JACQUES HELMSTETTER

Déformations d'algèbres symétriques conservant le coproduit ou le produit intérieur

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 175-185
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_175_0>

Université de Grenoble I

Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS

DÉFORMATIONS D'ALGÈBRES SYMÉTRIQUES CONSERVANT LE COPRODUIT OU LE PRODUIT INTÉRIEUR

Jacques HELMSTETTER

Dans toute la suite, E (et de même E_1 ou E_2) est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique 0; mais avec des définitions appropriées, on pourrait le remplacer par un module E sur un anneau (commutatif unifère) quelconque, pourvu que l'on puisse toujours diviser par tout entier non nul.

1. Rappels sur les cogèbres

Un espace vectoriel A sur K est une cogèbre si on l'a muni d'un coproduit, c'est-à-dire d'une application linéaire C de A dans $A \otimes A$, co-associative, c'est-à-dire telle que

$$(I_A \otimes C) \circ C = (C \otimes I_A) \circ C \ .$$

Si E est une algèbre de Lie, son algèbre enveloppante UE est une cogèbre, le coproduit étant alors l'unique homomorphisme d'algèbres C de UE dans $UE \otimes UE$ tel que

$$C(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad \text{pour tout} \quad a \in E \ .$$

En particulier l'algèbre symétrique SE (algèbre enveloppante de E si E est abélienne) est une cogèbre.

Si A est une cogèbre et B une algèbre, alors l'espace $\mathrm{Hom}(A,B)$ des applications linéaires de A dans B est une algèbre (associative); le produit de deux éléments f et g de $\mathrm{Hom}(A,B)$ est l'élément $f \times g$ défini ainsi :

$$A \xrightarrow{C} A \otimes A \xrightarrow{f\otimes g} B \otimes B \xrightarrow{P} B \ ,$$

P étant l'application linéaire déterminée par la structure d'algèbres de B .

En particulier $\mathrm{Hom}(SE_1, SE_2)$ est une algèbre associative; elle est même commutative et unifère (parce que la cogèbre SE_1 est co-commutative et possède une co-unité, celle-ci étant la projection $SE_1 \to K$); l'élément unité est l'application

$$SE_1 \xrightarrow{\text{proj.}} K \xrightarrow{\text{inj.}} SE_2 \ .$$

Pour $z \in SE_2$, notons $\mathrm{Hom}(SE_1, SE_2; z)$ l'ensemble des $f \in \mathrm{Hom}(SE_1, SE_2)$ tels que $f(1) = z$. Si $f \in \mathrm{Hom}(SE_1, SE_2; 0)$, la puissance k-ième de f s'annule sur les éléments de degré $< k$; la série exponentielle de f est donc formellement convergente et fournit un élément

$$\mathrm{Exp}\ f \in \mathrm{Hom}(SE_1, SE_2; 1) \ .$$

On obtient ainsi un isomorphisme du groupe additif $\mathrm{Hom}(SE_1, SE_2; 0)$ sur le groupe multiplicatif $\mathrm{Hom}(SE_1, SE_2; 1)$. J'utiliserai toujours la notation $\times$ (resp. Exp) pour rappeler qu'un produit (resp. une exponentielle) a été défini au moyen d'un coproduit.

2. Rappels sur les comodules et les produits intérieurs

Soit A une cogèbre avec un coproduit C ; on dit que M est un comodule à gauche sur A si on a défini une application linéaire C' de M dans $A \otimes M$ telle que

$$(C \otimes I_M) \circ C' = (I_A \otimes C') \circ C' \ .$$

Si M est un comodule à gauche sur A , alors M est un module à droite sur l'algèbre $A^* = \mathrm{Hom}(A, K)$; cette structure de module à droite provient de l'application de $M \otimes A^*$ dans M définie ainsi :

$$M \otimes A^* \xrightarrow{\quad C' \otimes I \quad} A \otimes M \otimes A^* \xrightarrow{\quad \text{contraction} \quad} M \otimes K \xrightarrow{\quad \text{isom.} \quad} M$$
$$(A \otimes A^* \xrightarrow{\qquad\quad} K)$$

