $w \in W$ tel que $nU_\alpha n^{-1} = U_{w(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ et cet élément w est unique: sinon il existerait $w' \in W$ tel que $nU_\alpha n^{-1} = U_{w'(\alpha)}$ de sorte que l'on aurait $w(\alpha) = w'(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Phi$ donc $w = w'$. On pose $w = \tilde{\pi}(n)$ d'où une application:

$$\tilde{\pi} : N \longrightarrow W$$

caractérisée par la propriété: $nU_\alpha n^{-1} = U_{\tilde{\pi}(n)(\alpha)}$ pour tout $n \in N$ et tout $\alpha \in \Phi$ de sorte que $\tilde{\pi}$ est nécessairement un homomorphisme de groupes. On a $T \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\pi})$, $\tilde{\pi}(q_i) = r_i$ pour $1 \leq i \leq l$ et $\tilde{\pi}$ est surjectif. ▶

Pour $1 \leq i \leq l$, soit U^{α_i} le sous-groupe de U_+ engendré par les uvu^{-1} avec $u \in U_{\alpha_i}$ et $v \in U_\alpha$ pour $\alpha \in \Phi_+ \setminus \{\alpha_i\}$;

<u>lemme 5</u>

Tout $m_i \in \pi^{-1}(r_i)$ normalise U^{α_i}

▶ Il suffit de montrer que $m_i uvu^{-1} m_i^{-1} \in U^{\alpha_i}$ où $u \in U_{\alpha_i}$ et $v \in U_\alpha$ avec $\alpha \in \Phi_+ \setminus \{\alpha_i\}$.

Supposons d'abord que $\alpha(H_i) \geq 0$; si $\alpha_i + \alpha$ n'est pas une racine on a $(U_{\alpha_i}, U_\alpha) = \{e\}$ de sorte que:

$$m_i uvu^{-1} m_i^{-1} = m_i v m_i^{-1} \in U_{r_i(\alpha)} \subset U^{\alpha_i}.$$

Par contre si $\alpha + \alpha_i$ est une racine on a $(U_{\alpha_i}, U_\alpha) = U_{\alpha+\alpha_i}$ d'où, comme précédemment $m_i uvu^{-1} m_i^{-1} \in U_{r_i(\alpha+\alpha_i)} U_{r_i(\alpha)} \subset U^{\alpha_i}$.

Considérons maintenant le cas où $\alpha(H_i) < 0$; si $u = e$ on a $m_i v m_i^{-1} \in U_{r_i(\alpha)} \subset U^{\alpha_i}$ tandis que si $u \neq \{e\}$ on a $m_i u = u_1 m_i u_2 h m_i$ avec $u_1, u_2 \in U_{\alpha_i}$, $h \in T$ de sorte que:

$$\begin{aligned} m_i uvu^{-1} m_i^{-1} &= u_1 m_i u_2 h m_i v m_i^{-1} h^{-1} u_2^{-1} m_i^{-1} u_1^{-1} \in u_1 m_i u_2 U_{r_i(\alpha)} u_2^{-1} m_i^{-1} u_1^{-1} \\ &\subset u_1 m_i u_2 U_{r_i(\alpha)} u_2^{-1} m_i^{-1} u_1^{-1} \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $m_i u_2 v' u_2^{-1} m_i^{-1} \subset U^{\alpha_i}$ avec $v' \in U_{r_i(\alpha)}$; or on a $r_i(\alpha)(H_i) = (\alpha - \alpha(H_i)\alpha_i)(H_i) = -\alpha(H_i) \geq 0$. ▶

<u>lemme 6</u>

U_{α_i} normalise U^{α_i} et l'on a la décomposition en produit semi-direct:

$$U_+ = U_{\alpha_i} U^{\alpha_i}$$

▶ Comme U_+ est engendré par les U_α, $\alpha \in \Phi_+$ et que U_{α_i} normalise

U^{α_i} on a $U_+ = U_{\alpha_i} U^{\alpha_i}$. D'autre part, puisque r_i normalise U^{α_i} on a $U^{\alpha_i} \subset U_+ \cap U^{r_i}$ donc $U_{\alpha_i} \cap U^{\alpha_i} \subset U_{-\alpha_i}^{r_i} \cap U^{\alpha_i} \subset (U_- \cap U_+)^{r_i} = \{e\}$. ▶

<u>lemme 7</u>

$$U^{\alpha_i} = U_+ \cap U_+^{r_i}$$

▶ Soit $u \in U_+ \cap U_+^{r_i}$, on a $u = u_i u^i$ avec $u_i \in U_{\alpha_i}$ et $u^i \in U^{\alpha_i}$. Alors $u_i = u(u^i)^{-1} \in U_+^{r_i} \cap U_{\alpha_i} = (U_+ \cap U_{-\alpha_i})^{r_i} = \{e\}$ donc $u = u^i \in U^{\alpha_i}$. ▶

<u>lemme 8</u>

$$U_{\alpha_i} = U_+ \cap U_-^{r_i}$$

▶ On a $U_{\alpha_i}^{r_i} = U_{-\alpha_i} \subset U_-$ de sorte que $U_{\alpha_i} \subset U_+ \cap U_-^{r_i}$. D'autre part on a
$U_+ = U_{\alpha_i} U^{\alpha_i}$ de sorte que l'on a:

$$U_+ \cap U_-^{r_i} \subset (U_{\alpha_i} U^{\alpha_i}) \cap U_-^{r_i} \subset (U_{\alpha_i} U_+^{r_i}) \cap U_-^{r_i}$$

$$\subset ((U_{-\alpha_i} U_+) \cap U_-)^{r_i} \subset U_{-\alpha_i}^{r_i} = U_{\alpha_i}$$ ▶

<u>lemme 9</u>

$$U_+U_- \cap N = \{e\}$$

▶ Soit $n = uv$ avec $n \in N$, $u \in U_+$ et $v \in U_-$; on a alors:

$$U_+^n \cap U_- = U_+^v \cap U_- = (U_+ \cap U_-)^v = \{e\}$$

et, en particulier $U_{\alpha_i}^n \cap U_- = \{e\}$. Puisque $U_{\alpha_i}^n = U_{\pi(n^{-1})\alpha_i}$ on a $\pi(n^{-1})\alpha_i \in \Phi_+$ pour $1 \le i \le l$; on a donc $\pi(n) = e$ ie $n \in T$ et $n = e$. ▶

lemme 10

$$Br_iBwB \subset Br_iwU^{\vee}_{\alpha_i}$$

$$Br_iBwB \subset Br_iw \cup BwU^{r_i\vee}_{\alpha_i}$$

▶ $Br_iBwB = Br_iTU_+wB = Br_i\, U^{\alpha_i}U_{\alpha_i}wB \subset Br_i(r_iU_+r_i^{-1})U_{\alpha_i}wB \subset Br_iwU^{\vee}_{\alpha_i}B$

$Br_iBwB \subset Br_i\, U^{\alpha_i}U_{\alpha_i}wB \subset BU^{r_i}_{\alpha_i}r_iwB \subset B(\{e\} \cup U_{\alpha_i}r_iU_{\alpha_i})r_iwB$

$$\subset Br_iwB \cup BU_{\alpha_i}r_iU_{\alpha_i}r_iwB \subset Br_iwB \cup BwU^{r_i\vee}_{\alpha_i}B \;▶$$

$B \cup N$ engendre G et $B \cap N = T$.

▶ On a évidemment $T \subset B \cap N$; réciproquement soit $g \in B \cap N$; on a $g = uh$ avec $h \in T$ et $u \in U_+$ d'où $gh^{-1} = u \in U_+ \cap N = \{e\}$ ie $g = h \in T$. D'autre part G est engendré par T et les U_α, $\alpha \in \Phi$; or T et les U_α avec $\alpha \in \Phi_+$ engendrent B et on a $U_{-\alpha} = mU_\alpha m^{-1}$ avec $m \in N$. ▶

$Br_iBwB \subset BwB$ u Br_iwB pour $1 \le i \le l$ et $w \in W$.

▶ Si $U^{\vee}_{\alpha_i} \subset U_+$ on a $Br_iBwB \subset Br_iwB$ tandis que si $U^{\vee}_{\alpha_i} \subset U_-$ on a $w^{-1}(\alpha_i) \in -\Phi_+$ comme $(r_iw)^{-1}(\alpha_i) = -w^{-1}(\alpha_i)$ on a $U^{r_i\vee}_{\alpha_i} \subset U_+$ de sorte que $Br_iBwB \subset Br_iwB \cup BwB$. ▶

$B^{r_i} \neq B$ pour $1 \le i \le l$.

▶ $U_{\alpha_i} \cap B^{r_i} = U_+ \cap U_-^{r_i} \cap B^{r_i} = U_+ \cap (U_- \cap B)^{r_i} = \{e\}$ mais on a $\{e\} \neq U_{\alpha_i} \subset B$ ▶ ●

corollaire

On a les conditions équivalentes:

$U^{\vee}_{\alpha_i} \subset U_+$

$w^{-1}(\alpha_i) \in \Phi_+$

$\ell(r_iw) > \ell(w)$

et l'on a $Br_iBwB \subset Br_iwB$ sinon on a $Br_iBwB \subset Br_iwB \cup BwB$.

proposition 1.2

Pour tout $w \in W$ on a $U^w = (U^w \cap U_+)(U^w \cap U_-)$

● Pour $w = r_i$ le résultat provient de ce que l'on a:

$$U_+ = U^{\alpha_i} U_{\alpha_i} = (U_+ \cap U^{r_i})(U_+ \cap U_-^{r_i})$$

et l'on a aussi $U^{r_i} \subset U_+ U_{\alpha_i}^{r_i}$ puisque r_i normalise U^{α_i}. Par récurrence sur $k = \ell(w)$ on a alors, avec $w = r_{i_1}\ldots r_{i_k}$:

$$U_+^w \subset U_+ U_{\alpha_k}^{r_k} \ldots\ldots U_{\alpha_{i_2}}^{r_{i_2}\ldots r_{i_k}} U_{\alpha_{i_1}}^{r_{i_1}\ldots r_{i_k}}$$

Posons $w_j = r_{i_j}\ldots r_{i_k}$; on a $\ell(r_{i_j} w_j) < \ell(w_j)$ de sorte que $U_{\alpha_j}^{w_j} \subset U_-$ tandis que $\ell(r_{i_j} w_j w^{-1}) > \ell(w_j w^{-1})$ d'où $U_{\alpha_j}^{w_j w^{-1}} \subset U$ ie $U_{\alpha_j}^{w_j} \subset U_+^w$. Il en résulte que $U_+^w \subset U_+(U_+^w \cap U_-)$. ●

proposition 1.3

i) Tout $g \in G$ s'écrit de manière unique $g = nuv$ avec $n \in N$, $u \in U_+ \cap n^{-1}U_-n$ et $v \in U_-$.

● U_+NU_- est une partie de G contenant U_+ et N, stable par multiplication à gauche par U_+, par T (puisque T normalise U_+ et $T \subset N$), et par les q_i, $1 \le i \le l$ (d'après le lemme 10) donc par N (qui est engendré par T et les q_i) et finalement par G (engendré par U_+ et N); on a donc $G = U_+NU_-$.

Soit $g \in G$; on a $g = unv$ avec $u \in U_+, n \in N$ et $v \in U_-$ de sorte que $g = n(n^{-1}un)v$; mais $n^{-1}un = u'v'$ avec $u' \in U_+ \cap n^{-1}U_+n$ et $v' \in U_- \cap n^{-1}U_+n$ et l'on a $g = nu'(v'v)$.

Supposons que l'on ait deux décompositions $g = nuv = n'u'v'$; on a $u = n^{-1}u_on$ et $u' = n'^{-1}u'_on'$ avec $u_o, u'_o \in U_+$, d'où $u_onv = u'_on'v'$. On a donc $n' = u_1nv_1$ avec $u_1 \in U_+$ et $v_1 \in U_-$ et finalement, en reprenant le calcul du paragraphe précédent on a $n' = nu'_1v'_1$. Mais $N \cap U_+U_- = \{e\}$ donc $n = n'$ et $uv = u'v'$; comme $U_+ \cap U_- = \{e\}$ on a $u = u'$ et $v = v'$. ●

<u>proposition 1.4</u>

On a:

$$\bigcap_{n\in N} nU_+n^{-1} = \{e\}$$

$$\bigcap_{n\in N} nBn^{-1} = T$$

(ie le système de Tits (B,N) est saturé).

