

DOUGLAS L. COSTA

Sur la condition de chaînes sur les annulateurs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 7-11

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_7_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONDITION DE CHAINES SUR LES ANNULATEURS

Douglas L. COSTA

INTRODUCTION.

Deux articles de Roitman [7,8] ont établi récemment que :

- 1). Si A est un anneau intègre de Mori contenant un corps k indénombrable, alors $A[X]$ est de Mori ;
- 2). Il existe pour chaque corps k un anneau intègre de Mori A contenant k tel que $A[[X]]$ n'est pas de Mori.

Querré a montré que A de Mori implique $A[X]$ de Mori sous l'hypothèse que A soit intégralement clos [6]. Ce sont les seuls résultats définitifs sur la conjecture de Querré : $A[X]$ est un anneau de Mori pour chaque anneau intègre de Mori.

Roitman a montré (1) en utilisant le fait qu'un anneau intègre A est de Mori si et seulement si pour chaque élément non nul $x \in A$, l'anneau quotient A/xA vérifie la condition chaîne sur les annulateurs (la $CC^\perp$). Et les exemples (2) viennent de la construction dans un anneau $B = k[\{X_\alpha\}]$ de polynômes sur le corps k d'un idéal homogène I tel que B/I ait la $CC^\perp$. Ainsi inspiré, je commence ici une étude des idéaux I dans un anneau commutatif R tels que R/I ait la $CC^\perp$.

1 - GENERALITES.

Soient L , M et N des modules sur l'anneau R et $f : M \times N \longrightarrow L$ une application R -bilinéaire. Pour chaque partie S de N on appelle l'*annulateur de S* (par rapport à f) le

sous-ensemble $S^\perp = \{x \in M \mid f(x, S) = 0\}$ de M . $S^\perp$ est un sous-module de M . On dit que M vérifie la $\text{DCC}^\perp$ (par rapport à f) si toute chaîne décroissante $S_1^\perp \supseteq S_2^\perp \supseteq \dots$ d'annulateurs se stabilise. On définit la $\text{ACC}^\perp$ pour M , la $\text{DCC}^\perp$

pour N , et la $\text{ACC}^\perp$ pour N , de façon analogue. Si M vérifie à la fois la $\text{DCC}^\perp$ et la $\text{ACC}^\perp$, on dit que M a la $\text{CC}^\perp$.

Les arguments classiques de la dualité montrent qu'une partie E de M est un annulateur si et seulement si $E = E^{\perp\perp}$ et que $E^\perp$ est la plus grande partie S de N telle que $E = S^\perp$.

PROPOSITION 1.1 - Soit $f : M \times N \longrightarrow L$ une application bilinéaire de R -modules.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1). M a la $\text{DCC}^\perp$ (par rapport à f).
- 2). N a la $\text{ACC}^\perp$.
- 3). Chaque partie S de N contient un sous-ensemble fini S_0 tel que $S^\perp = S_0^\perp$.
- 4). Si $\{x_i\}_{i \geq 1} \subseteq M$ et $\{y_i\}_{i \geq 1} \subseteq N$ sont deux suites telles que $f(x_n, y_i) = 0$ pour $n \geq 1$ et $i < n$, alors $f(x_n, y_n) = 0$ pour $n \gg 0$.

De cette proposition on voit immédiatement que si $f : M \times M \longrightarrow L$ est *symétrique*, les trois conditions $\text{DCC}^\perp$, $\text{ACC}^\perp$, et $\text{CC}^\perp$ pour M sont équivalentes.

PROPOSITION 1.2 - Soit $f : M \times N \longrightarrow L$ une application bilinéaire de R -modules, où L est un R -module noethérien. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1). M a la $\text{DCC}^\perp$.
- 2). M a la $\text{ACC}^\perp$.
- 3). M a la $\text{CC}^\perp$.
- 4). $M/N^\perp$ est un R -module noethérien.
- 5). $N/M^\perp$ est un R -module noethérien.

2 - $\text{CC}^\perp$ -ANNEAUX ET $\text{CC}^\perp$ -IDEAUX.

