

SALAH KABBAJ

Sur une conjecture de Malik et Mott

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 13-19

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_13_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_13_0)

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CONJECTURE DE MALIK ET MOTT

Salah KABBAJ

Département de mathématiques, Université Claude Bernard - Lyon I
69622 Villeurbanne Cedex, France.

Les anneaux considérés sont commutatifs, intègres et possèdent un élément unité.

Un anneau A est appelé un S -domaine fort si p et q étant deux idéaux premiers consécutifs dans $\text{Spec}(A)$, alors les idéaux étendus $p[X]$ et $q[X]$ sont consécutifs dans $\text{Spec}(A[X])$.

Un anneau A dit de Jaffard [1] et [2] s'il est de dimension de Krull finie et s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

- i) $\dim A = \dim_v A$, (où $\dim_v A$ désigne la dimension valuative de l'anneau A)
- ii) $\dim A[X_1, \dots, X_n] = n + \dim A$ pour tout $n > 0$.

Soient A un anneau, $n \geq 1$ un entier naturel, $\{X_1, \dots, X_n\}$ un ensemble fini d'indéterminées sur A et S la partie multiplicative de $A[X_1, \dots, X_n]$ définie par :

$$S = \{f \in A[X_1, \dots, X_n] / c(f) = A\}$$

$$(\text{si } f = \sum_i a_i X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}, \quad c(f) = \sum_i a_i A).$$

Posons $A(X_1, \dots, X_n) = S^{-1}(A[X_1, \dots, X_n])$. L'anneau $A(X_1, \dots, X_n)$ défini ainsi est appelé l'anneau de Nagata à n indéterminées et à coefficients dans A .

Dans un long article [5] consacré aux S-domaines forts, MALIK et MOTT se sont posé la question suivante : Soit n un entier naturel ≥ 1 , a-t-on $A[X_1, \dots, X_n]$ S-domaine fort si et seulement si $A(X_1, \dots, X_n)$ S-domaine fort ?

Il est clair que si $A[X_1, \dots, X_n]$ est un S-domaine fort, alors il en est de même pour $A(X_1, \dots, X_n) = S^{-1}(A[X_1, \dots, X_n])$. Cependant, nous sommes en mesure d'affirmer que la réciproque est fausse. Cela est illustré par l'exemple suivant.

EXEMPLE 1.1 - Soient k un corps, X et Y deux indéterminées sur k et un entier $n \geq 1$.

Posons :

$$V = k(X) + Yk(X)[Y]_{(Y)}$$

et

$$R = k + Yk(X)[Y]_{(Y)}.$$

Alors :

- a). $R(X_1, \dots, X_n)$ est un S-domaine fort.
- b). $R[X_1, \dots, X_n]$ n'est pas un S-domaine fort où $X_1, \dots, X_n$ sont des indéterminées sur l'anneau R .

DEMONSTRATION - Soit $M = Yk(X)[Y]_{(Y)}$ l'idéal maximal commun à V et R . L'anneau R est un produit fibré local issu de l'anneau de valuation V ;

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & k \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\quad} & k(X) \end{array}$$

il découle donc du théorème (0-3.6) et du théorème (I-3.1.)[4].

$$\dim R = \dim V = 1,$$

et

$$\dim_V R = \dim_V V + \deg \operatorname{tr}_k k(X) = \dim V + 1 = 2.$$

Il en résulte que $\dim R[X_1] = \dim_V R + 1 = 3$ et par conséquent $\operatorname{ht} M[X_1] = 2$.

En fait, nous allons établir que $\text{ht } M[X_1, \dots, X_n] = 2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. En effet,

$$\text{ht } M[X_1, \dots, X_n] + \dim(R[X_1, \dots, X_n]/M[X_1, \dots, X_n]) \leq \dim R[X_1, \dots, X_n],$$

d'où :

$$\text{ht } M[X_1, \dots, X_n] + n \leq \dim R[X_1][X_2, \dots, X_n].$$

L'anneau $R[X_1]$ est un anneau de Jaffard puisque $\dim R[X_1] = 1 + \dim_v R = \dim_v R[X_1] = 3$. On en déduit que $\dim R[X_1][X_2, \dots, X_n] = \dim R[X_1] + n - 1 = n + 2$. Ce qui donne,

$$\text{ht } M[X_1, \dots, X_n] + n \leq n + 2.$$

Par conséquent, $\text{ht } M[X_1, \dots, X_n] = 2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Dans notre cas particulier, nous avons :

$R(X_1, \dots, X_n) = R[X_1, \dots, X_n]_{M[X_1, \dots, X_n]}$. Il suffit donc de prouver que $R[X_1, \dots, X_n]_{M[X_1, \dots, X_n]}$ est un S-domaine fort.