● Soit $g \in \bigcap_{n\in N} n'U_+n'^{-1}$; on a $g = nuv$ avec avec $n \in N$, $u \in U_+ \cap n^{-1}U_-n$ et $v \in U_-$; on a $n^{-1}gn \in U_+$ d'où $uvn \in U_+$; mais $U_+U_- \cap N = \{e\}$ donc $n = e$ et on a $g = uv \in U_+$ mais $U_+ \cap U_- = \{e\}$ donc $u = e$ et $g = e$.

On a évidemment $T \subset \bigcap_{n\in N} nBn^{-1}$; considérons alors $g \in \bigcap_{n\in N} nBn^{-1}$; en particulier on a $g \in B$; de sorte $g = hu$ avec $h \in T$ et $u \in U_+$; pour tout $n \in N$ on a $n^{-1}gn = (n^{-1}hn)(n^{-1}un) \in B$ et $n^{-1}hn \in T$ de sorte que $n^{-1}un \in U_+$ d'où $u = e$. ●

2. Le système de Tits associé à une algèbre de Lie semi-simple.

Soit G le groupe associé à l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$; pour tout $\alpha \in \Phi$, rappelons que G_α désigne le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{g}_\alpha \cup \mathfrak{g}_{-\alpha})$; que T_α est l'image de l'homomorphisme injectif $t \longrightarrow t^{H_\alpha}$, que N_α est le normalisateur de T_α dans G_α et que $M_\alpha = N_\alpha \backslash T_\alpha$.

Soit T (resp) N le sous-groupe de G engendré par les T_α (resp N_α) pour $\alpha \in \Phi$; la représentation adjointe de G induit un isomorphisme de groupes:

$$\pi : N / T \longrightarrow W$$

tel que $\pi(q) = r_\alpha$ pour tout $q \in M_\alpha$.

proposition 2.1

Pour tout $\alpha \in \Phi$, posons $U_\alpha = \exp(\mathfrak{g}_\alpha)$; alors $(T,(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi})$ est une donnée radicielle sur le groupe G.

•1) T normalise U_α et $U_\alpha \neq \{e\}$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

▶ On a $U_\alpha \neq \{e\}$ et $nU_\alpha n^{-1} = U_{\pi(n)\alpha}$ pour tout $n \in N$. En particulier T normalise U_α pour tout $\alpha \in \Phi$. ▶

2) $G = \langle T, U_\alpha / \alpha \in \Phi \rangle$

▶ Par construction ,G est engendré par les U_α, $\alpha \in \Phi$. ▶

3) Soit U_+ (resp U_-) le sous-groupe de G engendré par les U_α avec $\alpha \in \Phi_+$ (resp $\alpha \in -\Phi_+$), alors l'application:

$$U_+ \times T \times U_- \longrightarrow G$$
$$(u_+,h,u_-) \longrightarrow u_+hu_-$$

est injective.

▶ Soient $u_+ \in U_+$, $h \in T$ et $u_- \in U_-$ tels que $u_+h = u_-$. Pour tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V, tout $\lambda \in P(V)$ et tout $v \in V_\lambda$ on a:

$$(u_+h).v - v = u_-^{-1}v - v \in \sum_{\mu\geq\lambda} V_\mu \cap \sum_{\mu<\lambda} V_\mu = \{0\}$$

de sorte que $u_- = e$. On vérifie de même que $u_+ = e$, donc $h = e$. ▶

4) Pour $1\leq i\leq l$, il existe $q_i \in \langle U_{\alpha_i}, U_{-\alpha_i} \rangle$ tel que:

$$q_i \text{ normalise } T \quad q_iU_\alpha q_i^{-1} = U_{r_i(\alpha)} \text{ pour tout } \alpha \in \Phi$$

5) On a un isomorphisme de groupes:

$$\pi : N / T \longrightarrow W$$

tel que $nU_\alpha n^{-1} = U_{\pi(n)(\alpha)}$ pour tout $n \in N$ et tout $\alpha \in \Phi$.

6) Pour $\alpha,\beta \in \Phi_+$ telles que $\beta(H_\alpha) \geq 0$, on a:

$$(U_\alpha,U_\beta) = \begin{cases} U_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \in \Phi \\ \{e\} & \text{sinon} \end{cases}$$

▶ Soient $u = \exp(X)$ et $v = \exp(Y)$ avec $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_\beta$; pour toute représentation rationnelle $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ on a:

$$\begin{aligned}
\rho(uvu^{-1}) &= \exp(\rho'(X))\exp(\rho'(Y))\exp(-\rho'(X)) \\
&= \exp(\exp(ad_{\rho'(X)})(\rho'(Y))) \\
&= \exp(\rho'(Y) + ad_{\rho'(X)}(\rho'(Y))) \\
&= \exp(\rho'(Y) + \rho'([X,Y])) \\
&= \rho(\exp([X,Y])\exp(Y))
\end{aligned}$$

de sorte que:

$$uvu^{-1}v^{-1} = \exp([X,Y]) \in U_{\alpha+\beta}.$$

remarqué: si S et T sont deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension finie on a:

$$\exp(S)\exp(T)\exp(-S) = \exp(\exp(ad_S)T)$$

On a en effet:

$$\begin{aligned}\exp(ad_S)T &= \exp(L_S + R_{-S})T \\ &= \exp(L_S)\exp(R_{-S})T \\ &= L_{\exp(S)}R_{\exp(-S)}T \\ &= \exp(S)T\exp(-S). \blacktriangleright\end{aligned}$$

7) $U_{-\alpha_i} \setminus \{e\} \subset U_{\alpha_i} q_i T\, U_{\alpha_i}$

▶ On a $U_{\alpha_i}^{r_i} = U_{-\alpha_i}$; soit $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}\setminus\{0\}$ et posons $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i,X_i}$. On a alors, pour $t \in \mathbb{C}^*$:

$$\varphi_i(y(t)) = \varphi_i(x(t^{-1}))\varphi_i(h(-t^{-1}))\varphi_i(r(1))\varphi_i(x(t^{-1})) \ \blacktriangleright \ \bullet$$

<u>proposition</u> <u>2.2</u>

N est le normalisateur de T dans G

● Soit $\mathcal{N}$ le normalisateur de T dans N; alors $\mathcal{N}$ vérifie les propriétés suivantes:

i) $\mathcal{N} \supset N$ puisque T est un sous-groupe distingué de N

ii) si $g = uv \in \mathcal{N}$ avec $u \in U_+$, $v \in U_-$ on a $u,v \in \mathcal{N}$; pour tout $h \in T$ on a $(h^{-1}u^{-1}h)u = h^{-1}v(g^{-1}hg)v^{-1}$; comme $g^{-1}hg \in T$, que T normalise U et que $U_+ \cap TU_- = \{e\}$ on a que $hu = uh$ d'où $u \in \mathcal{N}$ et $v \in \mathcal{N}$.

iii) $\mathcal{N} \cap U_{\alpha_i} = \{e\}$ pour $1\le i\le l$; soit $g \in \mathcal{N} \cap U_{\alpha_j}$, pour tout $h \in T$ on a $h^{-1}gh = g' = U_{\alpha_j}$ et par suite:

$$ghg^{-1} = hg'g^{-1} \in T \cap TU_+ = T$$

d'où $g = g'$. Mais $g = x_j(s)$ et en prenant $h = t^{H_i}$ on a $g' = x_j(t^{A_{i,j}}s)$ de sorte que $s = 0$ ie $g = e$.

iv) $\mathcal{N} \cap U = \{e\}$; tout d'abord N normalise $\mathcal{N} \cap U_+$; comme N est engendré par T et les q_i, $1\le i\le l$, et que T normalise U_+ il suffit de montrer que les q_i normalisent $\mathcal{N} \cap U_+$: soit $g \in \mathcal{N} \cap U_+$; on a $q_i g q_i^{-1} = uv$ avec $u \in U_+ \cap q_i U_+ q_i^{-1}$ et $v \in U_- \cap q_i U_+ q_i^{-1}$; comme

$q_i g q_i^{-1} \in \mathcal{N}$ on a $u, v \in \mathcal{N}$. Mais alors $q_i^{-1} v q_i \in \mathcal{N} \cap U_{\alpha_i}$ ($q_i^{-1} v q_i \in \mathcal{N}$ car $q_i, v \in N \subset \mathcal{N}$ et $q_i^{-1} v q_i \in U_+ \cap V^{r_i} = U_{\alpha_i}$) donc $q_i^{-1} v q_i = e$ ie $v = e$ et $q_i g q_i^{-1} \in \mathcal{N} \cap U_+$. On a alors $\mathcal{N} \cap U_+ \subset \bigcap_{n \in N} n U_+ n^{-1} = \{e\}$.

On a de même $\mathcal{N} \cap U_- = \{0\}$

v) $\mathcal{N} = N$; soit $g \in \mathcal{N}$; écrivons $g = nuv$ avec $u \in U_+$ et $v \in U_-$; on a $uv \in \mathcal{N}$ donc $u \in \mathcal{N}$ et $v \in \mathcal{N}$ d'où $u = v = e$. ●

<u>proposition</u> <u>2.3</u>

T est égal à son centralisateur dans G.

● Il suffit de montrer que T est égal à son centralisateur dans N; soit $n \in N$ tel que $nh = hn$ pour tout $h \in T$; soit $w \in W$ tel que $\pi(n) = w$; pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $t \in \mathbb{C}^*$ on a $nt^{H_\alpha} = t^{H_\alpha} n$. Pour tout $\mathfrak{g}$-module V de dimension finie et tout $v \in V_\lambda$ on a donc:

$$nt^{H_\alpha}.v = \lambda(H_\alpha) n.v = t^{H_\alpha} n.v = w(\lambda)(H_\alpha) n.v$$

d'où $w(\lambda) = \lambda$ ie $w = 1$ et $n \in T$. ●

<u>proposition</u> <u>2.4</u>

Soit $\mathcal{Z}(G)$ le centre de G;

1) On a $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} gBg^{-1}$; en particulier $\mathcal{Z}(G) \subset T$.

2) $\mathcal{Z}(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P/\,Q, \mathbb{C}^*)$.

● 1) $\mathcal{Z}(G)$ étant un sous-groupe distingué de G, on a $\mathcal{Z}(G)B = G_S$ où $S \subset \{1,..,l\}$ et G_S est le sous-groupe de G engendré par B et les q_i avec $i \in S$ ($\pi(q_i) = r_i$). Supposons que C ne soit pas contenu dans B ie que $S \neq \emptyset$: on alors $q_i = cb_o$ avec $c \in \mathcal{Z}(G)$ et $b_o \in B$. Pour tout $b \in B$ on a alors $q_i b q_i^{-1} = cb_o b b_o^{-1} c^{-1} = b_o b b_o^{-1} \in B$ de sorte que q_i normalise B. Mais on a $U_{-\alpha_i} = U_{\alpha_i}^{r_i} \subset B^{r_i} \subset B$ d'où une contradiction et $\mathcal{Z}(G) \subset B$. On a alors $\mathcal{Z}(G) \subset \bigcap_{g \in G} gBg^{-1} \subset \bigcap_{n \in N} nBn^{-1} = T$.

Posons $C' = \bigcap_{g \in G} gBg^{-1}$; alors C' centralise U, on a en effet:

$$c'uc'^{-1}u^{-1} \in C' \cap U = \{e\}$$

donc C' centralise gUg^{-1} pour tout $g \in G$. Comme G est engendré par les conjugués de U, on a $C' \subset \mathcal{Z}(G)$.

2) Considérons l'isomorphisme de groupes:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \longrightarrow & T \\ (t_i)_i & \longrightarrow & \prod_i t_i^{H_i} \end{array}$$

Soit $t = \prod_i t_i^{H_i} \in T$; on a $t \in \mathcal{Z}(G)$ si et seulement si $Ad(t) = id_{\mathfrak{g}}$. Cette dernière condition signifie que, pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ on a:

$$Ad(t)X = (\prod_i t_i^{\alpha(H_i)})X = X$$

ie $\prod_i t_i^{\alpha(H_i)} = 1$. D'autre part, les poids fondamentaux Λ_i, $1 \le i \le l$, forment une base de P et l'on a $\alpha_j = \sum_i A_{i,j}\Lambda_i$ de sorte que pour un homomorphisme $f : P \longrightarrow \mathbb{C}^*$ on a $f(Q) = \{1\}$ si et seulement si on a:

$$f(\alpha) = f(\sum_j n_j\alpha_j) = \prod_j f(\alpha_j)^{n_j}$$

$$= \prod_{i,j} f(\Lambda_i)^{A_{i,j}n_j} = \prod_i f(\Lambda_i)^{\sum_j A_{i,j}n_j}$$

$$= \prod_i f(\Lambda_i)^{\alpha(H_i)} = 1. \bullet$$

CHAPITRE XII

ALGEBRES DE LIE ET GROUPES DE KAC-MOODY AFFINES

1. Algèbres de Lie affines.

A. Construction des algèbres affines.

On considère une algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$, $\Pi = \{ \alpha_i \ / \ 1 \le i \le l \}$ un système simple de racines et Φ_+ l'ensemble des racines positives de Φ relativement à Π.

