PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. BERGER

Déformations et lois de groupes formels

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 163-173
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_163_0>

DEFORMATIONS ET LOIS DE GROUPES FORMELS

par R. BERGER

Cet exposé traite des déformations d'algèbres associatives d'un type particulier : les algèbres de polynômes. Il vise à construire explicitement des déformations, sans considération cohomologique.

1. INTRODUCTION

Pour introduire les deux mots-clés du titre, revenons à l'origine physique de la théorie des déformations :

Fonctions définies sur l'espace des phases	$\xrightarrow[\text{de Weyl}]{\text{Correspondance}}$	Opérateurs d'un espace de Hilbert
q	$\longrightarrow$	$\hat{q}$
p	$\longrightarrow$	$\hat{p}$

Lorsqu'on restreint la correspondance de Weyl aux polynômes en p et q, c'est la symétrisation.

Par exemple :

$$q \times p \longrightarrow \frac{1}{2}(\hat{q}\,\hat{p} + \hat{p}\,\hat{q}).$$

La relation de commutation de Heisenberg

$$[\hat{q},\hat{p}] = \lambda \quad (= i\,\hbar)$$

permet d'exprimer les opérateurs à l'aide de symétrisés. Ainsi :

$$\hat{q}\,\hat{p} = \frac{1}{2}(\hat{q}\,\hat{p} + \hat{p}\,\hat{q}) + \frac{1}{2}\lambda \quad . \tag{1}$$

Quand on transporte la composition des opérateurs par la correspondance de Weyl, on obtient un produit * associatif, non commutatif, sur les polynômes en p et q, appelé produit de Moyal. La relation (1) donne par exemple :

$$q * p = qp + \frac{1}{2}\lambda.$$

Plus généralement, le produit * de deux polynômes quelconques a et b est

$$a * b = a \times b + \lambda C_1(a,b) + \lambda^2 C_2(a,b) + \dots,$$

si bien que le produit de Moyal est une déformation (au sens de Gerstenhaber) du produit ordinaire. On notera que $C_1 = \frac{1}{2}\{\ ,\ \}$ où $\{,\}$ est le crochet de Poisson classique.

Ce que nous venons de faire trouve sa place dans un cadre conceptuel beaucoup plus large. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Heisenberg, de base q,p,λ . Le crochet de $\mathfrak{g}$ (qui vérifie $[q,p]_{\mathfrak{g}} = \lambda$) se prolonge par dérivation en un crochet de Poisson, noté encore $[,]_{\mathfrak{g}}$, de l'algèbre symétrique $S_{\mathfrak{g}}$. Par exemple, si a et b sont des polynômes en p et q uniquement, on a :

$$[a,b]_{\mathfrak{g}} = \lambda\{a,b\} .$$

La symétrisation σ de $S_{\mathfrak{g}}$ dans l'algèbre enveloppante $U_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ donne, par transport, une déformation $\underset{W}{*}$ de $S_{\mathfrak{g}}$ qui prolonge Moyal et qui sera appelée déformation de Weyl. Pour a et b dans $S_{\mathfrak{g}}$, on peut écrire :

$$a \underset{W}{*} b = ab + F_1(a,b) + F_2(a,b) + \dots ,$$

où F_k est défini par la condition :

$$\left.\begin{array}{l}a \text{ homogène de degré } p\\ b \text{ homogène de degré } q\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad F_k(a,b) \text{ homogène de degré } p+q-k.$$

On dit alors que $\underset{W}{*}$ est une <u>déformation graduée</u>.

Mais il est clair que la notion de déformation de Weyl s'étend à toute algèbre de Lie complexe (entre autres). C'est pour ces déformations de Weyl que Abellanas et Martinez Alonso (Quantization from the algebraic viewpoint, J. of Math. Phys., 17, n° 8, August 1976) ont démontré la formule :

$$(2) \qquad a \underset{W}{*} b(z) = \exp\left(zg\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right).a(x)b(y)\Big|_{x=y=z}$$

dans laquelle g est la partie non linéaire de <u>la formule de Campbell-Hausdorff</u>. Cette dernière est définie comme suit. Une base de $\mathfrak{g}$ étant donnée, l'application exponentielle exp applique $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim\mathfrak{g}$) dans G (groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$). Pour (x_i) et (y_i) dans $\mathbb{C}^n$ suffisamment petits, on pose :

$$f(x,y) = (f_i(x,y)) = \exp^{-1}(\exp(x_i)\exp(y_i)).$$

Les $f_i(x,y)$ sont des séries en x et y de la forme

$$f_i(x,y) = x_i + y_i + \text{termes de degré} \geqslant 2.$$

Plus précisément, on a les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} f(x,0) = x \qquad f(0,y) = y \\ f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z)) \;. \end{cases}$$