Voici un exemple de structure de comodule sur la cogèbre SE ; comme celle-ci est cocommutative, il sera inutile de préciser "à gauche" ou "à droite". A toute forme bilinéaire alternée F sur E est associée une algèbre de Weyl $W(E,F)$; c'est l'algèbre unifère librement engendrée par E , avec la seule contrainte que

$$ab - ba = F(a,b) \ , \quad \text{quels que soient} \quad a \text{ et } b \in E \ .$$

Il existe un unique homomorphisme d'algèbres C' de $W(E,F)$ dans $SE \otimes W(E,F)$ tel que

$$C'(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad \text{pour tout} \quad a \in E \ ;$$

il fait de $W(E,F)$ un comodule sur SE ; donc il en fait aussi un module sur $S^*E = (SE)^*$; l'application bilinéaire qui en résulte,

$$\begin{aligned} W(E,F) \times S^*E &\longrightarrow W(E,F) \\ (x,f) &\longmapsto i(f).x \ , \end{aligned}$$

mérite d'être appelée produit intérieur, parce qu'elle a les propriétés habituelles d'un produit intérieur; en particulier si $f \in E^*$, alors

$$\begin{aligned} i(f).a &= f(a) && \text{si} \quad a \in E \ , \\ i(f).(xy) &= (i(f).x)y + x(i(f).y) && \text{si} \quad x \text{ et } y \in W(E,F) \ . \end{aligned}$$

D'ailleurs si $F = 0$, $W(E,F)$ est l'algèbre SE , et l'on obtient le produit intérieur habituel

$$SE \times S^*E \longrightarrow SE \ .$$

[On peut interpréter SE comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur E^* , et S^*E comme l'algèbre des opérateurs différentiels (d'ordre fini ou infini) à coefficients constants sur E^*].

3. Déformations de l'algèbre SE

J'utilise ici le mot "déformation" dans le sens suivant : une déformation de SE est une application linéaire Π de $SE \otimes SE$ dans SE , définissant un "produit déformé" $x * y = \Pi(x \otimes y)$, de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

d'une part, le produit déformé est associatif, et admet 1 comme élément unité, autrement dit

$$x * (y * z) = (x * y) * z \ ,$$

$$x * 1 = 1 * x = x \ ;$$

d'autre part, si $x \in S^pE$ et $y \in S^qE$, alors $x * y$ est la somme de xy et de termes de degrés $< p + q$.

A une telle déformation on peut associer canoniquement une déformation au sens habituel, c'est-à-dire avec un paramètre de déformation t ; lorsque x et y sont de degré p et q comme ci-dessus, leur produit déformé avec paramètre t est

$$x *_t y = \sum_{0 \leq j \leq p+q} t^j \ (\text{proj. de } x * y \text{ dans } S^{p+q-j}E) \ .$$

On obtient ainsi une déformation de l'algèbre $SE \otimes K[t]$.

Tout naturellement on dira que deux déformations Π_1 et Π_2 de SE sont isomorphes, si il existe une bijection $\Phi \in \mathrm{Hom}(SE, SE)$ telle que $\Pi_2 \circ (\Phi \otimes \Phi) = \Phi \circ \Pi_1$, et telle que $\Phi(x)$ soit toujours égal à x modulo des termes de degré inférieur.

Considérons l'application Exp qui réalise une bijection de $\mathrm{Hom}(S(E \oplus E), SE; 0)$ sur $\mathrm{Hom}(S(E \oplus E), SE; 1)$; nous pouvons identifier $SE \otimes SE$ avec $S(E \oplus E)$, et traiter la déformation Π comme un élément de $\mathrm{Hom}(S(E \oplus E), SE; 1)$; il existe donc dans $\mathrm{Hom}(SE \otimes SE, SE; 0)$ un unique π tel que

$$\Pi = \mathrm{Exp} \ \pi \ .$$

L'objectif de cet exposé est de montrer que certaines propriétés de la déformation Π se lisent très facilement sur son logarithme π .