Puisque $\mathfrak{g}$ est simple, la représentation adjointe:

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

est irréductible de sorte l'ensemble $\Phi \cup \{0\}$ de ses poids possède un plus grand élément θ (la plus grande racine).

On munit dorénavant $\mathfrak{g}$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante (forme de Killing normalisée):

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(X,Y) \longrightarrow (X|Y) = \frac{1}{2} K(\theta,\theta) K(X,Y)$$

de sorte que l'on a $(\lambda|\mu) = \dfrac{2}{K(\theta,\theta)} K(\lambda,\mu)$ pour $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*$ et, en particulier $(\theta|\theta) = 2$.

● Soit $c \in \mathbb{C}$; on considère sur $\mathfrak{g}$ la forme bilinéaire symétrique non dégénérée définie par $(X|Y) = cK(X,Y)$ pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$. On a alors, pour tout $H \in \mathfrak{h}$ et tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$:

$$\lambda(H) = K(h_\lambda, H) = \frac{1}{c}(h_\lambda|H).$$

L'isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathfrak{h}^*$ dans $\mathfrak{h}$ correspondant à la forme $(.|.)$ est donc $\lambda \longrightarrow \frac{1}{c} h_\lambda$.

La forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathfrak{h}^*$ obtenue par transport de structure est donnée par:

$$(\lambda|\mu) = (\tfrac{1}{c}h_\lambda | \tfrac{1}{c}h_\mu) = \frac{1}{c} K(h_\lambda, h_\mu) = \frac{1}{c} K(\lambda,\mu)$$

On doit donc prendre $c = \frac{1}{2} K(\theta,\theta)$ pour que $(\theta|\theta) = 2$. ●

Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(t)$ (corps des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{C}$) de base $(t^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une sous-algèbre $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ de $\mathbb{C}(t)$ (algèbre des polynômes de Laurent, c'est aussi l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbb{C}^*$).

Le résidu Res(f) d'un polynôme de Laurent $f \in \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ est le coefficient t^{-1} dans la décomposition de f sur la base $(t^k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

On munit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel:

$$L\mathfrak{g} = \mathbb{C}[t,t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$$

de l'unique application $\mathbb{C}$-bilinéaire:

$$[.,.]_t : L\mathfrak{g} \times L\mathfrak{g} \longrightarrow L\mathfrak{g}$$

telle que $[f \otimes X, g \otimes Y]_t = (fg) \otimes [X,Y]$ pour $f,g \in \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ et $X,Y \in \mathfrak{g}$ de sorte que $L\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension infinie sur $\mathbb{C}$ (loop algebra).

Une dérivation D de $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire $D : \mathbb{C}[t,t^{-1}] \longrightarrow \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ telle que:

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg) \text{ pour tout } f,g \in \mathbb{C}[t,t^{-1}]$$

On prolonge D en une dérivation de l'algèbre de Lie $L\mathfrak{g}$ en posant:

$$D(f \otimes X) = Df \otimes X$$

pour tout $f \in \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ et $X \in \mathfrak{g}$.

Enfin on considère l'unique application $\mathbb{C}$-bilinéaire:

$$(.,.)_t : L\mathfrak{g} \times L\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}[t,t^{-1}]$$

telle que $(f \otimes X, g \otimes Y)_t = (X|Y)(fg)$ pour $f,g \in \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ et $X,Y \in \mathfrak{g}$.

La forme $\mathbb{C}$-bilinéaire:

$$\omega : L\mathfrak{g} \times L\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par $\omega(x,y) = \mathrm{Res}(\frac{d}{dt}x|y)_t$ pour $x,y \in L\mathfrak{g}$ est un 2-cocycle c'est à dire que la forme ω est alternée et vérifie la condition:

$$\omega([x,y],z) + \omega([y,z],x) + \omega([z,x],y) = 0$$

pour tout $x,y,z \in L\mathfrak{g}$.

Le 2-cocycle ω définit une extension centrale:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}C \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}' \longrightarrow L\mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

avec $\tilde{\mathfrak{g}}' = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}C$ et $[x + cC, y + c'C] = [x,y]_t + \omega(x,y)C$ pour tout $x,y \in L\mathfrak{g}$ et tout $c,c' \in \mathbb{C}$.

La dérivation D de $L\mathfrak{g}$ définie par la dérivation $t\frac{d}{dt}$ de $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ se prolonge en une dérivation D de $\tilde{\mathfrak{g}}'$ en posant $D(C) = 0$.

L'algèbre de Lie affine $\tilde{\mathfrak{g}}$ associée à $\mathfrak{g}$ est le produit semi-direct:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}' \times \mathbb{C}D.$$

On a donc finalement:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}C \oplus \mathbb{C}D$$

avec le crochet défini par:

$$[x + cC + dD, y + c'C + d'D] = [x,y]_t + (dDy - d'Dx) + \omega(x,y)C$$

pour tout $x,y \in L\mathfrak{g}$ et tout $c,c',d,d' \in \mathbb{C}$ ou encore, plus explicitement:

$$[t^m \otimes X + cC + dD, t^n \otimes Y + c'C + d'D]$$
$$= t^{m+n} \otimes [X,Y] + (ndt^n \otimes Y - md't^m \otimes X) + \delta_{m,-n} m(X|Y)C.$$

En particulier on voit que $\tilde{\mathfrak{g}}'$ est l'algèbre dérivée de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et que l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \\ X &\longrightarrow 1 \otimes X \end{aligned}$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie permettant d'identifier canoniquement $\mathfrak{g}$ à la sous-algèbre $1 \otimes \mathfrak{g}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

B. La forme invariante.

On munit $\tilde{\mathfrak{g}}$ de la forme bilinéaire symétrique invariante (forme canonique):

$$(x + cC + dD|y + c'C + d'D) = \mathrm{Res}(t^{-1}(x|y)_t) + (cd' + c'd)$$

pour tout $x,y \in L\mathfrak{g}$ et tout $c,c',d,d' \in \mathbb{C}$ ou plus explicitement:

$$(t^m \otimes X + cC + dD|t^n \otimes Y + c'C + d'D) = \delta_{m,-n}(X|Y) + (cd' + c'd)$$

On pose $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}C \oplus \mathbb{C}D$; on a:

$$(H + cC + dD|H' + c'C + d'D) = (H|H') + cd' + c'd$$

de sorte que $\tilde{\mathfrak{h}}$ est somme directe orthogonale de $\mathfrak{h}$ muni de la forme de Killing normalisée et du plan hyperbolique $\mathbb{C}C \oplus \mathbb{C}D$. Ainsi la restriction à $\tilde{\mathfrak{h}}$ de la forme canonique est non dégénérée.

On identifie alors $\mathfrak{h}^*$ au sous-espace des $\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ tels que $\lambda(C) = \lambda(D) = 0$ et on considère les formes linéaires $\delta, \Lambda_o \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ définies par:

$$\delta|\mathfrak{h}^* = \Lambda_o|\mathfrak{h}^* = 0$$
$$\delta(C) = 0 \text{ et } \delta(D) = 1$$
$$\Lambda_o(C) = 1 \text{ et } \Lambda_o(D) = 0$$

de sorte que:

$$\tilde{\mathfrak{h}}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_o .$$

La forme canonique définit donc un isomorphisme $\tilde{\lambda} \longrightarrow h_{\tilde{\lambda}}^{\sim}$ de $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ sur $\tilde{\mathfrak{h}}$ tel que $\tilde{\lambda}(\tilde{H}) = (h_{\tilde{\lambda}}^{\sim} | \tilde{H})$ pour tout $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ et tout $\tilde{H} \in \tilde{\mathfrak{h}}$.

En particulier si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\tilde{h}_\lambda$ est orthogonal à C et D donc $\tilde{h}_\lambda \in \mathfrak{h}$ et l'on a $\lambda(H) = (\tilde{h}_\lambda | H)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$ de sorte que $\tilde{h}_\lambda = \dfrac{2}{K(\theta,\theta)} h_\lambda$ tandis que $\tilde{h}_\delta = D$ et $\tilde{h}_{\Lambda_o} = C$. Finalement on trouve:

$$\tilde{h}_{\lambda+d\delta+c\Lambda_o} = \frac{2}{K(\theta,\theta)} h_\lambda + cC + dD$$

de sorte que la forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ obtenue par transport de structure est donnée par:

$$(\lambda + d\delta + c\Lambda_o | \mu + d'\delta + c'\Lambda_o) = (\lambda | \mu) + cd' + c'd$$

Ainsi $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ est somme directe orthogonale de $\mathfrak{h}^*$ muni de la forme de Killing normalisée et du plan hyperbolique $\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\Lambda_o$.

C. La décomposition radicielle.

On a la décomposition en somme directe (décomposition radicielle):

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \sum t^k \otimes \mathfrak{g}_\alpha$$

avec $(k,\alpha) \in (\mathbb{Z} \times (\Phi \cup \{0\})) \setminus \{(0,0)\}$.

De plus on a:

$$\tilde{\mathfrak{h}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_o$$

$$t^k \otimes \mathfrak{g}_\alpha \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+k\delta} \qquad \text{pour } \alpha \in \Phi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$t^k \otimes \mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{k\delta} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

et comme la somme $\sum \tilde{\mathfrak{g}}_\gamma$ est directe, les trois inclusions précédentes sont des égalités de sorte que $\tilde{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre diagonalisable maximale de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (on dit que $\tilde{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$).

L'ensemble des racines (de Kac-Moody) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (relativement à $\tilde{\mathfrak{h}}$) est:

$$\Delta = \{ \alpha + k\delta \,/ (k,\alpha) \in (\mathbb{Z} \times (\Phi \cup \{0\})) \setminus \{(0,0)\} \}$$

D. Racines réelles et imaginaires.

On a une partition:

$$\Delta = \Delta^{re} \amalg \Delta^{im}$$

où:

$$\Delta^{re} = \{ \alpha + k\delta \ / \ (k,\alpha) \in \mathbb{Z} \times \Phi \}$$

est l'ensemble des racines réelles (ou racines de Weyl) et

$$\Delta^{im} = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\delta$$

est l'ensemble des racines imaginaires.

Pour toute racine réelle $\alpha + k\delta \in \Delta^{re}$ on a:

$$(\alpha + k\delta | \alpha + k\delta) = (\alpha|\alpha) \in \mathbb{Q}_+^*$$

et:

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+k\delta} = t^k \otimes \mathfrak{g}_\alpha$$

de sorte que $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+k\delta}) = 1$ tandis que, pour toute racine imaginaire $k\delta \in \Delta^{im}$ on a:

$$(k\delta|k\delta) = 0$$

et:

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{k\delta} = t^k \otimes \mathfrak{h}$$

de sorte que $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathfrak{g}}_{k\delta}) = 1$.

Enfin les sous-espaces $\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_{\gamma'}$ sont orthogonaux pour $\gamma + \gamma' \neq 0$; tandis que, pour $\gamma \in \Delta$ le restriction de la forme canonique à $\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_{-\gamma}$ est non dégénérée; ainsi la forme canonique sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée.

E. Systèmes simples de racines.

Soit $\alpha_0 = \delta - \theta \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$; alors:

$$\tilde{\Pi} = \{ \alpha_i \ / \ 0 \leq i \leq l \}$$

est un système simple de racines de Δ (ie c'est une partie libre de $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ et toute racine s'écrit comme combinaison linéaire des α_i, $0 \leq i \leq l$, à coefficients entiers tous de même signe).

● Tout d'abord on a $\theta = \sum_{1\leq i\leq l} a_i\alpha_i$ avec $a_i > 0$ pour $1 \leq i \leq l$.

On a naturellement $\theta \in \Phi_+$; soit I l'ensemble des $i \in \{1,..,l\}$ tels que $a_i \neq 0$; puisque, pour tout $j \in \{1,..,l\}$, $\theta + \alpha_j$ n'est pas une racine on a:

$$(\theta|\alpha_j) = \sum_{i\in I} a_i(\alpha_i|\alpha_j) \geq 0$$

de sorte que $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ ie $A_{i,j} = 0$ pour $i \in I$ et $j \in \{1,..,l\}\setminus I$. Comme le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g}$ est connexe on a $I = \{1,..,l\}$.

