PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. OUZILOU

Éléments de géométrie graduée

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 187-197
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_187_0>

ELEMENTS DE GEOMETRIE GRADUEE

*

R. Ouzilou

1. CALCUL DIFFERENTIEL SUR LES SUPERALGEBRES.

(1.1) Généralités : Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Par superalgèbre sur K on entend une K-algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée :

$$A = A_o \oplus A_1$$

Une superalgèbre est dite commutative (resp. anticommutative) si, pour tout couple $(a,b) \in A_\alpha \times A_\beta$ d'éléments homogènes de A :

$$a.b = (-1)^{\alpha\beta} b.a \qquad\qquad (\text{resp. } a.b = -(-1)^{\alpha\beta} b.a)$$

Le produit tensoriel de deux superalgèbres A' et A'' est une superalgèbre grâce au produit

$$(a'\otimes b').(a''\otimes b'') = (-1)^{\alpha''.\beta'} a'a''\otimes b'b'' \quad ; \quad b' \in A_{\beta'}, \ a'' \in A_{\alpha''}$$

Une superalgèbre $(A,+,[.,.])$ est dite de Lie si elle est anticommutative et si sa multiplication vérifie l'identité de Jacobi généralisée :

$$(-1)^{\alpha\gamma}[a,[b,c]] + (-1)^{\beta\alpha}[b,[c,a]] + (-1)^{\gamma\beta}[c,[a,b]] = 0$$

pour tout triple $(a,b,c) \in A_\alpha \times A_\beta \times A_\gamma$ d'éléments homogènes.

Exemples :

1) L'ensemble $A = \mathrm{End\ gr}_K(E)$ des endomorphismes gradués d'un K-espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué s'organise en une superalgèbre de Lie au moyen du crochet généralisé :

$$[u,v] = u \circ v-(1)^{\alpha\beta} v \circ u \quad ; \quad u \in A_\alpha, \ v \in A_\beta$$

2) Le produit tensoriel d'une superalgèbre associative et commutative A par une superalgèbre de Lie B est une superalgèbre de Lie $A \otimes B$.

(1.2) Superalgèbres a.c.u. : Les superalgèbres associatives, commutatives, à unité ont des propriétés remarquables. Si A est une telle superalgèbre :

1. tout élément de A_1 est de carré nul.
2. l'ensemble nil(A), des éléments nilpotents de A est un idéal gradué.
3. l'unité de A appartient à la sous-algèbre A_o.
4. un élément de A est inversible si, et seulement si, sa composante homogène de degré 0 est inversible dans A_o.

Exemple : Le produit tensoriel d'une K-algèbre a.c.u. B par l'algèbre de Grassmann $\Lambda_K(V)$ d'un K-espace vectoriel V est une superalgèbre a.c.u. A qui possède la propriété remarquable que voici : nil(A) est engendré par A_1. Cet idéal est nilpotent si, et seulement si, V est de dimension finie (l'ordre de nilpotentie de nil(A) et la dimension de V sont identiques).

(1.3) Dérivations : Un endomorphisme K-linéaire D, homogène de degré δ, d'une superalgèbre A est une dérivation (à gauche) de cette superalgèbre si, pour tout couple $(a,b) \in A_\alpha \times A$ on a l'identité de Leibniz généralisée :

$$D(a.b) = Da.b + (-1)^{\alpha\delta} aDb$$

Un endomorphisme K-linéaire D, gradué, de A est une dérivation si ses composants sont des dérivations. L'ensemble $Der_K(A)$ des dérivations de A est une sous-super-algèbre de Lie de $Endgr_K(A)$.

(1.4) Complexe de De Rham : Soit A une superalgèbre de Lie a.c.u. A tout A-module à gauche $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$-gradué E on associe canoniquement un A-module à droite $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$-gradué $\acute{E}$ (le reflet de E) en posant pour tout couple d'éléments homogènes $(a,x) \in A_\alpha \times E_\zeta$:

$$x.a = (-1)^{\alpha\xi} a.x$$

Ainsi E devient un A-bimodule.