Soient P et Q deux idéaux premiers de $R[X_1, \dots, X_n]$ tels que $P \subsetneq Q \subset M[X_1, \dots, X_n]$ et $\text{ht}(Q/P) = 1$. Deux cas se présentent. Si $P = (0)$, alors $\text{ht } Q = 1$. Nécessairement $Q \cap R = (0)$ et il existe un idéal premier Q' de $K[X_1, \dots, X_n]$, K désigne le corps des fractions de R , tel que $Q' \cap A[X_1, \dots, X_n] = Q$. $K[X_1, \dots, X_n]$ étant un S-domaine, nous avons :

$$\text{ht } Q[X_{n+1}] = \text{ht } Q'[X_{n+1}] = 1 = \text{ht } Q' = \text{ht } Q.$$

Si $p \neq (0)$, nécessairement $Q = M[X_1, \dots, X_n]$ (car $\text{ht } M[X_1, \dots, X_n] = 2$) donc,

$$\text{ht}(Q[X_{n+1}]/P[X_{n+1}]) = \text{ht}(M[X_1, \dots, X_{n+1}]/P[X_{n+1}]) = 1.$$

Car nous avons aussi $\text{ht } M[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}] = 2$. D'où la conclusion. ■

Toutefois, l'anneau R (construit précédemment) n'est pas un S-domaine fort. Ce qui nous conduit à nous poser la question suivante : Existe-t-il un S-domaine fort R tel que l'anneau $R(X_1, \dots, X_n)$ ne soit pas un S-domaine fort ?

Avant de répondre à cette question, nous allons établir certains résultats mettant en évidence les liaisons existant entre les notions de S-domaine fort et d'anneau de Jaffard pour les anneaux de Nagata.

THEOREME 1.2 - *Soit A un anneau de dimension finie. Si A et $A(X_1, \dots, X_n)$ sont des S-domaines forts pour tout entier $n \geq 1$, alors A est un anneau de Jaffard.*

Dans ce qui suit, nous allons identifier l'anneau $A(X_1, \dots, X_n)$ pour $n = 0$ à l'anneau A. La démonstration du théorème découle du lemme suivant.

LEMME 1.3 - *Soient A un anneau de dimension finie et $n \geq 1$ un entier naturel. Si $A(X_1, \dots, X_k)$ est un S-domaine fort pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, alors :*

$$\dim A[X_1, \dots, X_k] = k + \dim A \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n, n+1\}.$$

DEMONSTRATION - Nous savons que $\dim A(X_1, \dots, X_k) = \dim A[X_1, \dots, X_k] - k$ pour tout entier naturel k [1, Proposition 1.21]. Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ et supposons que $A(X_1, \dots, X_k)$ soit un S-domaine fort. Donc,

$$\dim A(X_1) = \dim A[X_1] - 1 = \dim A$$

puisque A est un S-domaine fort.

Nous avons de même :

$$\begin{aligned} \dim A(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \dim A(X_1, \dots, X_k)(X_{k+1}) \\ &= \dim A(X_1, \dots, X_k)[X_{k+1}] - 1 \\ &= \dim A(X_1, \dots, X_k), \end{aligned}$$

puisque l'anneau $A(X_1, \dots, X_k)$ est un S-domaine fort. Il en résulte que:

$$\begin{aligned} \dim A(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \dim A(X_1, \dots, X_k) \\ &= \dim A(X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &\dots\dots\dots \\ &= \dim A(X_1) \\ &= \dim A \end{aligned}$$

pour tout entier naturel $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. D'autre part, nous avons :

$$\dim A(X_1, \dots, X_{k+1}) = \dim A[X_1, \dots, X_{k+1}] - (k + 1).$$

Il en découle que $\dim A[X_1, \dots, X_k] = k + \dim A$ pour tout entier naturel $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$. ■

La réciproque du théorème est généralement fausse. Cela est illustré dans [3] par un exemple d'anneau A S-domaine fort tel que $\dim_v A \neq \dim A$ (A n'est donc pas de Jaffard). Néanmoins, la réciproque peut être vraie dans certains cas particuliers.