Autrement dit f est une <u>loi de groupe formel</u> (dite, dans ce cas, de Campbell-Hausdorff). La partie non linéaire est

$$g(x,y) = f(x,y) - x - y.$$

2. LE THEOREME

Mon objectif est d'étendre la formule (2) aux lois de groupes formels quelconques. Ceci permettra d'avoir des déformations différentes de Weyl ; il suffira, par exemple, de remplacer la carte canonique en l'élément neutre de G par une autre pour obtenir une loi de groupe formel distincte de C.H.

Nous allons voir que les déformations graduées associées aux lois quelconques sont exactement celles qui respectent le coproduit naturel de $S_{\mathfrak{g}}$, c'est-à-dire l'application diagonale $\Delta : S_{\mathfrak{g}} \to S_{\mathfrak{g}} \otimes S_{\mathfrak{g}}$ (voir l'exposé de J. Helmstetter). Les déformations respectant Δ ont été introduites dans ma thèse de 3è cycle (Lyon 1979) sous le nom de codéformations. Je leur préfère aujourd'hui le nom de Δ-déformations.

Les hypothèses du théorème seront les suivantes : K est un anneau commutatif dans lequel les entiers sont inversibles, V est un K-module libre de base $(z_i)_{i \in I}$, A est l'algèbre symétrique de V identifiée à $K[z_i]$. Ceux que la généralité de l'algèbre rebutent penseront à $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ici, l'intérêt de cette généralité est de deux ordres. D'une part, la démonstration est indépendante de toute topologie sur K. D'autre part, elle est valable en dimension quelconque, même infinie (aucune restriction sur I).

Passons à la définition de $\Delta : A \to A \otimes A$. En identifiant A avec $K[z_i]$ et $A \otimes A$ avec $K[x_i, y_i]$, on a

$$\Delta(P(z_i)) = P(x_i + y_i).$$

Définissons maintenant les Δ-déformations. Une déformation F de A étant donnée, on définit à partir de l'algèbre associative $(A, \underset{F}{*})$ l'algèbre associative "produit tensoriel" $(A \otimes A, \underset{F^2}{*})$. De même, à partir de la cogèbre (A,Δ), on définit naturellement la cogèbre $(A \otimes A, \Delta^2)$. Les propriétés suivantes :

(i) $\underset{F}{*} : (A \otimes A, \Delta^2) \to (A,\Delta)$ morphisme de cogèbres

(ii) $\Delta : (A, \underset{F}{*}) \to (A \otimes A, \underset{F2}{*})$ morphisme d'algèbres

sont équivalentes. Si elles sont satisfaites, F est appelée une Δ-déformation

THEOREME. - *Pour toute Δ-déformation graduée* F *de* A, *il existe une seule loi de groupe formel* $f(x,y) = (f_i(x,y))_{i \in I}$ *en les indéterminées* $x = (x_i)_{i \in I}$ *et* $y = (y_i)_{i \in I}$ *et à coefficients dans* K *telle que :*

$$(4) \qquad a \underset{F}{*} b(z) = \exp(z\, g(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y})).\ a(x)b(y)|_{x=y=z}.$$

où g *est la partie non linéaire de* f.

Réciproquement, pour toute loi de groupe formel définie sur K^I *il existe une seule Δ-déformation graduée de* A *vérifiant (4).*

La démonstration de Abellanas et Martinez Alonso utilisait la transformée de Fourier. La mienne, dans le cadre général où je me place est basée sur la dualité de Cartier (pour la définition de cette dualité, consulter J. Dieudonné, Introduction to the theory of formal groups, Dekker). Je vais juste donner l'idée essentielle de la preuve.