Pour tout couple (E,F) de K-espaces vectoriels $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$-gradués on définit une "réflexion" sur $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ en posant, pour toute application homogène u, de degré δ, de E dans F :

$$\check{f}(x) = (-1)^{\delta\xi} f(x) \qquad , \qquad x \in E_\xi$$

Si E et F sont deux A-modules gradués, cette opération de réflexion transforme un opérateur A-linéaire à gauche et un opérateur A-linéaire à droite et vice-versa.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués. Si F est un A-module gradué, on définit une structure de A-module gradué sur $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ en posant, pour tout $u \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$ et tout couple d'éléments homogènes $a \in A_\alpha$, $x \in E_\beta$:

$$(a.u)(x) = (-1)^{\alpha\xi} a.u(x) \; ;$$

de la sorte, $\mathrm{Homgr}_A(E,F)$ est, pour un A-module E, un sous-A-module gradué de $\mathrm{Hom\,gr}_K(E,F)$.

Etant donné un A-module gradué E, on définit une dérivation homogène de degré δ de A dans E comme une application $u \in \mathrm{Homgr}_K^\delta(A,E)$ vérifiant :

$$D(a.b) = Da.b + (-1)^{\delta\alpha} a.Db \qquad ; \qquad a \in A_\alpha,\ b \in A$$

L'ensemble $\mathrm{Der}_K(A,E)$ des dérivations de A dans E est un sous-A-module de $\mathrm{Hom\,gr}_K(A,E)$.

Exemple fondamental :

La multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ de A est un morphisme de superalgèbres, de sorte que $I = \mathrm{Ker}\,\mu$ est un idéal gradué de $A \otimes A$. Par ailleurs, l'application $\sigma : a \longmapsto a \otimes 1$ est un morphisme de A dans $A \otimes A$ et c'est une section de μ, d'où : $A \otimes A = (A \otimes 1) \oplus I$. En posant :

$$\Omega(A) = I/I^2$$

on définit un A-module à gauche $\mathbb{Z}/2$-gradué et l'application

$$d_A : a \mapsto 1 \otimes a - a \otimes 1, \qquad \text{mod. } I^2$$

est alors une dérivation de A dans $\Omega(A)$ de degré 0.

Le couple $(\Omega(A),d_A)$ est solution d'un problème universel en ce sens que : $u \longmapsto \check{u} \circ d$ est un isomorphisme de A-modules $\mathbb{Z}_{/2}$-gradués :

$$\mathrm{Homgr}_A(\Omega(A),E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_K(A,E)$$

De plus, d_A se prolonge en une dérivation homogène de bidegré (1,0) de $\Lambda_A(\Omega(A))$ telle que $d_A^2 = 0$ (rappelons que $\Lambda_A(\Omega(A)) = A \otimes \Lambda(\Omega(A))$) - un tel prolongement est unique ; il permet de définir un complexe gradué d'où une cohomologie en superalgèbre : $H_{dR}(A)$; cette superalgèbre est bigraduée commutative.

(1.5) Cohomologie de Kostant-Braconnier :

Soient A une K-superalgèbre a.c.u. et E un A-module $\mathbb{Z}_{/2}$-gradué. On note $\Phi(A,E)$ le A-module bigradué (sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{/2}$) :

$$\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\mathrm{Der}\, A),E)$$

Les éléments de $\Phi(A,E)$ sont appelés les <u>formes différentielles graduées</u> sur A à valeurs dans E.

