N. DESOLNEUX-MOULIS

Variables action-angle à singularités d'après Elliasson

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 4B
, p. 25-35
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___4B_25_0>

VARIABLES ACTION-ANGLE A SINGULARITES
D'APRES ELLIASSON

N. DESOLNEUX-MOULIS

Ceci est l'exposé du schéma de la démonstration du théorème d'Elliasson dans le cas elliptique.

On s'attachera surtout à donner la structure de la démonstration pour les détails des récurrences on renvoie à la thèse d'Elliasson ou à son article à paraître aux Commentarii Helvetici.

Note. Toutes les fonctions considérées par la suite seront supposées de classe C^{∞} .

I. Principales définitions et Enonçé du théorème.

Dans toute la suite nous nous plaçons dans un voisinage de 0 de $\mathbf{R}^{2n}$, U qui sera muni soit de la structure symplectique standard ω_0 , soit d'une autre structure ω (qui sera précisée au cours de la démonstration).

On notera $\{,\}_0$ le crochet de Poisson associé à ω_0 $\{,\}_\omega$ le crochet de Poisson associé à ω. La structure ω_0 (resp. ω) étant donnée, on considère $\langle,\rangle_0$ (resp. $\langle,\rangle$) un produit scalaire compatible, ∇f (resp. $\nabla^\circ f$ le gradient d'une fonction) et J_0 (resp. J) l'opérateur de $\mathbf{R}^{2n}$ tel que , $J_0 \nabla^\circ f$ (resp. $J \nabla f$) soit le champ hamiltonien de f pour la structure ω_0 (resp. ω).

ALGEBRE DE LIE Q DES FORMES QUADRATIQUES SUR $\mathbf{R}^{2n}$

Soit Q l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^{2n}$ muni d'un crochet de Poisson $\{,\}$.

Un élément q de Q étant considéré comme une application de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$, on vérifie que le crochet de Poisson $\{,\}$ induit sur Q une structure d'algèbre de Lie. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1 : *Toute sous algèbre de Cartan $\mathcal{H}^{(2)}$ de Q est de dimension n, et il existe dans $\mathbb{R}^{2n}$ un système de coordonnées symplectiques $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots y_n)$ tel que : $\mathcal{H}^{(2)}$ admette une base formée d'élements de l'une des formes suivantes :*

(1) $\quad q_i = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2)$

(2) $\quad q_i = x_i\, y_i$

(3) $\quad q_i = (x_i\, y_i + x_{i+1}\, y_{i+1})$

$\qquad q_{i+1} = x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i$

Ces deux derniers types d'éléments (3) se présentent toujours par paires.

PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION

Au lieu d'étudier Q on étudie $\mathcal{X}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens des éléments de Q.

L'algèbre $\mathcal{X}$ est une algèbre de champs linéaires le crochet étant le crochet usuel des champs de vecteurs, une sous algèbre de Cartan $\mathcal{C}$ de $\mathcal{X}$ est donc une sous algèbre maximale de champs hamiltoniens linéaires commutant 2 à 2. La proposition se démontre alors facilement en construisant dans $\mathbb{C}^{2n}$ une base de vecteurs propres pour tous les opérateurs linéaires associés aux éléments de $\mathcal{C}$.

DEFINITION 1 : *Une sous algèbre de Cartan de Q sera dite de type elliptique si elle admet une base formée d'éléments de type (1).*

THEOREME : *Soient $h_1,\dots,h_n$ n applications de classe C^∞ de U dans R vérifiant les hypothèses suivantes :*

(i) $\quad h_i(0) = 0$

(ii) $\quad Dh_i(0) = 0$

(iii) $\quad \{h_i,h_j\}_0 = 0$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$ *et* $1 \leqslant j \leqslant n$.