On dit que l'anneau R est un $\text{CC}^\perp$ -anneau si la forme bilinéaire symétrique de multiplication $R \times R \longrightarrow R$ a la $\text{CC}^\perp$. Un idéal I dans un anneau R est appelé un $\text{CC}^\perp$ -idéal si l'anneau quotient R/I est un $\text{CC}^\perp$ -anneau.

Des conditions nécessaires pour la $\text{CC}^\perp$ sont données dans le théorème suivant.

THEOREME 2.1 - Soit R un $CC^\perp$ -anneau. Alors :

- 1). Le nilradical $\sqrt{0}$ de R est nilpotent.
- 2). Pour chaque partie S de R , $R/\text{Ann}(S)$ a la $CC^\perp$.
- 3). Les idéaux premiers minimaux de R sont des annulateurs.
- 4). $\text{Ass}_f(R) = \text{Ass}(R)$.
- 5). $\text{Ass}(R)$ est fini.
- 6). L'anneau total de fractions de R , $\text{Tot}(R)$, est semi-local.
- 7). $R / \sqrt{0}$ a la $CC^\perp$.
- 8). Pour chaque partie multiplicative S de R , il existe un élément $s^* \in S$ tel que $\text{Ker}(R \longrightarrow R_S) = \text{Ann}(s^*)$.
- 9). Chaque localisé R_S de R a la $CC^\perp$.

(On trouve dans (1) le livre [4] de Herstein. Roitman [7] a noté (2), (3), (4) et (7). La démonstration de (5) est comme celle de [5, Th. 2.1], et on en déduit (6) facilement. Heinzer and Lantz [3] ont montré (8) et (9)).

De (5), on voit que tout anneau absolument plat et non-noethérien, nous donne un exemple d'un anneau localement $CC^\perp$, mais pas $CC^\perp$.

Pour un anneau R , notons par $\text{Max } Z(R)$ l'ensemble d'idéaux premiers maximaux dans l'ensemble de diviseurs de zéro. Nous donnons un critère local pour la $CC^\perp$.

THEOREME 2.2 - Soit R un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1). R a la $CC^\perp$.
 - 2). $\text{Tot}(R)$ a la $CC^\perp$.
 - 3). R vérifie :
 - a). $\text{Max } Z(R)$ est fini,
 - b). $\forall P \in \text{Max } Z(R), \exists s \in R \setminus P$ tel que $\text{Ker}(R \longrightarrow R_P) = \text{Ann}(s)$,
- et c). R_P a la $CC^\perp$, pour chaque $P \in \text{Max } Z(R)$.

Pour étudier les $CC^\perp$ -idéaux, le lemme suivant est indispensable.

LEMME 2.3 - Si I et J sont $CC^\perp$ -idéaux de R , alors $I \cap J$ est un $CC^\perp$ -idéal de R .

On déduit de [5, (5.5) - (5.7)] qu'il existe un anneau R et un $CC^\perp$ -idéal I de R tel que I n'a pas de décomposition primaire. Mais si tous les idéaux premiers associés à I sont minimaux sur I , on a le résultat suivant.

THEOREM 2.4 - Soit I un idéal dans un anneau R tel que $\dim \text{Ass}_f(R/I) = 0$. Alors I est un $\text{CC}^\perp$ -idéal si et seulement si I a une décomposition primaire $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ dont tous les primaires Q_i sont des $\text{CC}^\perp$ -idéaux.

Ceci nous dit qu'il faut chercher les idéaux primaires Q qui sont $\text{CC}^\perp$ -idéaux. Soit P le radical de Q . Selon 2.1 (1), il est nécessaire qu'il existe un entier n tel que $P^n \subseteq Q$. Et selon 2.2, Q est un $\text{CC}^\perp$ -idéal si et seulement si $\text{Tot}(R/Q) = R_P / Q R_P$ est un $\text{CC}^\perp$ -anneau. Donc, nous sommes réduits à considérer un anneau quasi-local

$\bar{R} = R_P / Q R_P$ d'idéal maximal $\bar{P} = P R_P / Q R_P$ tel que $\bar{P}^n = 0$.

Si $n \leq 2$, $\bar{P}$ est le seul annulateur non-trivial de $\bar{R}$, et donc $\bar{R}$ a la $\text{CC}^\perp$.