On pose $a_o = 1$ de sorte que $\delta = \sum_{0\leq i\leq l} a_i\alpha_i$. Considérons alors une racine réelle $\alpha + k\delta$; on a alors:

$$\alpha + k\delta = \sum_{1\leq i\leq l} (n_i + ka_i)\alpha_i + k\alpha_o.$$

Supposons $k \geq 0$; si $n_i \geq 0$ pour $i \in \{1,..,l\}$ on a $n_i + ka_i \geq 0$ tandis que si $n_i \leq 0$ pour $i \in \{1,..,l\}$, $-\alpha$ est une racine positive de sorte que $\alpha + \theta \geq 0$ et on a encore $n_i + ka_i \geq 0$. Ainsi tous les coefficients de $\alpha + k\delta$ sont des entiers du signe de k. ●

Les racines positives (relativement à $\tilde{\Pi}$) sont donc:

les racines réelles $\alpha + k\delta$ avec $k > 0$ et $\alpha \in \Phi$ ou
$k = 0$ et $\alpha \in \Phi_+$

les racines imaginaires $k\delta$ avec $k > 0$.

F. Bases de Chevalley.

Soient $((H_i)_{1\leq i\leq l}, (X_\alpha)_{\alpha\in\Phi})$ une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ associée au système simple de racines $\Pi = \{\alpha_i / 1\leq i\leq l\}$ et ω l'involution de Chevalley qu'elle définit; on pose:

$$X_o = t \otimes Y_\theta \in \mathfrak{g}_{\alpha_o}$$

$$Y_o = t^{-1} \otimes X_\theta \in \mathfrak{g}_{-\alpha_o} \quad \text{d'où:}$$

$$H_o = [X_o,Y_o] = [X_o,Y_o]_t + \omega(X_o,Y_o)C$$
$$= -H_\theta + (X_\theta|Y_\theta)C$$

mais on a:

$$[X_\theta,Y_\theta] = H_\theta = \frac{2h_\theta}{K(\theta|\theta)}$$
$$= K(X_\theta,Y_\theta)h_\theta$$

d'où $(X_\theta|Y_\theta) = 1$ et finalement:

$$H_o = -H_\theta + C$$

Plus généralement on pose:

$$X_{\alpha+n\delta} = t^n \otimes X_\alpha \quad \text{pour } \alpha \in \Phi \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

$$X^{(i)}_{n\delta} = t^n \otimes H_i \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ et } 1\le i\le l$$

alors $((H_i)_{0\le i\le l}, D, (X_{\alpha+n\delta})_{\alpha+n\delta\in\Delta^{re}}, (X^{(i)}_{n\delta})_{1\le i\le l, n\delta\in\Delta^{im}})$ est une base de $\tilde{g}$ appelée encore base de Chevalley et l'involution de Chevalley $\tilde{\omega}$ correspondante est donnée par:

$$\tilde{\omega}(f(t) \otimes X + cC + dD) = f(t^{-1}) \otimes \omega(X) - cC - dD)$$

G. Matrice de Cartan.

La matrice de Cartan de $\tilde{g}$ (ou matrice de Cartan affine) est la matrice $\tilde{A} = (A_{i,j})_{0\le i,j\le l}$ avec $A_{i,j} = \alpha_j(H_i)$. On a:

$$A_{i,i} = 2$$

$A_{i,j}$ est un entier négatif pour $i \neq j$

$$A_{i,j} = 0 \iff A_{j,i} = 0$$

● On a:

$$\alpha_0(H_0) = (-\theta + \delta)(-H_\theta + C) = 2;$$

$$\alpha_i(H_0) = -\alpha_i(H_\theta) = -a_{\alpha_i,\theta} \le 0 \text{ et}$$

$$\alpha_0(H_i) = -\theta(H_i) = -a_{\theta,\alpha_i} \le 0$$

puisque $(\theta|\alpha_i) \ge 0$ pour $1 \le i \le l$. ●

H. Groupe de Weyl.

Pour $0 \le i \le l$, on considère la symétrie de $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ définie par:

$$r_i : \tilde{\mathfrak{h}}^* \longrightarrow \tilde{\mathfrak{h}}^*$$
$$\lambda \longmapsto \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$$

Le groupe de Weyl (affine) est le sous-groupe $\tilde{W}$ de $GL(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$ engendré par $\{r_i \ / \ 0\le i\le l\}$. Le groupe de Weyl W de g s'identifie au sous-groupe de $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ engendré par les r_i, $1\le i\le l$.

L'ensemble des racines Δ est stable par $\tilde{W}$ puisque:

$$r_i(\alpha + k\delta) = r_i(\alpha) + k\delta \qquad 1\le i\le l$$

$$r_0(\alpha + k\delta) = r_\theta(\alpha) + (a_{\alpha,\theta} + k)\delta$$

$$r_i(k\delta) = k\delta \qquad 0\le i\le l.$$

de sorte que l'on a:

$$\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\} \text{ est stable par } r_i$$
$$\alpha_j = w(\alpha_i) \Rightarrow r_j = w \circ r_i \circ w^{-1}$$

● Supposons que $\alpha_j = w(\alpha_i)$; il existe un automorphisme θ_w de $\tilde{g}$ tel que $\theta_w(g_\gamma) = g_{w(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in \Delta$. On a alors $[X_i, Y_i] = H_i$ d'où $[\theta_w X_i, \theta_w Y_i] = wH_i = sH_j$ et $2s = s\alpha_j(H_j) = w(\alpha_i)w(H_i) = \alpha_i(H_i) = 2$. On a donc $H_j = w(H_i)$. ●

On sait que $\tilde{W}$ est alors un groupe de Coxeter et que l'ordre de $r_i r_j$ est donné par:

$A_{i,j}A_{j,i}$	0	1	2	3	≥ 4
$m_{i,j}$	2	3	4	6	∞

De plus $w^{-1}(\alpha_i) \in -\Delta_+$ si et seulement si $\ell(r_i w) < \ell(w)$. Il en résulte que si $w \in \tilde{W}$ et $w(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ on a $w = 1$.

● Supposons que $w \neq 1$ et considérons une décomposition réduite $w = r_{i_1} \ldots\ldots r_{i_k}$ de w avec $k \geq 1$; on a $\ell(r_{i_1} w) < \ell(w)$ de sorte que $w^{-1}(\alpha_{i_1}) = -\alpha_{i_1} \in -\Delta_+$ d'où une contradiction et $w = 1$. ●

Pour $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$ on définit $r_{\alpha+n\delta} \in \tilde{W}$ par

$$r_{\alpha+n\delta}(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda \mid \alpha+n\delta)}{(\alpha \mid \alpha)} \lambda$$

pour tout $\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ et on pose $t_{\alpha,n} = r_{\alpha+n\delta} \circ r_\alpha$. On désigne par $\mathfrak{T}$ le sous-groupe de $\tilde{W}$ engendré par les $t_{\alpha,n}$ avec $\alpha \in \Phi$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors l'application:

$$\begin{array}{ccc} Q^{\vee} & \longrightarrow & \mathfrak{T} \\ \sum c_i H_i & \longrightarrow & \prod t_{\alpha_i, c_i} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes et $\tilde{W}$ est produit semi-direct des sous-groupes W et $\mathfrak{T}$ et l'on a, pour $w \in W$, $\alpha \in \Phi$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$w t_{\alpha,n} w^{-1} = t_{w(\alpha),n}$$

● On peut identifier $\tilde{W}$ à un sous-groupe de $GL(\mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\delta)$ (puisque $w(\alpha_i) = \alpha_i$ pour $0 \leq i \leq l$ implique que $w = 1$ et que $\alpha_o = \delta - \theta$) et on a, pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$r_{\alpha+n\delta}(\lambda+k\delta) = r_\alpha(\lambda)+(k-na_{\lambda,\alpha})\delta$$

avec $a_{\lambda,\alpha} = \lambda(H_\alpha)$ de sorte que:

$$t_{\alpha,n}(\lambda+k\delta) = \lambda+(k+na_{\lambda,\alpha})\delta$$

On a alors:

$$t_{\alpha,k} \cdot t_{\alpha,k'} = t_{\alpha,k+k'}$$
$$t_{\alpha,o} = id$$
$$t_{\alpha,k} \circ t_{\beta,k'} = t_{\beta,k'} \circ t_{\alpha,k}$$

Ainsi le sous-groupe $\mathfrak{T}$ est engendré par les $t_\alpha = t_{\alpha,1}$, $\alpha \in \Phi$ et est abélien. De plus, $\mathfrak{T}$ est normalisé par W puisque l'on a:

$$r_\alpha \circ t_{\beta,k} \circ r_\alpha = t_{r_\alpha(\beta),k}$$

Ensuite $\mathfrak{T}$ est engendré par les t_{α_i} $1 \leq i \leq l$: soit $\alpha = \sum n_i \alpha_i$; on a alors $H_\alpha = \sum n_i' \alpha_i$ avec $n_i' = \dfrac{n_i(\alpha_i|\alpha_i)}{(\alpha|\alpha)}$ de sorte que $a_{\lambda,\alpha} = \sum n_i' a_{\lambda,\alpha_i}$ et ainsi $t_\alpha = t_{\alpha_1,n_1'} \circ \cdots\cdots \circ t_{\alpha_l,n_l'}$. Enfin supposons que l'on ait:

$$t_{\alpha_1,c_1} \circ \cdots\cdots \circ t_{\alpha_l,c_l} = 1$$

On a alors:

$$\sum c_i a_{\lambda,\alpha_i} = 0 \text{ pour tout } \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

de sorte que $\sum c_i H_i = 0$ ie $c_i = 0$ pour $1 \leq i \leq l$.

On a $\tilde{W} = W.\mathfrak{T}$. Supposons que $w \in W \cap \mathfrak{T}$; on a donc:

$$w(\lambda) = \lambda + \sum c_i \lambda(H_i)\delta \text{ pour tout } \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

mais $w(\lambda) \in \mathfrak{h}^*$ d'où $\sum c_i H_i = 0$ et $w = 1$. ●

2. Modules simples à plus grand poids.

A. Modules de Verma et modules simples à plus grand poids.

Un $\tilde{\mathfrak{g}}$-module V est diagonalisable si l'on a la décomposition en somme directe:

$$V = \sum_{\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*} V_\lambda$$

où $V_\lambda = \{v \in V / Hv = \lambda(H)v \ \ \forall H \in \tilde{\mathfrak{h}}\}$. L'ensemble des $\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ telles que $V_\lambda \neq \{0\}$ est l'ensemble $P(V)$ des poids de V.

On pose $\tilde{\mathfrak{n}}_\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\tilde{\mathfrak{b}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+$. Pour $\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$; le module de Verma $M(\Lambda)$ associé à Λ est le $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$-module:

$$M(\Lambda) = \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{b}})} \mathbb{C}_\Lambda$$

où $\mathbb{C}_\Lambda$ est le $\tilde{\mathfrak{b}}$-module ayant $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sous-jacent et tel que, pour tout $c \in \mathbb{C}$:

$$Hc = \Lambda(H)c \text{ pour tout } H \in \tilde{\mathfrak{h}}$$
$$\tilde{\mathfrak{n}}_+ \subset \operatorname{ann}(\mathbb{C}_\Lambda).$$

Alors le $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$-module $M(\Lambda)_{[\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{n}}_-)]}$ est libre de base $v_\Lambda = 1_{\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})} \otimes 1$.

Un $\tilde{\mathfrak{g}}$-module V est à plus grand poids $\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ si V est engendré par un vecteur non nul $v \in V_\Lambda$ tel que $\tilde{\mathfrak{n}}_+ \subset \operatorname{ann}(v)$. Un tel module est un quotient du module de Verma $M(\Lambda)$. De plus, il existe un unique $\tilde{\mathfrak{g}}$-module $L(\Lambda)$ simple à plus haut poids Λ: c'est le quotient de $M(\Lambda)$ par son plus grand sous-module.

Un $\tilde{\mathfrak{g}}$-module V possède un caractère s'il vérifie les conditions:

i) V est diagonalisable

ii) V_λ est de dimension finie pour tout $\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$

iii) $P(V)$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ensembles de la forme $D(\Lambda) = \{\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^* / \lambda \le \Lambda\}$ avec $\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$.