(iv) *l'algèbre de Lie engendrée par les jets d'ordre 2 en 0 des* $h_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ *est de type elliptique.*

Alors, il existe U_1 *un voisinage de 0 contenu dans* U, ϕ *un difféomorphisme symplectique de* U_1 *sur* $\phi(U_1)$, *et* n *applications* $\psi_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ *de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}$ *tels que*

$$\forall i \ (1 \leqslant i \leqslant n) \quad h_i \circ \phi \ (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = \psi_i (q_1 \ldots q_n)$$

$$\text{où} \quad q_i = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2)$$

NOTATION : Dans toute la suite si h est une application de U des $\mathbf{R}$, on notera $h^{(2)}$ le jet d'ordre 2 de h en 0.

REMARQUE. Dans sa thèse Elliasson a démontré un théorème analogue, dans le cas où l'algèbre de Lie engendrée par les $h_i^{(2)}$ est de dimension n mais de type non elliptique.

Dans toute la suite, on notera $\mathscr{H}$ (respectivement $\mathscr{H}^{(2)}$) l'algèbre de Lie (commutative) engendrée par $h_1,\ldots,h_n$ (respectivement $h_1^{(2)},\ldots, h_n^{(2)}$).

II. Définition du lieu singulier et propriétés.

DEFINITION 2 :

Le lieu singulier S (resp. $S^{(2)}$) *de* $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{H}^{(2)}$) *est :*

$S = \{ z \ ; \ z \in U \ , \ \text{rang} \ (Dh_1(z),\ldots,Dh_n(z)) < n \ \}$

$S^{(2)} = \{ z \ ; \ z \in U \ ; \ \text{rang} \ (Dh_1^{(2)}(z),\ldots,Dh_n^{(2)}(z) < n \ \}$

on pose :

$S_r = \{ z \ ; \ z \in U \ \text{rang} \ (Dh_1(z),\ldots,Dh_n(z) \leqslant r \ \}$

$S_r^{(2)} = \{ z \ ; \ z \in U \ \text{rang} \ (Dh_1^{(2)}(z),\ldots,Dh_n^{(2)}(z) \leqslant r \ \}$

REMARQUE.

- La notion qui sera utilisée dans la suite est celle de germe en 0 de lieu singulier. Par abus de langage on raisonnera toujours sur le lieu singulier.

- $S_r \subset S_{r+1}$ et $S_r^{(2)} \subset S_{r+1}^{(2)}$

$$S_0^{(2)} = \{0\}$$

$$S_1^{(2)} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i \qquad E_i = \left\{ \begin{array}{l} z = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \; ; \\ x_j = 0 \quad \text{si } j \neq i \\ y_j = 0 \quad \text{si } j \neq i \end{array} \right\}$$

$$S_2^{(2)} = \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (E_i + E_j)$$

On définit ainsi par récurrence l'espace $S_{n+1}^{(2)}$ comme réunion des sous-espaces engendrés par :

un sous espace $E \subset S_r^{(2)}$ et un sous-espace E_i.

Le but de la première partie de la démonstration du théorème est de montrer que S_r est une réunion de graphes au-dessus des sous-espaces contenus dans $S_r^{(2)}$ (pour $1 \leqslant r < n$) et qu'il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(S_r) = S_r^{(2)}$ (pour $1 \leqslant r < n$).

QUELQUES LEMMES SUR LES SINGULARITES.

LEMME 1 : *Soient* $X_1,\dots,X_n$ n *champs de vecteurs définis sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}^{2n}$ *tels que*

(i) le jet d'ordre 1 *de* X_j *en* 0 *est* ∇q_j

(ii) rang $(X_1,\dots,X_n) \leqslant r$ *sur* S_r

Soit Z *un champ de vecteurs tel que :*

(iii) rang $(Z,X_1,\dots,X_n) \leqslant n$ *partout*

(iv) rang $(Z,X_1,\dots,X_n) \leqslant r$ *sur* $S_r^{(2)}$

Alors il existe n *fonctions* $\xi_1 \dots \xi_n$ *de classe* C^∞ *sur un voisinage de* 0 *telles que* $Z(z) = \sum_n \xi_i(z)\, X_i(z)$.

DEMONSTRATION.