Dans le cas A = E, $\Phi(A,A)$ est noté plus simplement $\Phi(A)$; c'est le module des formes différentielles scalaires graduées sur A ; c'est en fait une algèbre grâce au produit $\wedge$ défini comme suit : pour $f \in \Phi(A)^p_\xi$ et pour $g \in \Phi(A)^l$ et $X_i \in A_{\xi_i}$, $i \in \{1,\dots,p+q\} = I$ on a :

$$(1) \qquad (f \wedge g)(X_1,\dots,X_{p+q}) = \sum_H (-1)^{\rho(H,H')+\eta(\xi_H,\xi_{H'})+\xi_{H'}\cdot\zeta} . f(X_H) g(X_{h'})$$

où $H = \{i_1,\dots,i_p\}$, $i_1 < \dots < i_p$, est une partie de I à p éléments, H' sa complémentaire, $X_H = X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_p}$, $\xi_H = \xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_p}$, $\rho(H,H')$ le nombre de couples $(i,i') \in H \times H'$ inversés (i.e. $i' < i$) et $\eta(\xi_H,\xi_{H'}) = \sum_{i' < i} \xi_i \, \xi_{i'}$.

Muni de ce produit $\Phi(A)$ est une superalgèbre bigraduée a.c.u. et par un produit externe analogue à (1) on fait de $\Phi(A,E)$ un $\Phi(A)$-module à gauche bigradué.

Théorème : *Il existe une unique dérivation* d *de bidegré* (1,0) *de* $\Phi(A)$, *telle que* $d^2 = 0$ *et*

$$df(X) = X(f) \qquad , \quad X \in \mathrm{Der}\ A, \quad f \in A.$$

Pour construire cette dérivation, on fait appel aux dérivations intérieures $i(X)$, $X \in \mathrm{Der}\ A$, de bidegré $(-1, \xi)$, définies pour $X, X_1, \dots, X_{p-1}$ homogènes de degrés respectifs $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ par :

$$i(X)f.(X_1, \dots, X_{p-1}) = (-1)^{\xi(\xi_1 + \dots + \xi_{p-1})} f(X, X_1, \dots, X_{p-1})$$

puis aux dérivées de Lie $\theta(X)$, homogènes de bidegré $(0, \xi)$, définies par récurrence par la règle de "supercommutation" :

$$[\theta(X), i(Y)] = i([X,Y])$$

Le prolongement d est alors défini par

$$[d, i(X)] = \theta(X)$$

on obtient ensuite $[d, \theta(X)] = 0$ et $d^2 = 0$.

La cohomologie du complexe $\Phi(A)$ ainsi définie prolonge naturellement celle de De Rham : il existe, en effet, un unique morphisme de superalgèbres $\varphi_A : \Lambda_A(\Omega(A)) \to \Phi(A)$ qui prolonge id_A ; ce morphisme est en fait un morphisme de complexes gradués d'où un morphisme naturel

$$H_{dR}(A) \to H(\Phi(A)).$$

(1.6) Connexions graduées (J. Braconnier) :

Soit E un A-module $\mathbb{Z}_{/2}$-gradué (A : superalgèbre a.c.u.).

La donnée d'une application K-linéaire D, de degré 0, de E dans $\mathrm{Hom}\ \mathrm{gr}_A(\mathrm{Der}\ A, E)$ équivaut à celle d'une application A-linéaire de degré 0 : $X \to D_X$ de Der A dans $\mathrm{End}\ \mathrm{gr}_K(E)$.

Définition : Une telle application est une connexion (graduée) sur E si, pour tout $y \in E$:

$$D_X(fy) = X(f)y + (-1)^{\alpha\xi} fD_X(y) \qquad ; \qquad X \in (\mathrm{Der}\ A)_\xi\ ,\ f \in A_\alpha$$

Exemple : $E = A$, l'injection canonique de $\mathrm{Der}_K(A)$ dans End $\mathrm{gr}_K(E)$.

Nota Bene : Il existe une application A-linéaire canonique :

$$\varphi_E : \Omega(A) \underset{A}{\otimes} E \to \mathrm{Hom\ gr}_A(\mathrm{Der}\ A,E)$$

définie par

$$\varphi_E(fdg \otimes x)(X) = fX(g).x$$

En général, cette application n'est pas bijective. Jean Braconnier a constaté que les connexions sur E qui se factorisent par φ_E ne sont pas celles qu'on rencontre en géométrié graduée.