Le caractère de V est alors défini par:

$$ch(V) = \sum_{\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*} \dim(V_\lambda) e^\lambda \quad \in \mathbb{Z}\langle\tilde{\mathfrak{h}}^*\rangle$$

où $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ est l'anneau des applications f de $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ dans $\mathbb{Z}$ dont le support est contenu dans une réunion finie de parties de $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ de la forme $D(\Lambda)$. Pour $f,g \in \mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$, on a:

$$(fg)(\lambda) = \sum_{\mu \in \tilde{\mathfrak{h}}^*} f(\mu) g(\lambda - \mu)$$

<u>proposition</u> <u>2.1.</u>

Soit $\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$, le module de Verma $M(\Lambda)$ possède un caractère et l'on a:

$$ch(M(\Lambda) = \frac{e^{\Lambda + \tilde{\rho}}}{\tilde{\mathfrak{D}}}$$

avec:

$$\tilde{\mathfrak{D}} = e^{\tilde{\rho}} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha}$$

où $m_\alpha = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ (ie $m_\alpha = 1$ ou 1 selon que α est réelle ou imaginaire).

● Posons $\Phi_+ = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$; pour chaque $k \geq 1$, soit $(Z_{-\gamma_k}^{i_k})_{1 \leq i_k \leq m_k}$ une base de $\tilde{g}_{-\gamma_k}$ (où m_k est la multiplicité de la racine γ_k) de sorte, pour tout $\lambda \leq \Lambda$, les vecteurs:

$$Z_{-\gamma_1}^{\nu_{1,1}} \dots Z_{-\gamma_1}^{\nu_{1,m_1}} Z_{-\gamma_2}^{\nu_{2,1}} \dots Z_{-\gamma_2}^{\nu_{2,m_2}} \dots\dots v_\Lambda$$

avec $\nu_{1,1} + \dots + \nu_{1,m_1} + \nu_{2,1} + \dots + \nu_{2,m_2} + \dots\dots = \Lambda - \lambda$

forment une base de $M(\Lambda)_\lambda$. On a donc:

$$\begin{aligned} ch(M(\Lambda)) &= \sum_{\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*} \dim(M(\Lambda)_\lambda) e^\lambda \\ &= \sum_{\lambda \in \tilde{Q}} \dim(M(\Lambda)_{\Lambda-\lambda}) e^{-\lambda} \\ &= e^\Lambda \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{-m_\alpha}. \end{aligned}$$ ●

corollaire.

Soit V un $\tilde{g}$-module; les conditions suivantes sont équivalentes:

V est simple et possède un caractère

V est isomorphe à $L(\Lambda)$ pour $\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$

● Soient Λ un élément maximal de $P(V)$ et $v \in V_\Lambda \setminus \{0\}$; on a $\tilde{n}_+ v = \{0\}$ et, puisque V est simple $V = \mathcal{U}(\tilde{g})v$ de sorte que V est à plus grand poids Λ. ●

B. Modules intégrables.

Un $\tilde{g}$-module V est intégrable s'il est diagonalisable et si les endomorphismes $X_{i,V}$ et $Y_{i,V}$, $0 \leq i \leq 1$ sont localement nilpotents. L'ensemble $P(V)$ des poids d'un $\tilde{g}$-module intégrable V est stable par le groupe de Weyl $\tilde{W}$.

proposition 2.2.

1) Un $\tilde{g}$-module V à plus grand poids Λ est intégrable si et seulement si $\Lambda(H_i) \in \mathbb{N}$ et $Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda = 0$ pour $0 \leq i \leq 1$.

2) Le $\tilde{g}$-module $L(\Lambda)$ est intégrable si et seulement si $\Lambda(H_i) \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq 1$.

● 1) Tout d'abord, notons qu'un $\tilde{g}$-module V à plus grand poids Λ

est intégrable si et seulement si $Y_i^n v_\Lambda = 0$ pour $n \gg 0$ et $0 \le i \le l$ où $v_\Lambda \in V_\Lambda \setminus \{0\}$: en effet les endomorphismes ad_{X_i} et ad_{Y_i} sont localement nilpotents sur $\tilde{g}$ et la formule du binôme appliquée à $L_{Z_V} = ad_{Z_V} - R_{Z_V}$ montre que:

$$Z_V^n X_V = \sum C_n^k (ad_Z^k X)_V \, Z_V^{n-k}$$

En prenant $Z = X_i$ ou Y_i, on voit que si $Z_V^n v = 0$ pour $n \gg 0$, on a encore, pour tout $X \in \tilde{g}$, $Z_V^{n'} X_V v = 0$ pour $n' \gg 0$ donc Z_V est localement nilpotent sur V.

Soit s_i la sous-algèbre de $\tilde{g}$ (isomorphe à $sl(2,\mathbb{C})$) engendrée par X_i et Y_i; on a $H_i v_\Lambda = \Lambda(H_i) v_\Lambda$ et:

$$X_i Y_i^n v_\Lambda = n(\Lambda(H_i) - n + 1) Y_i^{n-1} v_\Lambda$$

de sorte que si V est intégrable on a nécessairement $\Lambda(H_i) \in \mathbb{N}$ et $Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda = 0$, la réciproque étant évidente.

2) Prenons $V = L(\Lambda)$ et supposons que $\Lambda(H_i) \in \mathbb{N}$ pour tout i. La formule précédente montre alors que:

$$X_i Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda = 0$$

Comme $[X_j, Y_i] = 0$ pour $j \ne i$ et que $X_j v_\Lambda = 0$ on a finalement:

$$X_j Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda = 0 \text{ pour } 0 \le j \le l.$$

Supposons que $v = Y_i^{\Lambda(H_i)+1} v_\Lambda$ soit non nul; alors $\mathcal{U}(\tilde{g})v$ est un sous $\tilde{g}$-module à plus grand poids $\Lambda - (\Lambda(H_i)+1)\alpha_i$ de $L(\Lambda)$ et comme $L(\Lambda)$ est simple on a $L(\Lambda) = \mathcal{U}(\tilde{g})v$ d'où une contradiction et $v = 0$. ●

C. Opérateurs de Casimir.

Pour chaque racine positive $\alpha \in \Delta_+$, soient $(X_\alpha^{(i_\alpha)})_{1 \le i_\alpha \le m_\alpha}$ une base de $\tilde{g}_\alpha$ et $(X_{-\alpha}^{(i_\alpha)})_{1 \le i_\alpha \le m_\alpha}$ la base duale de $\tilde{g}_{-\alpha}$; de plus on considère deux bases duales de $\tilde{\mathfrak{h}}$: $(H_i)_{0 \le i \le l+1}$ et $(H'_i)_{0 \le i \le l+1}$. Pour tout $\tilde{g}$-module V possédant un caractère , on définit l'opérateur de Casimir de V, pour tout $v \in V$, par:

$$C_V v = 2h_{\tilde{\rho}}\, v + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \Big(\sum_{1 \le i_\alpha \le m_\alpha} X_{-\alpha}^{i_\alpha} X_\alpha^{i_\alpha} \Big) v + \sum_{0 \le i \le l+1} H'_i H_i v$$

proposition 2.3.

Soit V un $\mathfrak{g}$-module à plus grand poids Λ; on a:

$$C_V = (\Lambda + 2\tilde{\rho}|\Lambda)\ id_v$$

● Soit $v \in V_\Lambda \setminus \{0\}$; on a:

$$C_v v = 2h_{\tilde{\rho}}\, v + 2\sum_{\alpha\in\Delta_+} \Big(\sum_{1\le i_\alpha \le m_\alpha} X_{-\alpha}^{i_\alpha} X_{\alpha}^{i_\alpha} \Big) v + \sum_{0\le i\le l+1} H'_i H_i v$$

$$= 2\Lambda(h_{\tilde{\rho}}) v + \sum_{0\le i\le l+1} \Lambda(H'_i)\Lambda(H_i) v$$

$$= 2(\tilde{\rho}|\Lambda) v + (\Lambda|\Lambda) v$$

mais, pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$, on a $C_v X_v = X_v C_v$, et v engendre de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$-module V et l'égalité précédente est vraie pour tout $v \in V$. ●

D. La formule des caractères de Kac_Weyl.

proposition 2.4.

Soient V un $\tilde{\mathfrak{g}}$-module possédant un caractère et $\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$, alors il existe une filtration finie de V:

$$V = V_s \supset V_{s-1} \supset \ldots\ldots V_1 \supset V_0 = \{0\}$$

et une partie $I(\lambda) \subset \{1,\ldots,s\}$ telle que:

$$i \in I(\lambda) \Rightarrow V_i/\ V_{i-1} \simeq L(\lambda_i) \text{ avec } \lambda_i \ge \lambda$$

$$i \notin I(\lambda) \Rightarrow (V_i/\ V_{i-1})_\mu = \{0\} \text{ pour } \mu \ge \lambda$$

L'ensemble $I(\lambda)$ ne dépend pas de la filtration choisie, et pour tout $\mu \ge \lambda$, le nombre de fois $[V:L(\mu)]$ que μ figure dans $I(\lambda)$ ne dépend pas de λ et on a $[V:L(\mu)] \ne 0$ si et seulement s'il existe un sous-module U de V et un vecteur $v \in V_\mu \setminus U$ tel que $X_i v \in U$ pour tout i, $0 \le i \le l$. On a alors:

$$ch(V) = \sum_{\lambda\in\tilde{\mathfrak{h}}^*} [V:L(\lambda)]\ ch(L(\lambda))$$

● On montre le résultat par récurrence sur:

$$\nu(V,\lambda) = \sum_{\mu\ge\lambda} dim(V_\mu)$$

Si $\nu(V,\lambda) = 0$ on a le résultat avec la filtration $V_0 = \{0\} \subset V_1 = V$ et $I(\lambda) = \emptyset$. Supposons que $\nu(V,\lambda) > 0$; soient μ un élément maximal de $P(V)$ tel que $\mu \ge \lambda$ et $v \in V_\mu$, alors $U = \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})v$ est à plus grand poids μ donc contient un sous-module propre maximal U' d'où $U / U' \simeq L(\mu)$ avec $\mu \geq \lambda$, $\nu(U',\lambda) < \nu(V,\lambda)$ et $\nu(U,\lambda) < \nu(V,\lambda)$.

Posons $\phi(V) = ch(V) - \sum\limits_{\lambda\in\tilde{\mathfrak{h}}^*} [V:L(\lambda)]\, ch(L(\lambda))$; on a $\phi(L(\Lambda)) = 0$ et ϕ est additive sur les suites exactes de sorte que, pour tout $\lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$, on voit en choisissant une filtration de V de la forme précédente que l'on a $\phi(V) = \sum\limits_k \phi(Q_k)$ avec $Q_{k,\mu} = \{0\}$ pour tout $\mu \geq \lambda$ de sorte que le coefficient de e^{λ} dans $\phi(Q_k)$ est nul pour tout k donc $\phi(V) = 0$. ●

<u>proposition 2.5.</u>

Soit V un $\tilde{\mathfrak{g}}$-module à plus grand poids Λ, on a

$$ch(V) = \sum_{\lambda\in D_o(\Lambda)} n_\lambda ch(M(\lambda))$$

avec $D_o(\Lambda) = \{ \lambda \in D(\Lambda) /\ \|\lambda+\tilde{\rho}\|^2 = \|\Lambda+\tilde{\rho}\|^2 \}$ et $n_\Lambda = 1$.

● Il suffit de montrer le résultat pour $V = L(\Lambda)$. On peut indexer l'ensemble $D_o(\Lambda)$ de sorte que $\lambda_i \geq \lambda_j \Rightarrow i \leq j$ de sorte que l'on a:

$$ch(M(\lambda_i)) = \sum_j n_{i,j}\ ch(L(\lambda_j))$$

puisque l'opérateur de Casimir d'un sous-quotient $L(\lambda)$ de $M(\Lambda)$ est induit par celui de V de sorte que l'on a $(\Lambda + 2\tilde{\rho}|\Lambda) = (\lambda + 2\tilde{\rho}|\lambda)$ ie $\|\lambda+\tilde{\rho}\|^2 = \|\Lambda+\tilde{\rho}\|^2$. Alors la matrice $(n_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. ●

<u>proposition 2.6.</u> (formule des caractères de Kac-Weyl)

Soit $L(\Lambda)$ un $\tilde{\mathfrak{g}}$-module simple à plus grand poids $\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ tel que $\Lambda(H_i) \in \mathbb{N}$ pour $0 \leq i \leq l$; on a:

$$ch(L(\Lambda)) = \frac{\sum\limits_{w\in\tilde{W}} \varepsilon(w) e^{w(\Lambda+\rho)}}{\tilde{\mathfrak{D}}}$$

● On a

$$ch(V) = \sum_{\lambda\in D_o(\Lambda)} n_\lambda ch(M(\lambda))$$

avec $n_\lambda \in \mathbb{Z}$ et $n_\Lambda = 1$.