De l'hyposhèse (i) sur $X_1 \ldots X_n$ on déduit que $X_1 \ldots X_n$ sont indépendants sur un ouvert dense de U (le complémentaire de $S^{(2)}$) . Le seul problème est donc la continuité et la différentiabilité des fonctions ξ_i sur $S^{(2)}$.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de vecteurs et la dimension des strates du lieu singulier en appliquant les 2 lemmes (très simples) suivants :

LEMME 2 :

Soit f *une application de classe* C^∞ *de* $\mathbb{R}^{2n}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* f E_1 = 0
Alors il existe g_1 *et* h_1 *2 applications de classe* C^∞ *telles que*
$f = x_1 g_1 + y_1 h_1$.

LEMME 3 :

Soient V_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ m *sous-espaces contenus dans* $S_2^{(2)}$
f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ m *applications de* V_i *dans* $\mathbb{R}$.
On suppose que $f_i = f_j$ $V_i \cap V_j$.
Alors il existe f *de* $\mathbb{R}^{2n}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f|V_i = f_i$.

III. Démonstration du théorème

Elle se fait en 3 étapes.

A) CONSTRUCTION D'UN DIFFEOMORPHISME ϕ TEL QUE $\phi(S) = S^{(2)}$

On construit le difféomorphisme ϕ par induction sur la dimension des strates en faisant l'hypothèse de récurrence suivante :

Hypothèse de récurrence : R_{k-1}

Pour tout i $(1 \leqslant i < k)$ soit $(h_1,\ldots,h_i)$ une famille d'applications d'un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses (i), (ii), (iii), du théorème et l'hypothèse (iv)' : l'algèbre de Lie engendrée par $h_1^{(2)},\ldots,h_i^{(2)}$ est de type elliptique de dimension i. Alors il existe un difféomorphisme ϕ_i d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $\phi_i(S_i) = S_i^{(2)}$.

(Dans cet énonçé S_i est le lieu singulier de la famille engendrée par $h_1,\dots,h_i$).

Si $k = 1$ $\quad R_0$ est toujours vérifiée car $S_0 = 1$ point.

Supposons R_{k-1} vérifiée on démontre R_K en appliquant le lemme suivant (lemme 4) successivement à tous les sous-espaces contenues dans $S_k^{(2)}$ pour la structure symplectique $\phi_{k-1}^{*}(\omega_0)$ et les fonctions $h_1 \circ \phi_{k-1},\dots, h_k \circ \phi_{k-1}$.

LEMME 4 :

Soit $h_1,\dots,h_k$ k *applications de* $\mathbf{R}^{2n}$ *dans* $\mathbf{R}$ *vérifiant les hypothèses (i) , (ii), (iii), (iv)' . Soit* $\mathcal{H}_k$ *l'algèbre engendrée par* $h_1 \dots h_k$
On suppose que $S_{k-1} = S_{k-1}^{(2)}$.

Soit E *un sous-espace symplectique de dimension* $2(k-1)$ *contenu dans* S_{k-1}

Soit h *un élément de* $\mathcal{H}_k$ *vérifiant les hypothèses suivantes :*

(i) $h^{(2)}/E = 0$

(ii) $h^{(2)}/E^{\perp}$ *est une forme quadratique non singulière..*

(iii) $\mathcal{H}^{(2)}/E$ *est une sous-algèbre de cartan de dimension* $2(k-1)$ *de* Q/E.

Alors il existe une unique sous-variété N *de* $\mathbf{R}^{2k}$ *tangente à* E *en* 0 *sur laquelle le rang de* $Dh_1,\dots,Dh_k$ *est inférieur à* k.
En outre si h' *est une autre application de* $\mathbf{R}^{2n}$ *dans* $\mathbf{R}$ *telle que* $\{h',h_i\} = 0$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant k$.

Alors le rang de $Dh_1,\dots,Dh_k$ *,* Dh' *est inférieur à* k *sur* N.

Principe de la démonstration du lemme 4 :

Sans rien changer à la généralité du problème, on peut supposer que $h_1^{(2)}/E ,\dots, h_{k-1}^{(2)}/E$ engendrent $\mathcal{H}^{(2)}/E$ et que $h_k = h$.