Au K-module libre A de base (x^α), $\alpha \in K^{(I)}$, on associe le K-module dual A' de pseudo-base $(x^{\alpha *})$. Tout élément de A' se développe en série en les $x^{\alpha *}$, si bien que A' est muni d'une topologie naturelle de K-module topologique complet. Par transposition, au produit $\times$ de A correspond un coproduit continu ${}^t\times$ de A', et au coproduit Δ de A correspond un produit continu ${}^t\Delta$ de A'. Quand on déforme $\times$ en $\underset{F}{*}$, on obtient une (co)-déformation de ${}^t\times$ en ${}^t\underset{F}{*}$.

Remplaçons la pseudo-base (x^{α^*}) par $(z^\alpha) = (\alpha! x^{\alpha^*})$. Alors, ${}^t\Delta$ (resp. ${}^t\times$) s'identifie au produit usuel (resp. au coproduit usuel) de l'algèbre des séries formelles $K[[z_i]]$. Le morphisme de cogèbres continu ${}^t\underset{F}{*}$ est donc entièrement déterminé par les ${}^t\underset{F}{*}(z_i)$ qui sont des séries formelles en x et y et qui sont les $f_i(x,y)$ cherchées.

3. CONSEQUENCES DU THEOREME

3.1. On peut exprimer les coefficients F_k en fonction de g. En effet, (4) s'écrit :

$$a \underset{F}{*} b(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} \frac{z^\alpha}{\alpha!} g^\alpha(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y}).a(x)b(y)|_{x=y=z} ,$$

avec $g^{\alpha} = \prod_{i \in I} g_i^{\alpha_i}$. Si $g^{\alpha,r}$ est la partie homogène de degré total r, on a

$$F_k = \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!} g^{\alpha,|\alpha|+k}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Ainsi, F_k est un opérateur bidifférentiel. Par suite, toute Δ-déformation graduée est différentiable.

3.2. La formule (4) permet de prolonger $\underset{F}{*}$ à d'autres objets, fonctions ou distributions.

Prenons $K = \mathbb{C}$ et supposons que les g_i sont des fonctions entières (I étant fini). Pour des distributions T_1 et T_2 à support compact dans $\mathbf{R}^n$ ($n = \dim V$), on sait que leurs transformées de Fourier sont des fonctions sur $\mathbf{R}^n$, prolongeables en fonctions entières sur $\mathbb{C}^n$. D'après les propriétés de la transformée de Fourier, $g^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right).\mathscr{F}T_1(x)\mathscr{F}T_2(y)|_{x=y=z}$ appartient à $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$. En substituant les fonctions entières obtenues dans (4), on voit que $T_1 \underset{F}{*} T_2$ est une fonction entière. On peut d'ailleurs écrire :

$$\mathscr{F}T_1 \underset{F}{*} \mathscr{F}T_2 = \langle T_1 \otimes T_2 , \exp(z \check{f}) \rangle \tag{5}$$

où $\vee$ signifie que l'on a remplacé x par $-2\pi ix$ et y par $-2\pi iy$ dans la série f.

Mais, en général, $\mathscr{F}T_1 \underset{F}{*} \mathscr{F}T_2$ n'est pas dans $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ car il ne vérifie pas toujours la condition du théorème de Paley-Wiener. Par contre, si P est un polynôme et si T est dans $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, alors $P \underset{F}{*} \mathscr{F}T$ et $\mathscr{F}T \underset{F}{*} P$ sont dans $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$. On a même des formules explicites de ces produits en fonction des coefficients de la loi de groupe formel. Par exemple :

$$z_i \underset{F}{*} \mathscr{F}T = z_i \wedge \mathscr{F}T + \sum_{j=1}^{n} z_j \mathscr{F}(\check{C}_{ij}T),$$

où C_{ij} est le coefficient de x_i dans g_j

La formule (5) permet de retrouver les expressions intégrales du produit de Moyal, ainsi que d'autres produits utilisés en quantification. Nous allons juste donner les lois de groupes formels, laissant le soin au lecteur d'écrire les expressions intégrales.