En multipliant cette égalité par $\tilde{\mathfrak{D}}$ on obtient:

$$\tilde{\mathfrak{D}}\, ch(L(\Lambda)) = \sum_{\lambda\in D_o(\Lambda)} n_\lambda\, \tilde{\mathfrak{D}}\, ch(M(\lambda))$$
$$= \sum_{\lambda\in D_o(\Lambda)} n_\lambda\, e^{\lambda+\tilde{\rho}}$$

Soit $D'(\Lambda)$ l'ensemble des $\lambda \in D_o(\Lambda)$ tels que $n_\lambda \neq 0$; pour tout $w \in \tilde{W}$ on a:

$$w(\tilde{\mathfrak{D}}) = \varepsilon(w)\tilde{\mathfrak{D}}$$
$$w(ch(L(\Lambda)) = ch(L(\Lambda))$$

de sorte que, pour tout $\lambda \in D'(\Lambda)$ on a:

$$n_{w(\lambda+\tilde{\rho})-\tilde{\rho}} = \varepsilon(w)n_\lambda \neq 0$$

donc $w(\lambda+\tilde{\rho})-\tilde{\rho} \in D'(\Lambda)$ et, en particulier, on a $w(\lambda+\tilde{\rho}) \leq \Lambda+\tilde{\rho}$ pour tout $w \in \tilde{W}$. Alors, il existe $\mu \in \{\, w(\lambda+\tilde{\rho})-\tilde{\rho} \;/\; w \in \tilde{W}\,\}$ tel que $\Lambda-\mu$ soit de hauteur minimale; posons $\mu_i = r_i(\mu)-\alpha_i = r_i w(\lambda+\tilde{\rho})-\tilde{\rho}$; la hauteur de $\Lambda-\mu_i$ est supérieure à celle de $\Lambda-\mu$ d'où:

$$(\Lambda-\mu) - (\Lambda-\mu_i) = \mu-r_i(\mu)+\alpha_i = (\mu(H_i)+1)\alpha_i \in \tilde{Q}_+$$

Or $\tilde{\rho}(H_i) = 1$ et finalement on a $(\mu+\tilde{\rho})(H_i) \geq 0$ pour tout i.
Mais on a:

$$\|\Lambda+\tilde{\rho}\|^2 - \|\mu+\tilde{\rho}\|^2 = (\Lambda+\mu+2\tilde{\rho}|\Lambda-\mu) = \sum_i (\Lambda+\mu+2\tilde{\rho}|\alpha_i) = 0$$

avec $\Lambda-\mu = \sum_i k_i\alpha_i \in \tilde{Q}_+$ et $(\Lambda+\mu+2\tilde{\rho}|\alpha_i) > 0$ pour tout i d'où $\Lambda-\mu = 0$ et par suite il existe $w \in \tilde{W}$ tel que $w(\lambda+\tilde{\rho}) = \Lambda+\tilde{\rho}$. Comme $\Lambda+\tilde{\rho}$ appartient à la chambre fondamentale (ie $(\Lambda+\tilde{\rho})(H_i) \geq 0$ pour tout i) l'élément w de $\tilde{W}$ tel que $w(\lambda+\tilde{\rho}) = \Lambda+\tilde{\rho}$ est unique.

Ainsi l'application $w \longrightarrow w(\Lambda+\tilde{\rho})-\tilde{\rho}$ est une bijection de $\tilde{W}$ sur $D'(\Lambda)$ de sorte que:

$$\tilde{\mathfrak{D}}\, ch(L(\Lambda)) = \sum n_\lambda e^{w(\Lambda+\tilde{\rho})}$$

et $n_\lambda = \varepsilon(w)n_\Lambda = \varepsilon(w)$. ●

<u>corollaire 1.</u> (formule du dénominateur)

$$\tilde{\mathfrak{D}} = \sum_{w\in\tilde{W}} \varepsilon(w)e^{w(\rho)}$$

corollaire 2.

Soit $\Lambda \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ tel que $\Lambda(H_i) \in \mathbb{N}$ pour $0 \le i \le l$; on a un isomorphisme de $\tilde{\mathfrak{g}}$-modules:

$$L(\Lambda) \simeq M(\Lambda) \Big/ \sum_i M(\Lambda) Y_i^{\Lambda(H_i)+1}$$

● En effet la formule des caractères est valable pour tout $\tilde{\mathfrak{g}}$-module à plus haut poids Λ intégrable V de sorte que l'on a $V \simeq L(\Lambda)$. ●

3. Groupes de Kac-Moody.

A. Construction des groupes de Kac-Moody.

Soient $((H_i)_{0\le i\le l}, D, (X_{\alpha+n\delta})_{\alpha+n\delta\in\Delta^{re}}, (X^{(i)}_{n\delta})_{1\le i\le l, n\delta\in\Delta^{im}})$ une base de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\omega}$ l'involution associée.

proposition 3.1

On peut associer canoniquement à l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}'$, un groupe $\tilde{G}$ (le groupe de Kac-Moody) et une application:

$$\exp : \bigcup_{\alpha\in\Delta^{re}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \longrightarrow \tilde{G}$$

tels que:

i) $\tilde{G}$ est engendré par $\exp(\bigcup_{\alpha\in\Delta^{re}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha)$

ii) Pour toute représentation intégrable:

$$\rho' : \tilde{\mathfrak{g}}' \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

il existe une représentation (nécessairement unique):

$$\rho : \tilde{G} \longrightarrow GL(L(\Lambda))$$

de $\tilde{G}$ telle que:

$$\rho(\exp(X)) = \exp(\rho'(X))$$

pour tout $\alpha \in \Delta^{re}$ et tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$.

iii) si $g \in \tilde{G}$ est tel que $\rho(g) = id_V$ pour tout $\tilde{\mathfrak{g}}$-module intégrable V on a $g = e$.

De plus, l'involution de Chevalley $\tilde{\omega}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ définit un automorphisme involutif de $\tilde{G}$ tel que:

$$\tilde{\omega}(\exp(X)) = \exp(\tilde{\omega}(X))$$

pour tout $X \in \bigcup_{\alpha\in\Delta^{re}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$.

● Soit $\Gamma^*(\tilde{\mathfrak{g}}')$ la somme (dans la catégorie des groupes) de la famille des groupes additifs $(\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha)_{\alpha\in\Delta^{re}}$ et pour tout $\alpha \in \Delta^{re}$, soit

$$j_\alpha : \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \longrightarrow \Gamma^*(\tilde{\mathfrak{g}}')$$

le morphisme canonique; on a alors des homomorphismes:

$$\rho^* : \Gamma^*(\tilde{\mathfrak{g}}') \longrightarrow GL(V)$$

tels que $\rho^* \circ j_\alpha(X) = \exp(\rho'(X))$ pour tout $\alpha \in \Delta^{re}$ et tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$. Soit $N^*(\tilde{\mathfrak{g}}')$ l'intersection des noyaux de ces homomorphismes; alors $\tilde{G} = \Gamma^*(\tilde{\mathfrak{g}}')/ N^*(\tilde{\mathfrak{g}}')$ et si $p : \Gamma^*(\tilde{\mathfrak{g}}') \longrightarrow \tilde{G}$ est l'homomorphisme canonique on pose, pour tout $\alpha \in \Delta^{re}$ et tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$:

$$\exp(X) = p \circ j_\alpha(X).$$

Il existe alors un unique automorphisme ω^* de $\Gamma^*(\tilde{\mathfrak{g}}')$ tel que l'on ait:

$$\tilde{\omega}^* \circ j_\alpha(X) = j_{-\alpha}(\tilde{\omega}(X))$$

Or pour toute représentation intégrable ρ' de $\tilde{\mathfrak{g}}$, la représentation $\rho^{\tilde{\omega}'} = \rho' \circ \tilde{\omega}$ est intégrable et l'on a:

$$(\rho^{\tilde{\omega}})^* = \rho^* \circ \tilde{\omega}^*$$

de sorte que $\tilde{\omega}^*(N^*(\tilde{\mathfrak{g}}')) \subset N^*(\tilde{\mathfrak{g}}')$. Ainsi $\tilde{\omega}^*$ définit, par passage au quotient l'involution de Chevalley $\tilde{\omega}$ de $\tilde{G}$. ●

<u>corollaire 1</u>

On a, pour tout $g \in \tilde{G}$ et tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\rho'(Ad(g)X) = \rho(g)\rho'(X)\rho(g)^{-1}$$

● On a pour $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et $Z \in \bigcup_{\alpha\in\Delta^{re}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$, puisque $\rho'(Z)$ est localement nilpotent:

$$\begin{aligned}\rho'(Ad(\exp(Z))X) &= \rho'(\exp(ad_Z)X)\\ &= \exp(ad_{\rho'(Z)}\rho'(X))\\ &= \exp(\rho'(Z))\rho'(X)\exp(\rho'(Z))^{-1}\\ &= \rho(\exp(Z))\rho'(X)\rho(\exp(Z))^{-1}.\ ●\end{aligned}$$

<u>corollaire 2</u>

i) Pour tout $g \in \tilde{G}$, $Ad(g)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

ii) Le noyau de Ad est égal au centre $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ du groupe $\tilde{G}$.

● On a pour $X,Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et $g \in \tilde{G}$:

$$\begin{aligned}\rho'(Ad(g)[X,Y]) &= \rho(g)\rho'([X,Y])\rho(g)^{-1}\\ &= [\rho(g)\rho'(X)\rho(g)^{-1},\rho(g)\rho'(Y)\rho(g)^{-1}]\\ &= [\rho'(Ad(g)X),\rho'(Ad(g)Y)]\end{aligned}$$

$$= \rho'(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y]$$

D'autre part, pour $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$ on a pour tout $X \in \exp(\bigcup_{\alpha\in\Delta^{re}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha)$: $\rho(g)\rho'(X) = \rho'(X)\rho(g)$ de sorte que:

$$\rho(g)\exp(\rho'(X)) = \exp(\rho'(X))\rho(g)$$

d'où:

$$\rho(g\exp(X)) = \rho(\exp(X)g)$$

ie $g \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$.

Réciproquement si $g \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$, on a:

$$\begin{aligned} \exp(\rho'(X)) &= \rho(g)\exp(\rho'(X))\rho(g)^{-1} \\ &= \exp(\rho(g)\rho'(X)\rho(g)^{-1}) \\ &= \exp(\rho'(\mathrm{Ad}(g)X)) \end{aligned}$$

pour tout $X \in \exp(\bigcup_{\alpha\in\Delta^{re}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha)$. Comme $\rho'(X)$ est localement nilpotent, il en est de même de $\rho'(\mathrm{Ad}(g)X)$ de sorte que:

$$\rho'(X) = \rho'(\mathrm{Ad}(g)X)$$

et finalement $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$. ●

<u>corollaire 3.</u>

Soit $\rho' : \tilde{\mathfrak{g}}' \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation intégrable telle que $\mathrm{Ker}(\rho') \subset \mathbb{C}C$; alors si $\rho : \tilde{G} \longrightarrow GL(V)$ est la représentation associée on a $\mathrm{Ker}(\rho) \subset \mathcal{Z}(\tilde{G})$.

● Soit $g \in \mathrm{Ker}(\rho)$; on a $\rho'(\mathrm{Ad}(g)x) = \rho'(x)$ pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}'$ et par suite $\mathrm{Ad}(g)x - x = \lambda(x)C$ avec $\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}}'^*$. Mais, comme $\mathrm{Ad}(g)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie on a $\lambda([x,y]) = 0$ ie $\lambda = 0$. On a donc $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathcal{Z}(\tilde{G})$. ●

<u>B. Les sous-groupes $SL(2,\mathbb{C})$ associés aux racines réelles.</u>

<u>proposition 3.2</u>

1) Pour tout $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$, il existe un unique homomorphisme de groupes:

$$\varphi_{\alpha+n\delta} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \tilde{G}$$

tel que, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_{\alpha+n\delta}(x(s)) = \exp(sX_{\alpha+n\delta})$$

$$\varphi_{\alpha+n\delta}(y(s)) = \exp(sX_{-\alpha-n\delta})$$

2) $\varphi_{\alpha+n\delta}({}^tg^{-1}) = \tilde{\omega}\circ\varphi_{\alpha+n\delta}(g)$ pour tout $g \in SL(2,\mathbb{C})$.