Si $\bar{P}$ est de type fini, $\bar{R}$ est noethérien, donc $\text{CC}^\perp$. Même si $\bar{P} / \text{Ann } \bar{P}$ est de type fini, [2, Lemma 2.2] montre que $\bar{R}$ a la $\text{CC}^\perp$. Puisque $\bar{R}$ a la $\text{CC}^\perp$ si et seulement si la multiplication $\bar{P} \times \bar{P} \longrightarrow \bar{P}^2$ a la $\text{CC}^\perp$, la proposition 1.2 nous donne que si $\bar{P}^2$ est noethérien, R a la $\text{CC}^\perp$ si et seulement si $\bar{P} / \text{Ann } \bar{P}$ est de type fini.

THEOREM 2.5 - Soit Q un idéal P -primaire de l'anneau R . Soit $n = \inf\{m/P^m \subseteq Q\} < \infty$. Avec les notations ci-dessus,

- 1). Si $n \leq 2$, Q est un $\text{CC}^\perp$ -idéal.
- 2). Si $\bar{P} / \text{Ann } \bar{P}$ est de type fini, alors Q est un $\text{CC}^\perp$ -idéal, et la réciproque est vraie lorsque $\bar{P}^2$ est noethérien.

COROLLAIRE 2.6 - Soient R un anneau et $P_1, \dots, P_n$ des idéaux premiers sans relations d'inclusion entre-eux. L'intersection $P_1^{(e_1)} \cap \dots \cap P_n^{(e_n)}$ est un $\text{CC}^\perp$ -

idéal si pour tout i , ou bien $e_i \leq 2$, ou bien P_i est de type fini.

Pour terminer, considérons le cas $n = 3$, c'est-à-dire que $\bar{P}^3 = 0$ et $\bar{P}^2 \neq 0$. La $\text{CC}^\perp$ pour R est encore équivalente à la $\text{CC}^\perp$ pour l'application bilinéaire de multiplication $\bar{P} \times \bar{P} \longrightarrow \bar{P}^2$. Parce que $\bar{P}^\perp = \text{Ann } \bar{P} \supseteq \bar{P}^2$, puisque $n = 3$, c'est équivalent à considérer :

$$\bar{P} / \bar{P}^2 \times \bar{P} / \bar{P}^2 \longrightarrow \bar{P}^2,$$

une application bilinéaire symétrique des espaces vectoriels sur le corps $k = \bar{R} / \bar{P}$.

Réciproquement, si $f : V \times V \longrightarrow W$ est une application bilinéaire symétrique des k -espaces vectoriels telle que W est engendré par $f(V, V)$, on peut définir un anneau local, gradué $\bar{R} = k \otimes V \otimes W$ avec $\bar{P} = V \otimes W$ l'idéal maximal, $\bar{P}^2 = W$, et $\bar{P} / \bar{P}^2 = V$. Donc, le cas $n = 3$ revient au cas général des espaces vectoriels. Si $\dim W < \infty$, il suit de 1.3 que $V \times V \longrightarrow W$ a la $CC^\perp$ si et seulement si $\dim V/V^\perp < \infty$. Si $\dim W = \infty$, nous sommes face au noyau du problème.

(Pour les démonstrations et des exemples, voir [1]).

REFERENCES

- [1] **D. COSTA**, Some remarks on the ACC on annihilators, Preprint.
- [2] **W. HEINZER** and **D. LANTZ**, N-rings and ACC on colon ideals, J. Pure and App. Algebra, 32 (1984), 115-127.
- [3] **W. HEINZER** and **D. LANTZ**, Universally contracted ideals in commutative rings. Comm. in Algebra, 12 (1984), 1265-1289.
- [4] **I. HERSTEIN**, Topics in Ring Theory, University of Chicago Press.
- [5] **E. HOUSTON**, **T. LUCAS**, and **T. VISWANATHAN**, Primary decomposition of divisorial ideals in Mori domains, Preprint.
- [6] **J. QUERRE**, Idéaux divisoriels d'un anneau de polynômes, J. Algebra 64 (1980), 270-284.
- [7] **M. ROITMAN**, On Mori domains and commutative rings with $CC^\perp$. I, J. Pure and App. Algebra, to appear.
- [8] **M. ROITMAN**, On Mori domains and commutative rings with $CC^\perp$. II, Queen's mathematical preprint 1987-7.