Mais d'abord il faut noter que la condition $x*1 = 1*x = x$ permet de décomposer π ainsi :

$$\pi = \pi_0 + \pi' ,$$

π_0 étant la partie triviale de la déformation, c'est-à-dire,

$$\begin{array}{lll} \pi_0(a \otimes 1) & = \pi_0(1 \otimes a) = a & \text{si} \quad a \in E , \\ \pi_0(x \otimes y) & = 0 & \text{si} \quad x \in S^pE , \quad y \in S^qE \quad \text{et } p+q \neq 1 ; \end{array}$$

j'ajoute que $P = \mathrm{Exp}\ \pi_0$ représente le produit initial de SE ; la partie non triviale π' est telle que

$$\pi'(x \otimes 1) = \pi'(1 \otimes x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in SE .$$

La dernière condition imposée plus haut à Π est équivalente à celle-ci : si x et y sont de degrés p et q , $\pi'(x \otimes y)$ est une somme de termes de degrés $< p+q$.

4. Déformations conservant le produit intérieur

Nous nous intéressons ici aux déformations telles que l'algèbre déformée soit équivalente à l'algèbre SE pour le calcul des produits intérieurs par les éléments de S^*E ; comme ces produits intérieurs sont définis ici grâce à la structure de comodule sur la cogèbre SE , nous nous intéressons donc aux déformations Π telles que le coproduit $C(SE \to SE \otimes SE)$ soit aussi un homomorphisme de l'algèbre déformée $(SE,*)$ dans l'algèbre $SE \otimes (SE,*)$ déformée seulement à droite.

THÉORÈME 1. — *Si Π est une déformation de SE , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) le coproduit de SE est un homomorphisme d'algèbres de $(SE,*)$ dans $SE \otimes (SE,*)$;

(2) quels que soient x et $y \in SE$, $\pi'(x \otimes y) \in K$, π' étant la partie non triviale de $\log \Pi$.

Si ces assertions sont vraies, on obtient une forme bilinéaire alternée F sur E en posant

$$F(a,b) = a*b - b*a = \pi'(a \otimes b) - \pi'(b \otimes a) \in K ;$$

et l'algèbre déformée $(SE,*)$ est isomorphe à l'algèbre de Weyl $W(E,F)$. Deux déformations satisfaisant ces assertions sont isomorphes si et seulement si elles déterminent la même forme bilinéaire F . **Réciproquement**, *soit F une forme bilinéaire alternée sur E , et soit J la bijection de SE sur $W(E,F)$ telle que pour tout $a \in E$, et tout entier $p \geq 0$, $J(a^p) = a^p$, autrement dit, telle que*

$$J(a_1 a_2 \dots a_p) = \frac{1}{p!} \sum_\sigma a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(p)} ,$$

lorsque $a_1, \ldots, a_p \in E$; la sommation se fait sur le groupe des permutations des entiers $1, \ldots, p$; on obtient une déformation de SE satisfaisant les assertions précédentes, et telle que $F(a,b) = a*b - b*a$ (si a et $b \in E$), en posant

$$x * y = J^{-1}(J(x).J(y)) \qquad (si \quad x \text{ et } y \in SE) \ ;$$

la partie non triviale π' de $\log \Pi$ est alors celle-ci :

$$\pi'(a \otimes b) = F(a,b)/2 \qquad si \quad a \text{ et } b \in E \ ,$$

$$\pi'(x \otimes y) = 0 \quad si \quad x \in S^pE \ , \quad y \in S^qE \text{ et } (p,q) \neq (1,1) \ ;$$

cette déformation de SE est connue sous le nom de déformation de Moyal.

Esquisse de démonstration. — On peut faire de $SE \otimes SE$ un comodule sur la cogèbre SE grâce à l'application C' qui est l'unique homomorphisme d'algèbres de $SE \otimes SE$ dans $SE \otimes (SE \otimes SE)$ tel que

$$C'(a \otimes 1 + 1 \otimes b) = (a+b) \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (a \otimes 1 + 1 \otimes b) \ .$$

L'assertion (1) est équivalente à celle-ci : Π est un homomorphisme de $SE \otimes SE$ dans SE pour les structures de comodules sur SE . Si M est un module sur l'algèbre SE , il est trivial qu'un homomorphisme de SE dans M , pour les structures de modules sur SE , est déterminé par sa restriction à K , et que celle-ci est arbitraire; de façon duale, un homomorphisme de comodules sur SE , à valeurs dans SE , est déterminé par sa projection dans K , et celle-ci est arbitraire. Pour être plus précis, appelons ψ la projection de Π dans K :

$$\psi : SE \otimes SE \xrightarrow{\ \Pi\ } SE \xrightarrow{\text{co-unité}} K \ ;$$