Prenons pour $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Heisenberg de base $x_1,\ldots,x_{2m+1}$ (avec le crochet habituel). La loi de groupe formel associée à Weyl a pour partie non linéaire g^W définie par :

$$\begin{cases} g_j^W = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant 2m \\ g_n^W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (x_j\, y_{j+m} - x_{j+m}\, y_j) \ , \ n = 2m+1. \end{cases}$$

Il y a aussi la Δ-déformation graduée standard (resp. antistandard) définie par l'application de $S_{\mathfrak{g}}$ dans $U_{\mathfrak{g}}$ qui associe à $a_1 \times \ldots \times a_k$ ($a_j \in \mathfrak{g}$ et $k \geqslant 1$) l'élément $a_k \ldots a_1$ (resp. $a_1 \ldots a_k$). La loi de groupe formel associée est :

$$\begin{cases} g_j^S \ (\text{resp. } g_j^{AS}\ ) = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant 2m \\ g_n^S \ (\text{resp. } g_n^{AS}\ ) = \sum_{j=1}^{m} x_j y_{j+m} \ (\text{resp. } - \sum_{j=1}^{m} x_{j+m} y_j) \end{cases}$$

En remplaçant la base $(x_1,\ldots,x_{2m})$ par $(x_j + ix_{j+m}\ ,\ x_j - ix_{j+m})_{1 \leqslant j \leqslant m}$, on obtient à partir de standard et d'antistandard les déformations normale et antinormale dont il est facile d'écrire les lois de groupes formels.

3.3 Le théorème permet de repérer facilement si une Δ-déformation graduée est un $*$-produit. Par définition, une déformation F est un $*$-produit si

$$\forall\ k \geqslant 1\ ,\ F_k(b,a) = (-1)^k\ F_k(a,b).$$

Par exemple, Moyal est un $*$-produit. Sous les hypothèses du théorème, notons $f^{(k)}(x,y)$ la partie homogène de degré total k de $f(x,y)$. On démontre que :

(6) $\qquad$ F est un $*$-produit $\Leftrightarrow \forall\, k \geq 1,\ f^{(k)}(y,x) = (-1)^{k-1} f^{k}(x,y)$.

C'est grâce à cette propriété que l'on prouve que <u>toute déformation de Weyl est un *-produit</u>.

4. DES EXEMPLES NOUVEAUX.

On prend $K = \mathbb{R}$ et $\dim V = 1$. Alors $\mathfrak{g}$ est <u>abélienne</u>. Puisque $A = S(V) = U_{\mathfrak{g}}$ toute Δ-déformation graduée est <u>commutative</u>. Il est clair que les déformations de Weyl, standard et antistandard coïncident avec le produit ordinaire et que la loi de groupe formel associée est la loi <u>additive</u> $x+y$. Dans ce cas, la formule (4) n'est autre que la formule de Taylor du polynôme $a \times b$.

4.1. La carte $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times} \\ x \longrightarrow 1+x\end{array}$ en l'élément neutre du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{\times}$ des réels non nuls fournit la loi de groupe formel <u>multiplicative</u> :

$$f(x,y) = (1+x)(1+y)-1 = x+y+xy .$$

D'après (6), la déformation associée F <u>n'est pas un *-produit</u>. La formule (4) donne ici :

$$a \underset{F}{*} b(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n a}{dx^n} \frac{d^n b}{dx^n} .$$

Il est facile de calculer de proche en proche les x^{*n} :

$$\begin{aligned} x^{*2} &= x^2+x \\ x^{*3} &= x^3+3x^2+x \\ x^{*4} &= x^4+6x^3+7x^2+x. \end{aligned}$$

Le loi de formation des coefficients est simple à obtenir (J. Helmstetter m'a signalé que ceux-ci sont les nombres de Stirling de 2e espèce).

Plus intéressant est le calcul du <u>spectre de x</u>, au sens de Bayen-Flato-Fronsdal-Lichnerowicz-Sternheimer. Pour cela, on pose $\operatorname{Exp}(tx) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} x^{*n}$ $(t \in \mathbb{C})$.

Et on cherche le développement de Dirichlet :

(7) $$\mathrm{Exp}(tx) = \sum_{\lambda \in I} u_\lambda(x)e^{\lambda t}$$

dans lequel le support I sera le spectre cherché et les u_λ sont les projecteurs associés. Une conséquence formelle de (7) est

(8) $$\begin{cases} x \underset{F}{*} u_\lambda = \lambda u_\lambda \\ u_\lambda \underset{F}{*} u_\lambda = u_\lambda \, . \end{cases}$$