3) $\varphi_{\alpha+n\delta}$ est injectif et son image est le sous-groupe $\tilde{G}_{\alpha+n\delta}$ de $\tilde{G}$ engendré par $\exp(\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta} \cup \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha-n\delta})$.

● 1) On pose:

$$x_{\alpha+n\delta}(s) = \exp(sX_{\alpha+n\delta})$$

$$y_{\alpha+n\delta}(s) = \exp(sX_{-\alpha-n\delta})$$

On a, pour toute représentation intégrable ρ':

$$\rho(x_{\alpha+n\delta}(s)) = \exp(s\rho'(X_{\alpha+n\delta}))$$

$$\rho(y_{\alpha+n\delta}(s)) = \exp(s\rho'(X_{-\alpha-n\delta}))$$

La sous-algèbre $\mathfrak{s}_{\alpha} = \mathbb{C}X_{\alpha+n\delta} \oplus \mathbb{C}H_{\alpha+n\delta} \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha-n\delta}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ engendrée par $X_{\alpha+n\delta}$ et $X_{-\alpha-n\delta}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ et la représentation:

$$\rho'|\mathfrak{s}_{\alpha+n\delta} : \mathfrak{s}_{\alpha+n\delta} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

est intégrable donc il existe un unique homorphisme de groupes:

$$\rho_{\alpha+n\delta} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(V)$$

tel que:

$$\rho_{\alpha+n\delta}(x(s)) = \exp(s\rho'(X_{\alpha}))$$

$$\rho_{\alpha+n\delta}(y(s)) = \exp(s\rho'(X_{-\alpha-n\delta}))$$

Il en résulte que toutes les relations satisfaites par les générateurs $x(s)$ et $y(s)$ de $SL(2,\mathbb{C})$ sont vérifiées par $x_{\alpha+n\delta}(s)$ et $y_{\alpha+n\delta}(s)$ d'où l'existence d'un unique homomorphisme de groupes

$$\varphi_{\alpha+n\delta} : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G$$

tel que, pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_{\alpha+n\delta}(x(s)) = x_{\alpha+n\delta}(s)$$

$$\varphi_{\alpha+n\delta}(y(s)) = y_{\alpha+n\delta}(s)$$

de sorte que $\mathrm{Im}(\varphi_{\alpha+n\delta}) = \tilde{G}_{\alpha+n\delta}$.

2) Il suffit de vérifier l'égalité pour $g = x(s)$ et $g = y(s)$

3) Posons $q_{\alpha+n\delta} = \varphi_{\alpha+n\delta}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$; on a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(q_{\alpha+n\delta}) &= \mathrm{Ad}(\exp(X_{\alpha+n\delta})\exp(-X_{-\alpha-n\delta})\exp(X_{\alpha+n\delta})) \\ &= \exp(\mathrm{ad}_{X_{\alpha+n\delta}})\exp(-\mathrm{ad}_{X_{-\alpha-n\delta}})\exp(\mathrm{ad}_{X_{\alpha+n\delta}}) \\ &= \theta_{\alpha+n\delta} \end{aligned}$$

On sait que l'on a $\theta_{\alpha+n\delta}|\tilde{\mathfrak{h}} = r_{\alpha+n\delta}$ et $\theta_{\alpha+n\delta}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\beta}) = \tilde{\mathfrak{g}}_{r_{\alpha+n\delta}(\beta)}$ pour tout $\beta \in \Delta$. Il en résulte que, pour tout $g \in SL(2,\mathbb{C})$, tout

$\beta+r\delta \in \Delta^{re}$ et tout $X' \in \tilde{g}_{\beta+r\delta}$ on a:

$$\varphi_{r_{\alpha+n\delta}(\beta+r\delta),\theta_{\alpha+n\delta}(X')}(g) = q_{\alpha+n\delta}\varphi_{\beta+r\beta,X'}(g)\,q^{-1}_{\alpha+n\delta}$$

On pose $\varphi_i = \varphi_{\alpha_i}$ pour $0 \le i \le l$. Il suffit donc de démontrer que:

$$\varphi_i : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \tilde{G}$$

est injectif pour $1 \le i \le l$, puisque toute racine réelle de $\tilde{g}$, est l'image d'une racine simple par un élément du groupe de Weyl $\tilde{W}$.

Soit $\Lambda_i \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ défini par $\Lambda_i(H_j) = \delta_{i,j}$; le $\tilde{g}$-module $L(\Lambda_i)$ est intégrable et l'on a:

$$\varphi_i(-I).v_{\Lambda_i} = (-1)^{\Lambda_i(H_i)} v_{\Lambda_i} = -v_{\Lambda_i}$$

de sorte que $-I \notin \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Or $\mathrm{Ker}(\varphi_i)$ est un sous-groupe distingué de $SL(2,\mathbb{C})$ donc égal à $SL(2,\mathbb{C})$ ou contenu dans $\{I,-I\}$. On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = \{I\}$. ●

En particulier, pour toute racine réelle $\alpha+n\delta$, on a un homomorphisme injectif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \tilde{G} \\ t & \longrightarrow & t^{H_{\alpha+n\delta}} = \varphi_{\alpha+n\delta}(h(t)) \end{array}$$

Pour tout $\tilde{g}$-module intégrable V on a:

$$\rho(t^{H_{\alpha+n\delta}})v = t^{\lambda(H_{\alpha+n\delta})}v \quad (\lambda \in P(L(\Lambda)),\ v \in L(\Lambda)_\lambda)$$

et on a $\tilde{\omega}(t^{H_{\alpha+n\delta}}) = t^{-H_{\alpha+n\delta}}$.

C. Le sous-groupe de Cartan.

Pour tout $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$, on désigne par $\tilde{T}_{\alpha+n\delta}$ l'image de l'homomorphisme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \tilde{G} \\ t & \longrightarrow & t^{H_{\alpha+n\delta}} \end{array}$$

et par $\tilde{T}$ le sous-groupe de $\tilde{G}$ engendré par $\{\tilde{T}_{\alpha+n\delta} \ /\ \alpha+n\delta \in \Delta^{re}\}$.

proposition 3.3

L'application:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^{l+1} & \longrightarrow & \tilde{T} \\ (t_i)_{0\le i\le l} & \longrightarrow & \prod_{0\le i\le l} t_i^{H_i} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

De plus, $\tilde{T}$ est stable par l'involution de Chevalley $\tilde{\omega}$ et l'on a $\tilde{\omega}(h) = h^{-1}$ pour tout $h \in \tilde{T}$.

● On a, pour toute représentation intégrable ρ': $\rho(t^{H_{\alpha+n\delta}})v = t^{\lambda(H_{\alpha+n\delta})}v$

de sorte que le groupe T est abélien et que, pour $0 \le j \le l$ et $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$:

$$t^{H_{r_j(\alpha+n\delta)}} = t^{H_{\alpha+n\delta}}(t^{-\alpha_j(H_{\alpha+n\delta})})^{H_j}$$

d'où il résulte, par récurrence sur la longueur des éléments de $\tilde{W}$, compte tenu de ce que $\Delta^{re} = \tilde{W}(\tilde{\Pi})$, que l'application:

$$(t_i)_{0 \le i \le l} \longrightarrow \prod_{0 \le i \le l} t_i^{H_i}$$

est surjective. Enfin , si l'on a $\prod_{0 \le i \le l} t_i^{H_i} = e$, on voit que:

$$\prod_{0 \le i \le l} t_i^{\Lambda_j(H_i)} v_{\Lambda_j} = v_{\Lambda_j} \qquad 0 \le j \le l$$

avec $\Lambda_j(H_i) = \delta_{i,j}$ donc $t_i = 1$ pour $0 \le i \le l$. ●

Remarquons que, de manière plus intrinsèque, on a un isomorphisme de groupe:

$$\eta : \tilde{P}'^{\vee} \otimes \mathbb{C}^* \longrightarrow \tilde{T}$$

tel que $\eta(\sum H_i \otimes t_i) = \prod t_i^{H_i}$, où $\tilde{P}'^{\vee}$ est le sous groupe de $\tilde{\mathfrak{h}}$ engendré par les H_i, $0 \le i \le l$. On posera $\eta(H \otimes t) = t^H$. Notons aussi que l'on a un isomorphisme de groupes:

$$\tilde{P}'^{\vee} \otimes \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tilde{P}', \mathbb{C}^*)$$

$$H \otimes t \longrightarrow \Theta_{H\otimes t} \ (\lambda \longrightarrow t^{\lambda(H)})$$

où $\tilde{P}'$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base $(\Lambda_i)_{0 \le i \le l}$ de sorte que l'on a, pour tout $\tilde{\mathfrak{g}}$-module intégrable V, tout $\lambda \in P(V)$ et $v \in V_\lambda$:

$$\rho(\eta(H\otimes t))v = \Theta_{H\otimes t}(\lambda)v$$

Pour tout $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$, on désigne par $\tilde{N}_{\alpha+n\delta}$ le normalisateur de $\tilde{T}_{\alpha+n\delta}$ dans $\tilde{G}_{\alpha+n\delta}$ et par $\tilde{N}$ le sous-groupe engendré par $\{\tilde{N}_{\alpha+n\delta} \ / \ \alpha+n\delta \in \Delta^{re}\}$. On a:

$$\tilde{\omega}(q_{\alpha+n\delta}) = q_{\alpha+n\delta}$$

de sorte que $\tilde{N}$ est stable par l'involution de Chevalley $\tilde{\omega}$ de $\tilde{G}$.

● On a $q_{\alpha+n\delta} = \exp(X_{\alpha+n\delta})\exp(-X_{-\alpha-n\delta})\exp(X_{\alpha+n\delta})$ de sorte que

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(q_{\alpha+n\delta}) &= \exp(\tilde{\omega}(X_{\alpha+n\delta}))\exp(-\tilde{\omega}(-X_{-\alpha-n\delta}))\exp(\tilde{\omega}(X_{\alpha+n\delta}))\\ &= \exp(-X_{-\alpha-n\delta})\exp(X_{\alpha+n\delta})\exp(-X_{-\alpha-n\delta})\\ &= (\exp(-X_{-\alpha-n\delta})\exp(-X_{\alpha+n\delta})\exp(-X_{-\alpha-n\delta}))^{-1}\\ &= (q_{-\alpha-n\delta})^{-1} = q_{\alpha+n\delta}. \bullet\end{aligned}$$

<u>proposition</u> <u>3.3</u>

L'application:

$$\begin{aligned}\pi : \tilde{N} / \tilde{T} &\longrightarrow \tilde{W}\\ n\tilde{T} &\longrightarrow \mathrm{Ad}(n)|\tilde{\mathfrak{h}}\end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

● Posons, pour $0 \leq i \leq l$, $q_i = q_{\alpha_i, x_i}$. Le sous-groupe $\tilde{N}$ est engendré par $\tilde{T}$ et les $\tilde{N}_{\alpha+n\delta}$, $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$; mais on a $\tilde{N}_{r_i(\alpha+n\delta)} = q_i \tilde{N}_{\alpha+n\delta} q_i^{-1}$ de sorte que $\tilde{N}$ est engendré par $\tilde{T}$ et la famille $(q_i)_{o\leq i\leq l}$. Puisque l'on a:

$$q_{\alpha+n\delta}\, t^{H_{\beta+r\delta}}\, (q_{\alpha+n\delta})^{-1} = t^{H_{r_{\alpha+n\delta}(\beta+r\delta)}}$$

on voit que $\tilde{T}$ est un sous-groupe distingué de $\tilde{N}$. On a $\tilde{T} \subset \mathrm{Ker}(\pi)$, puisque $\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{g}}_o$, d'où un homomorphisme de groupe:

$$\pi : \tilde{N} / \tilde{T} \longrightarrow \tilde{W}$$

tel que $\pi(n\tilde{T}) = \mathrm{Ad}(n)|\tilde{\mathfrak{h}}$ de sorte que, pour $0\leq i\leq l$ on a $\pi(q_i\tilde{T}) = r_i$ et par suite π est surjectif.

