PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

HELÈNE KERBRAT
YVAN KERBRAT

Théorie classique des champs en interaction : théorie de jauge et interprétation géométrique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 5B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___5B_1_0>

THEORIE CLASSIQUE DES CHAMPS EN INTERACTION : THEORIE DE JAUGE ET INTERPRETATION GEOMETRIQUE

*

Hélène et **Yvan KERBRAT**

I. Introduction.

Il est d'usage de commencer un exposé sur la théorie des champs par les champs matériels classiques libres. Cependant cette notion paraît ne pas avoir de sens physique et seule une théorie quantique des champs en interaction pourrait satisfaire le physicien.

En effet, le but de la théorie des champs est de décrire la structure "fine" de la matière et, seule une théorie quantique a quelques chances de donner des résultats conformes à l'expérience. Une théorie de champs classiques ne saurait donc être comprise que comme "limite classique" d'une théorie quantique des champs. Son intérêt peut être de constituer une base de départ pour une quantification (par analogie avec le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique).

D'autre part remarquons que la notion de "champ libre" n'est que purement abstraite et ne peut être qu'une introduction à l'étude des champs en interaction, ces derniers ayant quelque chance de représenter une réalité physique.

Dans les chapitres qui suivent nous étudierons les champs classiques (le point de vue sera toujours relativiste) en mettant en évidence les notions géométriques élémentaires sous-jacentes.

On distinguera, selon l'usage, deux types de champs :

1. <u>les champs de matière</u> (de particules matérielles) associés à des ensembles (des "nuages") de particules ;
2. <u>les champs de jauge</u> correspondant aux interactions de la physique des particules qui sont, à ce jour, classées en quatre grands types :

- la gravitation
- l'électromagnétisme
- les interactions faibles
- les interactions fortes.

Les deux premiers correspondent à des actions à grande distance, les deux derniers en revanche représentent des actions de courte portée (de l'ordre de grandeur du rayon du noyau atomique).

Dans ce qui suit, on négligera tout phénomène gravitationnel : l'espace-temps V_4 sur lequel on se placera sera celui de la relativité restreinte (ouvert de l'espace de Minkowski).

II. Champs de matière classiques libres.

§ 1.Définition générale :

Un champ de matière associe à un système donné de particules une section φ d'un certain fibré vectoriel réel ou complexe E dont la base est l'espace-temps V_4.

La connaissance de φ détermine la physique du système et la dynamique du champ résulte de la donnée d'une densité lagrangienne $\mathscr{L}$, fonction réelle sur le fibré $\mathscr{J}^1(E)$ des 1-jets de sections du fibré E.

Dans la théorie locale des champs matériels libres on suppose que le fibré E est trivialisable et qu'une trivialisation en est choisie. On peut alors poser :

$$E = V_4 \times \mathscr{E}$$

où $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.

Un champ classique libre sera donc défini par une application (suffisamment différentiable) $\varphi : V_4 \to \mathscr{E}$, solution d'une équation aux dérivées partielles définie par la densité lagrangienne.

Les densités lagrangiennes que l'on considèrera seront des fonctions de type :

$$\mathscr{L} : \mathscr{E} \times L(\mathbb{R}^4, \mathscr{E}) \to \mathbb{R}$$

c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas explicitement du point de l'espace-temps. Cette hypothèse permet dans la pratique d'obtenir des lois de conservation par application du théorème de Noether (voir § 2). La densité lagrangienne $\mathscr{L}$ étant donnée, le lagrangien d'une application $\varphi : V_4 \to \mathscr{E}$ à l'instant $t = x^o$ est :

(II.1.1) $$L_\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

où $\mathbf{R}^3$ représente l'espace physique et $\partial\varphi$ désigne la différentielle de φ .