Π est un homomorphisme de comodules si et seulement si

$$\Pi(x \otimes y) \otimes 1 = (I_{SE} \otimes \psi) \circ C'(x \otimes y) \ .$$

Dans le cas présent, cette égalité est équivalente à

$$\Pi = P \times \psi \qquad (\text{avec } P = \text{Exp } \pi_0) \ ;$$

puisque $\psi(1 \otimes 1) = \Pi(1 \otimes 1) = 1$, on peut remplacer ψ par Exp π' . Ainsi les assertions (1) et (2) sont équivalentes. La suite du théorème résulte de propriétés classiques des algèbres de Weyl et de la déformation de Moyal, et de quelques calculs avec des Exp ; l'un de ces calculs consiste à vérifier que

$$a * b = ab + \pi'(a \otimes b) \qquad (\text{si } a \text{ et } b \in E) \ .$$

[On peut montrer que l'assertion (1) est équivalente au fait que les produits intérieurs par les éléments de E^* sont aussi des dérivations du produit déformé; et que l'assertion (2) est équivalente au fait que l'on obtient $x * y$ (considéré comme fonction polynomiale sur E^*) comme restriction à la diagonale de $E^* \oplus E^*$ du transformé de $x \otimes y$ par un opérateur différentiel (d'ordre infini) sur $E^* \oplus E^*$ à coefficients constants].

5. Déformations conservant le coproduit

Il s'agit maintenant de déformations de SE telles que le coproduit C de SE soit aussi un homomorphisme de l'algèbre déformée $(SE, *)$ dans l'algèbre déformée $(SE, *) \otimes (SE, *)$.

THÉORÈME 2. — *Si Π est une déformation de SE , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(3) C est un homomorphisme de $(SE, *)$ dans $(SE, *) \otimes (SE, *)$;

(4) quels que soient x et $y \in SE$, $\pi'(x \otimes y) \in E$.

Si ces assertions sont vraies, on obtient un crochet d'algèbre de Lie sur E en posant

$$[a, b] = a*b - b*a = \pi'(a \otimes b) - \pi'(b \otimes a) \in E \ ;$$

et l'algèbre déformée $(SE, *)$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante UE de l'algèbre de Lie E . Deux déformations satisfaisant ces assertions sont isomorphes si et seulement si elles déterminent le même crochet d'algèbres de Lie. **Réciproquement**, *supposons que E soit une algèbre de Lie, et soit J la bijection de SE sur UE telle que $J(a^p) = a^p$ pour tout $a \in E$ et tout entier p ; on obtient une déformation de SE satisfaisant les assertions précédentes et telle que $[a, b] = a*b - b*a$, en posant*

$$x * y = J^{-1}(J(x).J(y)) \ .$$

[J'expliquerai plus loin que la connaissance de l'application $\pi = \log \Pi$ associée à cette dernière déformation équivaut à la connaissance de la série de Campbell-Hausdorf de l'algèbre de Lie E].

Esquisse de démonstration. — L'assertion (3) est équivalente à celle-ci : Π est un homomorphisme de cogèbres de $SE \otimes SE$ dans SE (on exprime ceci en disant que C et Π font de SE une bigèbre). Les homomorphismes d'algèbres de SE_1 dans SE_2 sont en correspondance biunivoque avec les applications linéaires de E_1 dans SE_2 ; soit φ une application linéaire de E_1 dans SE_2 (ou plutôt, une application linéaire de SE_1 dans SE_2 , nulle sur S^pE_1 si $p \neq 1$); on peut vérifier que l'homomorphisme Φ de SE_1 dans SE_2 , dont la restriction à E_1 est φ , est $\Phi = \text{Exp } \varphi$. De façon duale, on peut énoncer le théorème suivant (dont la démonstration est néanmoins plus difficile) : les homomorphismes de cogèbres de SE_1 dans SE_2 sont en correspondance biunivoque avec les applications linéaires de SE_1 dans E_2 , nulles sur K ; si φ $(SE_1 \to E_2)$ est une telle application, l'homomorphisme de cogèbres Φ de SE_1 dans SE_2 , dont la projection dans E_2 est φ , est $\Phi = \text{Exp } \varphi$. Par conséquent, Π est un homomorphisme de cogèbres de $SE \otimes SE$ dans SE si et seulement si il existe π , application linéaire de $SE \otimes SE$ dans E , nulle sur K , telle que $\Pi = \text{Exp } \pi$. Ceci montre l'équivalence des assertions (3) et (4). La suite du théorème résulte de propriétés classiques des algèbres envoloppantes (par exemple, on sait que J est un isomorphisme de cogèbres).