Extensions de Lie : Une connexion D_X sur E s'étend naturellement en un endomorphisme homogène de $\Phi(A,E)$ de bidegré $(0,\xi)$, si $X \in (\mathrm{Der}\ A)_\xi$; pour cela il suffit de poser, pour $X_1,\ldots,X_p$ homogènes de degrés $\xi_1,\ldots,\xi_p$:

$$(\Theta^D(X)f)(X_1\wedge\ldots\wedge X_p) = (-1)^{\xi(\xi_1+\ldots+\xi_p)} D_X(f(X_1\wedge\ldots\wedge X_p))$$
$$- \sum_{i=1}^{p} (-1)^{\xi(\xi_1+\ldots+\xi_{i-1})+i-1} f([X,X_i]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\check{X}_i\wedge\ldots X_p)$$

Ces extensions $\Theta^D(X)$, $X \in \mathrm{Der}\ A$, permettent de définir un unique endomorphisme D de $\Phi(A,E)$ de bidegré (1,0) et tel que :

$$\Theta^D(X) = [D,i(X)]$$

En général, $D^2 = D \circ D$ n'est pas nul ; cette application s'annule dès que sa restriction $R : E \to \Phi(A,E)^2$ est nulle ; cette restriction est la courbure de la connexion D ; c'est une application $\Phi(A)$-linéaire.

Cas E = Der A :

$\Phi^1(A,\mathrm{Der}\ A) = \mathrm{End}\ gr(\mathrm{Der}\ A)$. On pose :

$$T = D(id_{\mathrm{Der}\ A}) \in \Phi^2(A,\mathrm{Der}\ A)$$

Explicitement, pour $(X_1,X_2) \in (\mathrm{Der}\ A)_{\xi_1} \times (\mathrm{Der}\ A)_{\xi_2}$ on a :

$$T(X_1 \wedge X_2) = D_{X_1}X_2 - (-1)^{\xi_1\xi_2} D_{X_2}X_1 - [X_1,X_2] \qquad \text{(Torsion)}$$

Dans ce cas particulier :

$$R(X_1 \wedge X_2) = [D_{X_1},D_{X_2}] - D_{[X_1,X_2]} \qquad \text{(Courbure)}$$

De plus, pour toute $X \in (\mathrm{Der}\ A)_\xi$, on définit un endomorphisme D^p_X de $\Lambda^p_A(\mathrm{Der}\ A)$ en posant pour $X_i \in (\mathrm{Der}\ A)_i$, $1 \leq i \leq p$:

$$D^p_X(X_1 \ \dots\ X_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{\xi(\xi_1+\dots+\xi_{i-1})} X_1 \wedge \dots \wedge D_X X_i \wedge \dots X_p$$

Ceci permet de définir les dérivées covariantes :

$$D_X T = D_X \circ T - T \circ D^2_X \qquad ; \qquad D_X R = [D_X\ ,\ R.] - R \circ D^2_X$$

Avec toutes ces notations on a les deux identités de Bianchi graduées :

(1) $\ ^S(R(X_1 \wedge X_2).X_3 - T(T(X_1 \wedge X_2) \wedge X_3) - D_{X_1}T(X_2 \wedge X_3)) = 0$

(2) $\ ^S(D_{X_1}R(X_2 \wedge X_3) - R(T(X_1 \wedge X_2) \wedge X_3) = 0$

où $^S f$ désigne, pour toute application trilinéaire $f(X_1,X_2,X_3)$, la somme circulante graduée, pour X_1,X_2,X_3 homogènes de degrés respectifs ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$$^S f(X_1,X_2,X_3) = (-1)^{\xi_1\xi_3} f(X_1,X_2,X_3) + (-1)^{\xi_2\xi_1} f(X_2,X_3,X_1) + (-1)^{\xi_1\xi_3} f(X_3,X_1,X_2)$$