Pour toute application $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon)$ de $\mathbf{R}^{2n}$ dans $\mathbf{R}^k$ on considère le champ :

$$X^{\varepsilon}(z) = \varepsilon_1 \, J\nabla h_1 + \dots + \varepsilon_{k-1} \, J\nabla h_{k-1} + J\nabla h$$

et on cherche ε voisin de 0 telle que l'équation $X^{\varepsilon}(z) = 0$ admette des solutions en z dans un voisinage de 0.

On pose $F = E^{\perp}$ et on note Π_E , Π_F les projections orthogonales respectives sur E et F on pose $\Pi_E(z) = z_E$ $\Pi_F(z) = z_F$.

Pour toute application ε de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^k$ assez proche de 0, le théorème des fonctions implicites (applicable grâce à l'hypothèse (ii)) montre qu'il existe une application φ_ε d'un voisinage de 0 dans E, dans F telle que :

$$\Pi_F X^{\varepsilon}(z_E,\varphi_\varepsilon(z_E)) = 0.$$

On résoud ensuite l'équation $\Pi_E X^{\varepsilon}(z_E,\varphi_\varepsilon(z_E)) = 0$ en appliquant le lemme 1 sur les singularités aux champs $\Pi_E\ X^{\varepsilon}$, $\Pi_E\ J\nabla h_1$,..., $\Pi_E\ J\nabla h_{k-1}$, $\Pi_E\ J\nabla h_k$.

L'hypothèse de récurrence montre que les hypothèses du lemme 1 sur le rang de ce système de vecteur sur le lieu singulier sont bien vérifiées. On en déduit l'existence de fonctions $c_{i,\varepsilon}(z_E)$ telles que :

$$\Pi_E X^{\varepsilon}(z_E,\varphi_\varepsilon(z_E)) = \sum_{i=1}^{k} c_{i,\varepsilon}(z_E)\quad \Pi_E\ J\nabla h_i(z_E,\varphi_\varepsilon(z_E))$$

Il reste donc pour déterminer ε à résoudre le système de k équations à k inconnues.

L'application ε étant ainsi déterminée, le graphe de φ_ε est une sous-variété N, tangente à E en 0 le long de laquelle le rang de $Dh_1(z),\dots,Dh_k(z)$ est inférieur à k.

En outre si h' est telle que $\{h',h_i\} = 0$ l'image par le flot de J grad h' de N vérifie les mêmes propriétés. La variété N d'après sa définition étant unique, N est invariante par le flot de J grad h' ; N étant symplectique et de dimension 2(k-1) le long de N J grad h' est combinaison linéaire de J grad h'_k $(1 < U < k)$ Donc N est contenue dans le lieu singulier $S_{k-1}(\mathscr{H})$.

FIN DE LA CONSTRUCTION DU DIFFEOMORPHISME.

Avec les notations précédentes on pose :

$$\phi(z_E,z_F) = (z_E\ ,\ z_F - \varphi_\varepsilon(z_E))$$

On remarque que ce difféomorphisme laisse fixe le sous-espace d'équation $z_E = 0$ ainsi que tous les points où $z_F = 0$ et $\varphi_\varepsilon(z_E) = 0$. C'est-à-dire tout les points de E contenus dans $S_{k-2}(\mathscr{H})$.

B) CONSTRUCTION DES FONCTIONS ψ

D'après la partie A, nous pouvons supposer que outre les hypothèses du théorème les lieux singuliers de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}^{(2)}$ coïncident.

Dans toute la suite, on utilisera le lemme suivant :

LEMME 5 : *Soit sur* $\mathbf{R}^{2n}$ *une fonction* h *telle que :* $\{h,q_i\} = 0$ *pour tout* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Alors il existe une application* ψ *de* $\mathbf{R}^n$ *de* $\mathbf{R}$ *telle que :*

$$h = \psi(q_1,\ldots,q_n).$$

REMARQUE. Plus intuitivement les hypothèses du lemme se traduise par : h est constante sur les tores d'équation $q_i = c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

DEMONSTRATION.