6. Séries formelles et groupes formels

Les séries formelles sur E_1 à valeurs dans E_2 sont en correspondance biunivoque avec les applications linéaires de SE_1 dans E_2 ; si $f \in \mathrm{Hom}(SE_1, E_2)$, on lui associe la série formelle $\tilde{f}$ définie ainsi (avec $\xi \in E_1$, $\xi^p \in S^pE_1$) :

$$\tilde{f}(\xi) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} f(\xi^p) = f(\exp\ \xi) \; ; \tag{5}$$

réciproquement, on peut expliquer que f donne les dérivées partielles au point 0 de la série formelle $\tilde{f}$, de telle façon que l'égalité (5) est simplement la formule de Taylor au point 0 . Si E_2 est une algèbre, les séries formelles à valeurs dans E_2 forment une algèbre; or, $\mathrm{Hom}(SE_1, E_2)$ est aussi une algèbre (voir § 1), et il est facile de vérifier que, si f et $g \in \mathrm{Hom}(SE_1, E_2)$, alors

$$\tilde{f}\tilde{g} = (f \times g)\tilde{}\; ; \tag{6}$$

l'égalité (6) permet de calculer les dérivées partielles du produit $\tilde{f}\tilde{g}$ au point 0; c'est donc un avatar de la formule de Leibniz. Enfin, soient $f \in \mathrm{Hom}(SE_2, E_3)$ et $g \in \mathrm{Hom}(SE_1, E_2)$; si $g(1) = 0$, alors $\tilde{g}(0) = 0$, et l'on peut définir la série formelle composée $\tilde{f} \circ \tilde{g}$; on peut alors démontrer que

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} = (f \circ \mathrm{Exp}\ g)\tilde{}\; ; \tag{7}$$

pour donner un sens à Exp g , il faut considérer que $g \in \mathrm{Hom}(SE_1, SE_2; 0)$.

Soit maintenant $\pi \in \mathrm{Hom}(SE \otimes SE; E)$, tel que $\pi(1 \otimes 1) = 0$; il lui est associée une série formelle $\tilde{\pi}$ sur $E \oplus E$ à valeurs dans E ; par définition, $\tilde{\pi}$ détermine un groupe formel sur E si

$$\tilde{\pi}(\xi, 0) = \tilde{\pi}(0, \xi) = \xi \; ;$$

$$\tilde{\pi}(\xi, \tilde{\pi}(\eta, \varsigma)) = \tilde{\pi}(\tilde{\pi}(\xi, \eta), \varsigma) \; .$$

Considérons $\Pi = \mathrm{Exp}\ \pi \in \mathrm{Hom}(SE \otimes SE, SE)$; grâce à (7) (et à l'égalité $I_{SE} = \mathrm{Exp}\ I_E$) , on trouve immédiatement que les conditions précédentes sont équivalentes à

$$\Pi(x \otimes 1) = \Pi(1 \otimes x) = x \; ;$$

$$\Pi(x \otimes \Pi(y \otimes z)) = \Pi(\Pi(x \otimes y) \otimes z) \; .$$

Autrement dit, Π est une déformation de SE , et d'après le théorème 2, elle conserve le coproduit; réciproquement toute déformation conservant le coproduit détermine un groupe formel.