Posons:

$$q = q_i\, q_j\, q_i \ldots \qquad (m_{i,j} \text{ termes})$$

$$q' = q_j\, q_i\, q_j \ldots \qquad (m_{i,j} \text{ termes})$$

et $k = j$ si $m_{i,j}$ est pair ou $k = i$ sinon de sorte que $q' = q_j\, q\, q_k^{-1}$. Puisque $\pi(q_i) = r_i$, $\pi(q_j) = r_j$ et que $m_{i,j}$ est l'ordre de $r_i r_j$ dans $\tilde{W}$ on a $\pi(q) = \pi(q')$ et $r_j = \pi(q)\, r_k\, (\pi(q))$ d'où $\alpha_j = \pi(q)(\alpha_k)$. On a alors:

$$q'\, q^{-1} = q_j\, q\, q_k^{-1}\, q^{-1} \in q_j\, q\, (\tilde{N}_{\alpha_k} \setminus \tilde{T}_{\alpha_k})\, q^{-1}$$

Mais $q\, (\tilde{N}_{\alpha_k} \setminus \tilde{T}_{\alpha_k})\, q^{-1} = \tilde{N}_{\pi(q)\alpha_k} \setminus \tilde{T}_{\pi(q)\alpha_k} = \tilde{N}_{\alpha_j} \setminus \tilde{T}_{\alpha_j}$ et ainsi:

$$q'\, q^{-1} \in q_j\, \tilde{N}_{\alpha_j} \setminus \tilde{T}_{\alpha_j} = \tilde{T}_{\alpha_j}$$

On montre de même que $q' q^{-1} \in \tilde{T}_{\alpha_i}$ mais $\tilde{T}_{\alpha_i} \cap \tilde{T}_{\alpha_j} = \{e\}$ ie $q = q'$.

Enfin on a $q_i^2 = (-1)^{H_i} \in \tilde{T}$, pour $0 \leq i \leq l$ de sorte que, puisque $\tilde{W}$ est un groupe de Coxeter, il existe un unique homomorphisme:

$$\tilde{W} \longrightarrow \tilde{N} / \tilde{T}$$

transformant r_i en $q_i \tilde{T}$ pour $0 \leq i \leq l$ donc π est un isomorphisme. ●

D. Le système de Tits double.

Pour tout $\alpha + n\delta \in \Delta^{re}$, on pose $\tilde{U}_{\alpha+n\delta} = \exp(\tilde{g}_{\alpha+n\delta})$; on désigne par $\tilde{U}_+$ (resp $\tilde{U}_-$) le sous-groupe de $\tilde{G}$ engendré par les $\tilde{U}_{\alpha+n\delta}$ avec $\alpha+n\delta \in \Delta_+^{re}$ (resp $\alpha+n\delta \in -\Delta_+^{re}$) et par $\tilde{B}_+$ (resp $\tilde{B}_-$) le sous-groupe engendré par $\tilde{T}$ et $\tilde{U}_+$ (resp par $\tilde{T}$ et $\tilde{U}_-$).

On a, $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{\alpha+n\delta}) = \tilde{U}_{-\alpha-n\delta}$, de sorte que $\tilde{\omega}(\tilde{U}_+) = \tilde{U}_-$ et $\tilde{\omega}(\tilde{B}_+) = \tilde{B}_-$ et on a vu que les sous-groupes $\tilde{T}$ et $\tilde{N}$ sont stables par $\tilde{\omega}$ qui induit l'identité sur le groupe de Weyl $\tilde{W}$.

<u>proposition 3.4</u>

$(\tilde{B}_+, \tilde{N})$ et $((\tilde{B}_-, \tilde{N})$ sont des systèmes de Tits saturés de groupe de Weyl $\tilde{W}$ dans le groupe $\tilde{G}$.

● D'après XI 1 il suffit de montrer que $(\tilde{N}, \tilde{T}, (\tilde{U}_{\alpha+n\delta})_{\alpha+n\delta \in \Delta^{re}})$ vérifie les propriétés suivantes:

1) $\tilde{T}$ normalise $\tilde{U}_{\alpha+n\delta}$ et $\tilde{U}_{\alpha+n\delta} \neq \{e\}$ pour tout $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$

2) $\tilde{G} = < \tilde{T}, \tilde{U}_{\alpha+n\delta} \ / \ \alpha+n\delta \in \Delta^{re} >$

3) L'application:

$$\tilde{U} \times \tilde{T} \times \tilde{U} \longrightarrow \tilde{G}$$

$$(u_+, h, u_-) \longrightarrow u_+ h u_-$$

est injective.

4) $\tilde{N}$ est engendré par $\tilde{T}$ et des éléments q_i, $0 \leq i \leq l$, tels que:

$$q_i \text{ normalise } \tilde{T} \quad q_i \tilde{U}_{\alpha+n\delta}\, q_i^{-1} = \tilde{U}_{r_i(\alpha+n\delta)} \qquad \text{pour}$$

tout $\alpha+n\delta \in \Delta^{re}$

5) Il existe un isomorphisme de groupes:

$$\pi : \tilde{N} / \tilde{T} \longrightarrow \tilde{W}$$

tel que $\pi(q_i \tilde{T}) = r_i$, $0 \leq i \leq l$.

6) Pour $\alpha+m\delta, \beta+n\delta \in \Delta_+^{re}$ telles que $(\beta+n\delta)(H_{\alpha+m\delta}) \geq 0$

$$(\tilde{U}_{\alpha+m\delta}, \tilde{U}_{\beta+n\delta}) = \begin{cases} \tilde{U}_{\alpha+\beta+(m+n)\delta} & \text{si } \alpha+\beta+(m+n)\delta \in \Delta \\ \{e\} & \text{sinon} \end{cases}$$

7) $\tilde{U}_{-\alpha_i} \setminus \{e\} \subset \tilde{U}_{\alpha_i} q_i \tilde{T} \tilde{U}_{\alpha_i}$

et la démonstration du chapitre XI prop 2.1 s'applique encore ici pour montrer que $(\tilde{B}_+, \tilde{N})$ est un système de Tits. il en est donc de même de $(\tilde{B}_-, \tilde{N})$ en appliquant l'involution de Chevalley. ●

corollaire

i) $\tilde{N}$ est le normalisateur de $\tilde{T}$ dans $\tilde{G}$ et le centre $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ de $\tilde{G}$ est un sous-groupe de $\tilde{T}$.

ii) De plus l'application:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(G) \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathcal{Z}(\tilde{G}) \\ (c,t) &\longrightarrow ct^C \end{aligned}$$

(où C est l'élément central de $\tilde{\mathfrak{g}}$) est un isomorphisme de groupes.

● En appliquant loc. cit. prop 2.4 on obtient i) et que $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tilde{P}'/\tilde{Q}', \mathbb{C}^*)$ où $\tilde{P}'$ (resp $\tilde{Q}'$) est le sous-groupe de $\tilde{\mathfrak{h}}^{*\prime}$ engendré par $(\Lambda_i | \tilde{\mathfrak{h}}')_{0\leq i\leq l}$ (resp par $(\alpha_i | \tilde{\mathfrak{h}}')_{0\leq i\leq l}$). Mais $\tilde{P} = P \oplus \mathbb{Z}\Lambda_0$ tandis que $\tilde{Q} = Q$ puisque que $\alpha_0 = \delta-\theta$ et que $\delta | \tilde{\mathfrak{h}}' = 0$. Ainsi on a:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tilde{P}'/\tilde{Q}', \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P/Q, \mathbb{C}^*) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\Lambda_0, \mathbb{C}^*)$$

Mais:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P/Q, \mathbb{C}^*) \simeq \mathcal{Z}(G)$$

tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\Lambda_0, \mathbb{C}^*)$ a pour image $\{t^C / \ t \in \mathbb{C}^*\}$. ●

E. L'extension centrale du groupe de lacets.

Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, la représentation associée à la représentation $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, somme directe des représentations fondamentales. Les représentations ρ' et ρ sont fidèles. On pose $LV = \mathbb{C}[t,t^{-1}] \otimes V$ et on définit une représentation

$$L\rho' : \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(LV)$$

par:

$$\begin{aligned} L\rho'(f\otimes X)(g\otimes v) &= (fg)\otimes\rho'(X)v \\ L\rho'(C) &= 0 \end{aligned}$$

$$L\rho'(D)(g\otimes v) = (tg')\otimes v$$

On obtient ainsi une représentation intégrable de $\tilde{\mathfrak{g}}$ de laquelle on déduit une représentation:

$$L\rho : \tilde{G} \longrightarrow GL(V)$$

Le groupe $LG = Im(L\rho)$ est le groupe de lacets de G. Ainsi LG est le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les automorphismes $\hat{x}_{\alpha+n\delta}(s)$ définis par:

$$\hat{x}_{\alpha+n\delta}(s)(g\otimes v) = \sum_k \left(\frac{s^k}{k!} t^{nk} g\right)\otimes\rho(X_\alpha)^k v$$

avec G s'identifiant au sous-groupe de LG engendré par les $\hat{x}_\alpha(s)$. Puisque l'on a $Ker(L\rho') = \mathbb{C}C$, on a $Ker(L\rho) \subset \mathcal{Z}(\tilde{G})$. On a alors la suite exacte de groupes:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{L\rho} & LG & \longrightarrow & \{1\} \\ & & t & \longrightarrow & t^C & & & & \end{array}$$

● Puisque $C \in Ker(L\rho')$ on a $L\rho'(C)v = \lambda(C)v = 0$ pour tout $v \in (LV)_\lambda$ de sorte que $\lambda(C) = 0$ et par suite $(L\rho)t^C v = t^{\lambda(C)}v = v$ pour tout $v \in (LV)_\lambda$ ie $t^C \in Ker(L\rho)$ tandis que $L\rho|G$ est un ismomorphisme de G sur son image dans LG. ●

BIBLIOGRAPHIE

BOURBAKI N.

[1] Groupes et algèbres de Lie, chap 4-6, Herman, Paris 1968

[2] Groupes et algèbres de Lie, chap 7-8, Herman, Paris 1975

BRUHAT F., TITS J.

[1] Groupes réductifs sur un corps local, IHES Pub Math

CARTER R.W.

[1] Simple groups of Lie type, John Wiley, London 1972

CHEVALLEY C.

[1] Théorie des groupes de Lie, Groupes algébriques, théorèmes généraux sur les algèbres de Lie, Herman, Paris

DEODHAR V.V.

[1] Some characterizations of Coxeter groups, L'enseignement mathématique 32 (1986), 111-120

DIEUDONNE J.

[1] Eléments d'analyse 5, Gauthier-Villars 1975

DIXMIER J.

[1] Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars,Paris 1974

FRANKEL I.B., KAC V.G

[1] Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, Inventiones Math 62 (1980), 23-66

GARLAND H.

[1] The arithmetic theory of loop algebras, J. Algebra 53, p 480-551, 1978

[2] The arithmetic theory of loop groups, IHES Pub. Math 52, p 5-136, 1980

HEE J.Y.

[1] Groupe muni d'une donnée radicielle, Séminaire sur les groupes finis III, Pub Math Univ Paris VII, Paris 1979

JACOBSON N.

[1] Lie algebras, Interscience, New-York 1952

KAC V.G.

[1] Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, Cambridge 1985

[2] Constructing groups associated to infinite dimensionnal algebras, in Infinite dimensionnal groups with applications, p 167-216, MSRI, Springer Verlag, New York 1985

KAC V.G., PETERSON D.H.

[1] Defining relations of certains infinite dimensional groups, Astérisque, 1985

MATSUMOTO H.

[1] Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4° série, t 2, p 1-62, 1969

MOODY R.

[1] A new class of Lie algebras, J.Algebra 10 p 211-230, 1968

MOODY R., TEO K.L.

[1] Tits systems with cristallographic Weyl groups, J. Algebra 21, p 178-180, 1979

MORITA J.

[1] Tits'systemes in Chevalley groupes over Laurent polynomial rings, Tsukuba J. Math, vol 3, N°2, p 41-51, 1979

PETERSON D.H., KAC V.G.

[1] Infinite flag varieties and conjugacy theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 80 (1983), 1778-1782

SERRE J.P.

[1] Lie algebras and Lie groups, Benjamin, New-York et Amsterdam 1965

[2] Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, New-York Amsterdam 1966

STEIN M.R.

[1] Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings, Amer. J. of Math., 93, p 969-1004, 1962

TITS J.

[1] Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, IHES 31 (1966), 21-58

[2] Normalisateurs de tores, I. Groupes de Coxeter étendus, Journal of algebra 4 (1965), 96-116

[3] Groups and group functors attached to Kac-Moody data, Lectures notes in Math,vol 1111, p193-223, Springer 1985

[4] Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, Journal of algebra 105 (1987), 542-573

VARADARAJAN V.S

[1] Lie algebras and their representations, Springer Verlag, New-York 1984

INDEX