Elle se fait par récurrence sur n.

Si $n = 1$ $q = x^2 + y^2$; la fonction h est constante sur les cercles $x^2 + y^2 = r^2$.

Le théorème d'inversion locale appliqué au passage en coordonnées polaires montre que la fonction ψ existe et est continue sur un voisinage de 0 et de classe C^∞ sur $\mathbf{R} - \{0\}$; pour montrer que cette application est de classe C^∞ on se ramène à un théorème classique sur les fonctions paires définies sur $\mathbf{R}$ en considérant l'application $h(x,0)$; La démonstration précédente se généralise facilement au cas où la fonction h dépend d'un paramètre t.

Nous faisons l'hypothèse de récurrence suivante (H).

H_{n-1}

Soit h une application de $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{2(n-1)}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\{h,q_i\} = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \qquad (q_i(x_i,y_i) = x_i^2 + y_i^2$$

Alors il existe une application ψ d'un voisinage de 0 de $\mathbf{R}^h \times \mathbf{R}^{n-1}$ telle que

$$h(t,x_1,\ldots,x_{n-1}, y_1,\ldots,y_{n-1}) = \psi\ (t,q_1,\ldots,q_{n-1})$$

Démontrons l'assertion précédente du rang n. (H_n).

D'après l'hypothèse de récurrence, en prenant pour paramètre (t,x_n,y_n) il existe une fonction ψ_{n-1} telle que

$$h(t,x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = \psi_{n-1}(t,x_n,y_n,q_1,\ldots,q_{n-1}) .$$

En appliquant une fois encore l'hypothèse de récurrence à la fonction ψ_{n-1} en considérant $(t,q_1,\ldots,q_n)$ comme paramètres on en déduit qu'il existe une fonction telle que :

$$\psi_{n-1}(t,x_n,y_n,q_1,\ldots,q_{n-1}) = \psi(t,q_1,\ldots,q_n) .$$

CONSTRUCTION DE LA FONCTION ψ

Nous construisons la fonction ψ de l'énoncé du théorème par récurrence sur les strates au lieu singulier.

Sans rien changer à la généralité du problème, nous pouvons supposer que $h_i^{(2)} = q_i$.

CONSTRUCTION SUR LES STRATES DE DIMENSION 2

Le lemme de Morse appliqué à la restriction de h_i à E_i montre qu'il existe un difféomorphisme $\phi_{i,1}$ de E_i tel que :

$$h_i|_{E_i} \circ \phi_{i,1} = q_i$$

Le lemme montre alors qu'il existe des fonctions $\psi_{j,i,1}$ telles que :

$$\text{si } j \neq i \quad h_j|_{E_i} \circ \phi_{i,1} = \psi_{j,i,1}(q_i)$$

$$j = i \quad \psi_{i,i,1}(q_i) = q_i .$$

On construit alors le difféomorphisme diagonal

$$\phi_1 = (\phi_{1,1},\ldots,\phi_{n,1}) .$$

D'autre part $\psi_{j,i,1}(0) = 0$ $\forall_j$ et $\forall_i$. On pose $\psi_{j,1}(q_1,\ldots,q_n) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{j,i,1}(q_i)$

On remarque que $\psi_{j,1} | E_i = \psi_{j,i,1}$.

LEMME DE RECURRENCE.

On suppose sur $\mathbb{R}^{2k}$ espace symplectique données k fonctions $(h_1,\dots,h_k)$ vérifiant les hypothèses au théorème et telles que $S_{k-1}(\mathscr{H}_k) = S_{k-1}(\mathscr{H}_k^{(2)})$ où $\mathscr{H}_k$ est l'algèbre de Lie engendrée par $h_1 \dots h_k$. On suppose d'autre part qu'il existe des fonctions $\psi_1,\dots,\psi_k$ définies sur $\mathbb{R}^{2k}$ telles que :

$$h_i = \psi_i(q_1,\dots,q_k) \quad \text{sur} \quad S_{k-1}(\mathscr{H}_k) .$$

Alors il existe un difféomorphisme local ϕ_k de $\mathbb{R}^{2k}$ tel que $h_i \circ \phi_k = \psi_i(q_1,\dots,q_k)$ sur un voisinage de 0.