A la fin du théorème 2, on signale que si E est une algèbre de Lie, on peut construire canoniquement une déformation de SE ; je vais montrer que la série formelle $\tilde{\pi}$ qui lui est associée, est précisément la série de Campbell-Hausdorf de l'algèbre de Lie E , c'est-à-dire

$$\tilde{\pi}(t\xi, t\eta) = \log((\exp t\xi).(\exp t\eta)) \; ;$$

dans cette égalité, ξ et η appartiennent à E , et t est une indéterminée qu'on introduit pour pouvoir traiter le second membre comme une série formelle en t à valeurs dans UE . L'égalité $a^p = J(a^p)$ montre que pour la déformation canonique de SE , tout élément de E a même exponentielle pour le produit initial de SE et le produit déformé; cette exponentielle habite dans l'algèbre complétée de SE , c'est-à-dire le produit direct des S^pE ; il s'agit donc de démontrer

$$\exp(\tilde{\pi}(\xi,\eta)) = (\exp\xi) * (\exp\eta) \ . \tag{8}$$

Or, la formule de Leibniz (6) implique que

$$\exp\tilde{\pi} = (\mathrm{Exp}\ \ \pi)^{\tilde{}} \ ;$$

en utilisant la formule de Taylor (5), on en déduit

$$\exp(\tilde{\pi}(\xi,\eta)) = (\mathrm{Exp}\ \ \pi)(\exp\xi \otimes \exp\eta) \ ;$$

puisque $\mathrm{Exp}\ \ \pi = \Pi$, on vient de démontrer (8).

Appendice n° 1

Je n'ai pas eu le temps, lors de mon exposé, d'expliquer quelles étaient les movivations de ce travail; certaines motivations se trouvent dans mes travaux antérieurs :

• *Radical et groupe formel d'une algèbre symétrique à gauche*, thèse de 3e cycle, Grenoble 1975.

• *Algèbres de Clifford, algèbres de Weyl et $*$-produits*, cahiers mathématiques n° 25 (1982) et n° 34 (1985) de Montpellier.

Une motivation plus récente est le calcul des coefficients de la série de Campbell-Hausdorf. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ des indéterminées **non commutatives**; posons

$$G(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \log((\exp X_1)(\exp X_2) \ldots\ldots (\exp X_m)) \ ;$$

on peut donner un sens au second membre en complétant l'algèbre unifère associative librement engendrée par $X_1, \ldots, X_m$, avec la topologie associée à sa graduation évidente; cette série formelle G est une combinaison linéaire infinie de monômes tels que

$$X_{i_1}^{q_1} X_{i_2}^{q_2} \ldots\ldots X_{i_n}^{q_n} \ ; \tag{9}$$

décrivons minutieusement un tel monôme; d'abord $n \geq 1$; ensuite les indices $i_1, \ldots, i_n$ (compris entre 1 et m) peuvent présenter des répétitions, puisqu'il s'agit d'indéterminées non commutatives, mais deux indices successifs ne doivent jamais être égaux; on note α (resp. β) le nombre de sauts ascendants (resp. descendants), c'est-à-dire le nombre de couples (i_k, i_{k+1}) tels que $i_k < i_{k+1}$ (resp. $i_k > i_{k+1}$) ; donc $\alpha + \beta = n - 1$; enfin tous les exposants $q_1, \ldots, q_n$ sont ≥ 1 . On trouve assez vite que le coefficient du monôme (9) dépend seulement de α et β et de la suite non ordonnée $(q_1, \ldots, q_n)$; c'est-à-dire, une permutation sur cette suite ne le change pas; ce coefficient sera noté $\lambda_{q_1 q_2 \ldots q_n}^{(\alpha\beta)}$. Pour calculer tous ces coefficients, j'introduis la fonction que voici :

$$F(u, x) = \frac{1}{\frac{1}{1-e^{-x}} - u} = \frac{e^x - 1}{e^x(1-u) + u} = -F(1-u, -x) \ ,$$

où $u \in [0,1]$, $x \in \mathrm{C}$ et im $x \in]-\pi, +\pi[$. Je sais démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta F(u, x_1) F(u, x_2) \ldots\ldots F(u, x_m) du$$
$$= \Sigma \lambda_{q_1 q_2 \ldots q_n}^{(\alpha\beta)} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots\ldots x_n^{q_n} \ ,$$

avec sommation sur toutes les suites de n exposants ≥ 1 .

Si $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 1$, on trouve le coefficients

$$\int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta du = \frac{\alpha!\beta!(-1)^\beta}{(\alpha+\beta+1)!} .$$

Je sais développer la fonction F en série entière :

$$F(u,x) = \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q!} F_q(u) x^q ;$$

chaque F_q est un polynôme de degré $q-1$, que l'on peut écrire au moyen des nombres de Stirling :

$$F_q(u) = \sum_{1\leq j\leq q} (-1)^{q-j} j! S_q^j u^{j-1} = \sum_{1\leq j\leq q} j! S_q^j (u-1)^{j-1} ;$$

je rappelle que S_q^j est le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal q en j sous-ensembles.