PROPOSITION 1.4 - *Etant donné un anneau A local de dimension ≤ 2 . Soit n un entier naturel ≥ 1 . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i). $A(X_1, \dots, X_k)$ est un S-domaine fort pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
- ii). $\dim A[X_1, \dots, X_k] = k + \dim A$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$.

DEMONSTRATION.

i) $\Rightarrow$ ii). Théorème 1.2 ou lemme 1.3.

ii) $\Rightarrow$ i). Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. D'une part,

$$\begin{aligned} \dim A(X_1, \dots, X_k)[Y] &= \dim A(X_1, \dots, X_k)(Y) + 1 \\ &= \dim A(X_1, \dots, X_k, Y) + 1 \\ &= \dim [X_1, \dots, X_k, Y] - (k + 1) + 1 \\ &= \dim A + 1 \quad (\text{par hypothèse}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \dim A(X_1, \dots, X_k) &= \dim A[X_1, \dots, X_k] - k \\ &= \dim A \quad (\text{par hypothèse}). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\dim A(X_1, \dots, X_k)[Y] = \dim A(X_1, \dots, X_k) + 1$. Par conséquent, l'anneau $A(X_1, \dots, X_k)$ est un S-domaine fort car il est local, caténaire ($\dim A(X_1, \dots, X_k) = \dim A \leq 2$) et vérifiant la condition ii) de la proposition 0.9[4]. ■

Ainsi, nous sommes en mesure de répondre à la question précédente.

Nous reprenons une construction de [3] illustrant un exemple de S-domaine fort R tel que $R[X]$ n'est pas un S-domaine fort.

Soient k un corps et X, Y, Z des indéterminées sur k . Posons :

$$V = k(X, Y) + Zk(X, Y)[Z]_{(Z)} = k(X, Y) + M_1.$$

Soit $\varphi : V \longrightarrow V/M_1 \simeq k(X, Y)$ la surjection canonique et soit V' l'anneau de valuation associé à la valuation $v : k(X, Y) \longrightarrow \mathbb{Z}[\pi]$, où $v(X) = \pi$ et $v(Y) = 1$.

L'anneau $\varphi^{-1}(V')$ est un anneau de valuation de la forme $k + M_2$ où M_2 est son idéal maximal.

Posons :

$$V_1 = \varphi^{-1}(V') = k + M_2 \text{ et } W = k(X, Y) + (Z + 1)k(X, Y)[Z]_{(Z+1)}.$$

Alors, $T = V_1 \cap W$ est un anneau de Prüfer semi-local d'idéaux maximaux M et N .

EXEMPLE 1.5 - Posons $R = k + M \cap N$. Sous les notations précédentes un tel anneau vérifie les conditions suivantes :

- a). R est un S-domaine fort.
- b). $R(X)$ n'est pas un S-domaine fort.
- c). $R[X]$ n'est pas un S-domaine fort.

DEMONSTRATION - Pour a) et c) voir [3].

b). R est local et $\dim R = 2$ [3]. Supposons que $R(X)$ soit un S-domaine fort. Il découle de la proposition 1.4 que

$$\dim R[X] = \dim R + 1$$

et

$$\dim R[X, Y] = \dim R + 2 = 4.$$

Ce qui est contradictoire avec,

$$\dim R[X, Y] = \dim_v R + 2 = 3 + 2 = 5$$

(il est établi dans [3] que $\dim_v R = 3$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **D.F. ANDERSON - A. BOUVIER - D.E. DOBBS - M. FONTANA - S. KABBAJ.**
On Jaffard domains.
Expositiones Mathematicae. Bibliograph. Institut & F.A. Brock. AG 6(1988)145-175.
- [2] **A. BOUVIER - S. KABBAJ.**
Examples of Jaffard domains.
Journal of pure and applied algebra 54 (1988) 155-165.
- [3] **J.W. BREWER - P.R. MONTGOMERY - E.A. RUTTER- W.J.HEINZER.**
Krull dimension of polynomial rings.
Springer Lecture Notes Math. 311 (1972), 26-45.
- [4] **S. KABBAJ.**
Spectres et théories de la dimension dans les anneaux de polynômes à coefficients dans un produit fibré.
Thèse de doctorat. Université Claude Bernard - Lyon I (1988).
- [5] **S. MALIK - J.L. MOTT.**
Strong S-domains.
J. Pure Appl. Algebra 28 (1983), 249-264.