2. VARIETES GRADUEES.

(2.1) Définitions : Soit M une variété différentielle (C^∞), connexe et paracompacte. Par prégraduation de M on entend la donnée d'un faisceau A_M de superalgèbres a.c.u. et d'un morphisme p du faisceau A_M dans le faisceau C_M des fonctions différentiables sur M. On dit qu'un ouvert U de M trivialise cette prégraduation s'il existe un isomorphisme $\varphi_U : A(U) \to C^\infty(U) \otimes \Lambda(E_U)$ compatible avec p et la projection canonique $C^\infty(U) \otimes \Lambda(E_U) \to C^\infty(U)$, E_U étant un espace vectoriel de dimension finie ; dans ces conditions, la suite

$$0 \to \text{nil } A(U) \to A(U) \xrightarrow{p(U)} C^\infty(U) \to 0$$

est exacte et nil A(U) est un idéal nilpotent dont l'ordre de nilpotence coïncide avec la dimension de E_U.

On dit qu'une prégraduation A de M est une graduation si tout ouvert de M possède un recouvrement par des ouverts trivialisant A. Une variété graduée consiste en un couple (M,A), M étant une variété et A une graduation sur M.

Si (U, φ_U) est une trivialisation de A(U) et si $(U ; x_1,\dots,x_m)$ est une carte de M , un ensemble d'éléments $(u_1,\dots,u_m ; v_1,\dots,v_n)$ tels que $p_U(u_i) = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, et $\varphi_U(v_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une base de E_U est appelé un système de coordonnées locales graduées de U ; les coordonnées u_i sont dites paires, les coordonnées v_j sont dites impaires. Tout $f \in A(U)$ s'écrit alors canoniquement sous la forme

$$f = \Sigma f_M v_M \qquad , \qquad f_M \in \varphi_U^{-1}(C^\infty(U))$$

où, pour $H \subset \{1,\dots,x\}$, $v_M = v_{i_1} \dots v_{i_p}$ si $H = \{i_1,\dots,i_p\}$, $i_1 < \dots < i_p$.

(2.2) Champs de vecteurs gradués : Soit (M,A) une variété graduée. Pour tout ouvert U de M, on désigne par $\mathscr{X}(U)$ le A(U)-module $\mathbb{Z}_{/2}$-gradué des dérivations de A(U).

Si $X \in \mathscr{X}(U)_0$, X laisse stable nil(A(U)) et, par conséquent induit une dérivation $\tilde{X}$ de $C^\infty(U)$. L'application $X \to \tilde{X}$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathscr{X}(U)_0$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur U.

Soit A(M)' = Hom gr(A(M),IR) le dual gradué de A(M). Pour tout $x \in M$, $f \longmapsto p(f)(x)$ est un morphisme de superalgèbres $A(M) \to \mathbb{R}$, ce qui permet de munir A(M)' d'une structure de A(M)-module. Le A(M)-module des dérivations de A(M) dans A(M)' est noté $T_x(M,A)$; c'est l'espace tangent gradué à (M,A) en x. Tous ces espaces tangents constituent un fibré de base M dont les sections locales au-dessus d'un ouvert U de M sont les dérivations de A(U) dans $C^\infty(U)$. On pose :

$$\mathrm{Der}(A(U), C^\infty(U)) = \tilde{\mathscr{X}}(U).$$

$X \to p(U)$ est une application A(U)-linéaire de $\mathscr{X}(U)$ dans $\tilde{\mathscr{X}}(U)$. Ceci permet de faire éclater $T_x(M,A)$ et un sous-espace isomorphe à $T_x(M)$ (espace des vecteurs tangents pairs) et un sous-espace $T_x(M,A)_1$ (espace des vecteurs tangents impairs), d'où un épimorphisme de fibrés vectoriels de base M : $T(M,A) \to T(M)$ semi-fissible.