Appendice n° 2

Le colloque J. Braconnier m'a permis de connaître le travail de R. Berger et de découvrir qu'il avait obtenu des résultats équivalents à certains de ceux que je viens d'exposer. Il sait qu'il y a correspondance biunivoque entre les déformations Π conservant le coproduit et les séries formelles $\tilde{\pi}$ qui font de E un groupe formel; selon mon point de vue, cette correspondance est décrite par la formule

$$\Pi = \text{Exp } \pi . \tag{10}$$

R. Berger explique comment on peut calculer le produit $u * v$ de deux éléments de SE , grâce à la série formelle $\tilde{\pi}$, en considérant u, v et $u * v$ comme des fonctions polynomiales sur E^* ; maintenant les lettres x, y, z représentent des éléments de E^* ; $u * v$ s'obtient en prenant la restriction à la diagonale de $E^* \oplus E^* \oplus E^*$ de la fonction

$$\exp\left(z\tilde{\pi}'(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})\right) .u(x)v(y) ; \tag{11}$$

donc à la partie non triviale $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{\pi}$ on associe un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux sur $E^* \oplus E^* \oplus E^*$, puis son exponentielle (formellement convergente); la multiplication par $z \in E^*$ désigne en fait une contraction $(E^* \times E \to K)$, puisque $\tilde{\pi}'$ est à valeurs dans E . Pour plus de détails, je renvoie à l'article de R. Berger dans ce même volume; je désire seulement expliquer ici que ce résultat est équivalent à (10).

Un opérateur différentiel sur E_1^* à coefficients polynomiaux, éventuellement d'ordre infini, peut être défini par une application $D \in \text{Hom}(SE_1, SE_1)$; il est d'ordre $\leq k$ si il s'annule sur S^pE_1 chaque fois que $p > k$; il transforme un polynôme $w \in SE_1$ en

$$(12) \qquad D.w = P_1 \circ (I_{SE_1} \otimes D) \circ C_1(w) \ ;$$

P_1 et C_1 représentent le produit et le coproduit de SE_1 ; si on traite $w_1 \otimes w_2$ comme une fonction polynomiale sur $E_1^* \oplus E_1^*$, alors $P_1(w_1 \otimes w_2)$ est sa restriction à la diagonale.

Explicitons maintenant la formule (10) en se souvenant que $\pi = \pi_0 + \pi'$ et $P = \text{Exp } \pi_0$:

$$\Pi = P \circ (P \otimes \text{Exp } \pi') \circ \tau \circ (C \otimes C) \ ,$$

en posant $\tau(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes u_4) = u_1 \otimes u_3 \otimes u_2 \otimes u_4$, car $\tau \circ (C \otimes C)$ est le coproduit de $SE \otimes SE$, tandis que $(P \otimes P) \circ \tau$ représente son produit. Je suppose que la notation $\pi' \otimes 1$ est assez claire si je précise qu'elle désigne un élément de $\text{Hom}(SE \otimes SE, SE \otimes SE)$ à valeurs dans $E \otimes K$; l'égalité précédente est équivalente à

$$\Pi = P \circ (P \otimes P) \circ \tau \circ (I_{SE \otimes SE} \otimes \text{Exp } (\pi' \otimes 1)) \circ \tau \circ (C \otimes C) \ ;$$

à cause de (12), elle signifie que $u * v$ s'obtient en appliquant à $u \otimes v$ (fonction polynomiale sur $E^* \oplus E^*$) l'opérateur différentiel défini par Exp $(\pi' \otimes 1)$, puis en prenant la restriction à la diagonale. L'opérateur différentiel défini par $\pi' \otimes 1$ est $x\tilde{\pi}'\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$; cependant il faut prendre son Exponentielle pour le produit commutatif de $\text{Hom}(SE \otimes SE, SE \otimes SE)$, qui n'est pas le produit des opérateurs différentiels; pour contourner cette difficulté, il suffit d'introduire une troisième variable z sur laquelle $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ n'agissent pas, et l'on obtient ainsi (11).

– o –

(3 décembre 1986)