On est donc amené à résoudre l'équation

(9) $$x \underset{F}{*} u = \lambda u \quad , \text{ u non nulle.}$$

Ici, il est clair que cette équation est

$$x(u+u') = \lambda u \, ,$$

de solution $u = C\, x^\lambda e^{-\lambda}$. Reportant dans l'équation $u \underset{F}{*} u = u$, on constate que forcément λ est un entier naturel et que $C = \frac{1}{\lambda!}$

On conjecture alors que le développement vaut :

$$\mathrm{Exp}(tx) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{x^n}{n!} e^{-x}\right)e^{nt} \quad ,$$

ce qui se vérifie aisément. Ainsi, le spectre de x est $\mathbb{N}$ et le projecteur associé à n est $u_n = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

REMARQUE. L'équation (9) dans le cas Weyl est $x \times u = \lambda u$ qui n'a pas de solution non nulle. Le spectre de x ne peut donc être discret.

La formule
$$e^{tx} = \int_0^{+\infty} \delta(\lambda - x)e^{\lambda t} d\lambda$$

(δ distribution de Dirac) montre que ce spectre est continu et est égal à $[0, +\infty[$. En conclusion, le remplacement (apparemment anodin) d'une loi additive par une loi multiplicative fait passer d'une situation classique à une situation quantique.

Notons d'autre part que l'on vient d'obtenir deux déformations mathématiquement équivalentes (et même toutes deux triviales au sens de Gerstenhaber) qui ont des spectres différents.

4.2. La carte de 4.1 se généralise évidemment à $GL(n,\mathbb{R})$. Mais, en général, elle ne convient pas à un sous-groupe de Lie G de $GL(n,\mathbb{R})$. C'est le cas de $G = SO(2)$. Dans un tel cas, on peut utiliser la transformation de Cayley (je dois l'idée de cette utilisation à A. Weinstein).

La carte "transformation de Cayley" de $\mathfrak{g}$ dans G est définie pour $G = SO(2)$ par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} & \dfrac{-2\alpha}{1+\alpha^2} \\ \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} & \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Elle fournit la loi de groupe formel

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1-xy} \quad .$$

C'est la série $x+y+(xy^2+x^2y)+(x^2y^3+x^3y^2)+\dots$. Il est clair que la déformation F associée est un $*$-produit. Ici, les x^{*n} ont des coefficients plus difficiles à obtenir. On a :

$$\begin{aligned} x^{*2} &= x^2 \\ x^{*3} &= x^3+2x \\ x^{*4} &= x^4+8x^2 \quad . \end{aligned}$$

L'équation (9) devient : $x(u+u'') = \lambda u$, dont je n'ai pas pu trouver un système fondamental explicite de solutions. Je n'ai donc pas le spectre de x.

4.3. A tout groupe algébrique G et à toute base de $\mathfrak{g}$, on sait associer naturellement une loi de groupe formel appelé sa formalisation (voir le livre de Dieudonné déjà cité). La formalisation de G = SO(2) est :

$$f(x,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \qquad \text{i.e.}$$

$$f(x,y) = x+y - \frac{1}{2}(xy^2 + x^2y) - \frac{1}{8}(xy^4 + x^4y) - \frac{1}{16}(xy^6 + x^6y) - \dots$$

La déformation F associée est un *-produit. Et on a :

$$x^{*2} = x^2$$

$$x^{*3} = x^3 - x$$

$$x^{*4} = x^4 - 4x^2.$$

L'équation (9) donne l'équation différentielle infinie :

$$x\left(u - \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{8}\frac{d^4u}{dx^4} - \frac{1}{16}\frac{d^6u}{dx^6} - \dots\right) = \lambda u.$$

Dans ce cas, c'est l'existence même de la solution u (fonction ou distribution) qui se pose. Le spectre de x est encore plus loin ...

5. CONCLUSION. Les cinq auteurs cités à propos du spectre sont les inspirateurs du "projet déformation" de présentation de la Mécanique Quantique. Leur article fondamental est : Deformation theory and quantization, I and II, Ann. of Physics III, 1978, 61-151. Dans l'exemple 4.1, il serait intéressant d'avoir une interprétation physique où les états quantiques seraient entiers naturels et les fonctions d'onde associées seraient les u_n.

A défaut d'interprétation physique, il y en a une probabiliste puisque (u_n) est la loi de Poisson de moyenne x. Si bien que cet exposé aurait pu porter ce titre :

"Du crochet de Poisson à la loi de Poisson ...".