(2.3) Tenseurs gradués : Les tenseurs covariants gradués sur une variété graduée (M,A) sont les éléments de A(M)-module bigradué :

$$\mathrm{Hom\ gr}_{A(M)}(T_{A(M)}(\mathscr{X}), A(M))$$

Un tenseur $g : T^2_\Lambda(\mathscr{X}) \to \Lambda$ est dit régulier si $X \to i(X)\ \varphi$ est un isomorphisme de $\mathscr{X}$ sur l'espace $\Phi(\Lambda)^1$ des formes différentielles graduées d'ordre 1. Ceci a lieu si, et seulement si, les restrictions de ce tenseur aux sous-espaces tangents pairs $T_x(M)$ et aux sous-espaces tangents impairs $\mathscr{X}^1_x(M)$ sont des formes bilinéaires non dégénérées.

Un tenseur g, de bidegré (2,0) régulier et symétrique (au sens gradué) définit sur (M,A) une structure pseudoriemannienne graduée. Ceci a lieu si, et seulement si, la restriction "paire" de g définit une structure pseudo-riemannienne (classique) sur M et si les restrictions "impaires" de g définissent des espaces symplectiques $\mathscr{X}^1_x(M)$. Une structure pseudo-riemannienne graduée est dite riemannienne si la structure pseudo-riemannienne paire sous-jacente est riemannienne. On démontre que :

"Sur toute variété graduée (M,A), connexe, paracompacte, dont la dimension "impaire" est un nombre pair, il existe toujours une structure riemannienne graduée".

Comme dans le cas classique, on démontre aussi, pour toute structure pseudo-riemannienne graduée (M,A,g) l'existence d'une connexion unique D sur $\mathcal{X} = \mathrm{Der}(A)$, sans torsion, et qui rend g covariante au sens gradué, i.e., pour tout triple $(X,Y,Z) \in \mathcal{X}_\xi \times \mathcal{X}_\eta \times \mathcal{X}$ on a :

$$X.g(Y,Z) = g(D_X Y,Z) + (-1)^{\xi\eta}\, g(Y,D_X Z)$$

(2.4) Courbure riemannienne et tenseur de Ricci : Soit (M,A,g) une variété pseudo-riemannienne graduée. Notons D la connexion canoniquement associée à g et R la courbure de D. Alors, pour tout $Z \in \Lambda^2_A \mathcal{X}$, $g(R(Z).,.)$ est une forme graduée de bidegré (2,0), on pose :

$$C(Z,X \wedge Y) = -g(R(Z)X,Y).$$

Alors, $(Z,Z') \longmapsto C(Z,Z')$ est une application bilinéaire

$$C : \Lambda^2_A \mathcal{X} \times \Lambda^2_A \mathcal{X} \to A$$

de degré 0, symétrique (au sens gradué) ; c'est la courbure riemannienne graduée de g.

Supertrace :

Soit $E = E_0 \oplus E_1$ un K-espace vectoriel $\mathbb{Z}/2$-gradué. On définit un automorphisme ε de E en posant pour tout élément homogène x de E :

$$\varepsilon(x) = (-1)^{\deg x}.x$$

Si E est de dimension finie et u un endomorphisme de E, on appelle supertrace de u le scalaire $\mathrm{Str}(u) = \mathrm{Tr}(\varepsilon \circ u)$.

Ceci étant, considérons une variété graduée riemannienne (M,A,g) de courbure R. Pour tout couple $(X,Y) \in \mathcal{X}_{x,\xi} \times \mathcal{X}_{x,\eta}$ de vecteurs tangents gradués homogènes en un point x de M, on définit un nombre réel :

$$r(X,Y) = \mathrm{Str}(Z \to R(Z \wedge X)Y)$$

ce qui donne, lorsque X et Y varient, un tenseur gradué symétrique dont la restriction aux vecteurs tangents pairs est le tenseur de Ricci ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] J. BRACONNIER : *Eléments d'algèbre différentiable graduée*, Pub. Dep. Math. Lyon (1982).

[2] B. KOSTANT : *Graded Manifolds. Graded Lie theory and requantization*, Lect. Notes Math. Springer-Verlag 570 (1977).

[3] D.A. LEITES : *Introduction to the theory of Supermanifolds*, Russian Math. Surveys 35 (1980).

*