En outre si h est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{2k}$ telle que $\{h,h_i\} = 0$ alors il existe ψ telle que $h \circ \phi_k = \psi(q_1,\dots,q_k)$.

Principe de la démonstration du lemme de récurrence

On applique la méthode dite du chemin de Moser. On construit un champ de vecteurs Z_t dépendant du temps tel que :

$$\forall_j \quad 1 \leqslant j \leqslant k \quad d(\psi_j(q_1,\dots,q_n) + t(h_j - \psi_j(q_1,\dots,q_n)) \lrcorner Z_t = -(h_j - \psi_j(q_1,\dots,q_n))$$

La construction de Z_t est possible car $h_j - \psi_j(q_1,\dots,q_n)$ s'annule sur $S_{k-1}(\mathscr{H}_k)$ grâce au lemme 1 sur les singularités.

On remarque que Z_t s'annule sur $S_{k-1}(\mathscr{H}_k)$. On pose ϕ_t le flot de Z_t, on vérifie que ϕ_1 est le difféomorphisme cherché.

La deuxième partie de la conclusion se déduit immédiatement du lemme.

Indications sur la construction globale des fonctions ψ_i et du difféomorphisme q

On construit d'abord, comme indiqué ci-dessus les fonctions $\psi_{i,1}$ et le difféomorphisme ϕ_1. Puis à chaque sous-espace $E_i + E_j$ on applique le lemme de récurrence, ce qui permet de construire sur $E_i + E_j$ les fonctions $\psi_{\ell,i,j,2}$ et le difféomorphisme $\phi_{i,j,2}$ (pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$) $\phi_{i,j,2}$ est l'identité en restriction à $E_i + E_j$ et $\psi_{\ell,i,j,2} / E_i = \psi_{\ell,i,1}$.

Le procédé diagonal utilisé au début de ce paragraphe permet donc de construire un difféomorphisme ϕ_2 de $\mathbb{R}^{2n}$ et des fonctions $\psi_{\ell,2}$ telles que pour tout triplé (i,j,ℓ), on ait :

$$h_\ell \circ \phi_2 /_{E_i + E_j} = \psi_{\ell,i,j,2}(q^1,\dots,q_n) .$$

On est alors en mesure d'appliquer le lemme de récurrence à chaque sous-espace $E_i + E_j + E_k$.

C) CONSTRUCTION D'UN DIFFEOMORPHISME SYMPLECTIQUE TEL QUE LE THEOREME SOIT VERIFIE.

Le difféomorphisme ϕ construit à l'étape B) de la démonstration transforme la forme symplectique ω_0 en une forme $\omega_1 = \phi^*(\omega_0)$

On remarque d'autre part que le feuilletage en tores T^n défini par les équations $q_i = \iota_i$ est lagrangien pour les structures symplectiques définies par les les formes ω_0 et ω_1 . En effet pour la structure initiale c'est évident. Pour la structure définie par ω_1 on remarque que :

$$\{h_i \circ \phi \, , \, h_j \circ \phi\}_{\omega_1} = \{h_i, h_j\}_{\omega_0} = 0$$

et le feuilletage défini par les équations $h_i \circ \phi = k_i$ coïncide avec le feuilletage défini par les équations $q_i = c_i$. On montre sous ces hypothèses qu'il existe un difféomoéphisme ψ respectant le feuilletage tel que $\psi^* \omega_1 = \omega_0$. (La démonstration de ce point est très détaillé dans la thèse d'Elliasson).

Alors $h_i \circ \phi \circ \psi$ est constante sur chaque feuille du feuilletage donc il existe des fonctions ψ_i' telles que

$$h_i \circ \phi \circ \psi = \psi_i'(q_1,\dots,q_n).$$