Définition 1. *Un champ classique libre associé à la densité lagrangienne $\mathscr{L}$ rend extrémale l'intégrale d'action :*

$$A(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} L_\varphi(t)dt = \int_{V_4} \mathscr{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))dx$$

L'équation du champ libre est donc l'équation d'Euler de ce problème de calcul des variations et s'écrit :

(II.1.2) $$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} (\varphi(x), \partial\varphi(x))\right)$$

où, au second membre, il y a sommation sur $\alpha = 0,1,2,3$ (convention d'Einstein).

§ 2. Théorème de Noether et lois de conservation.

Soit $\varphi : V_4 \to \mathscr{E}$ une solution de l'équation (1.2) et soit T le tenseur une fois covariant et une fois contravariant sur V_4, dont les composantes sont :

(II.2.1) $$T^\alpha_\beta(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}(\varphi(x), \partial\varphi(x))\, \partial_\beta\varphi(x) - \delta^\alpha_\beta\, \mathscr{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))$$

Alors on a :

$$\partial_\alpha T^\alpha_\beta(x) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} (\varphi(x), \partial\varphi(x))\right) \partial_\beta\varphi(x) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} (\varphi(x), \partial\varphi(x))\, \partial_\alpha\partial_\beta\varphi(x)$$
$$- \partial_\beta(\mathscr{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))) =$$
$$= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}(\varphi(x), \partial\varphi(x))\, \partial_\beta\varphi(x) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)} (\varphi(x), \partial\varphi(x))\, \partial_\beta\, \partial_\alpha\varphi(x) -$$
$$- \partial_\beta(\mathscr{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))),$$

donc :

(II.2.2) $$\partial_\alpha T^\alpha_\beta = 0$$

Cette propriété se traduit en disant que le **tenseur T est conservatif.**

Posons

$$(II.2.3) \qquad P_\beta(x^o) = \int_{\mathbb{R}^3} T^o_\beta\,(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 .$$

En appliquant (2.2) et le théorème de Stokes on trouve aisément que, si φ est à support compact dans la direction de l'espace $\mathbb{R}^3$ (par exemple), les P_β sont des constantes.

$H = P_o$ est **l'énergie** du champ φ ;
les $P^\alpha = -P_\alpha$ pour $\alpha = 1,2,3$ sont les composantes du **vecteur-impulsion** du champ.
$(H = P^o, P^1, P^2, P^3)$ est appelé **quadrivecteur énergie-impulsion** du champ φ et T est son **tenseur énergie-impulsion.**

Soit G un groupe de Lie de transformations de V_4 muni d'une représentation dans l'espace vectoriel $\mathscr{E}$. Alors on a une action à gauche $(g,\varphi) \longmapsto \varphi^g$ de G dans l'espace des fonctions $\varphi : V_4 \to \mathscr{E}$ où

$$\varphi^g(x) = g\varphi(g^{-1}(x))$$

Définition 2. *On dit que* G *est un groupe de symétries pour la densité lagrangienne* $\mathscr{L}$ *(et donc pour l'équation (1.2)) si* $\mathscr{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))$ *ne change pas lorsque l'on y remplace* φ *par* φ^g *et* x *par* g(x), *pour tout* $g \in G$.

Remarque.

Si G opère trivialement dans V_4 on dit que G est un **groupe de symétries internes.**

Lemme 1. *Soit* G *un groupe de symétries pour la densité lagrangienne* $\mathscr{L}$ *et soit* ω *un élément de l'algèbre de Lie* $\mathscr{G}$ *du groupe* G. *On considère le champ de vecteurs* ξ *défini sur* V_4 *par :*

$$(II.2.4) \qquad \xi(x) = (\xi^\alpha(x)) = \frac{\partial}{\partial t}(\exp(t\,\omega)x)\Big|_{t=o}$$

Alors on a :

(II.2.5)
$$\begin{aligned}
&< \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),\ \frac{\partial}{\partial t} \exp(t\omega)\,\varphi(x)\Big|_{t=o} > \\
&+ < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),\ \frac{\partial}{\partial t} \exp(t\omega)\ \partial_\alpha\varphi(x)\Big|_{t=o} > \\
&- < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),\quad \partial_\alpha \xi^\beta(x)\ \partial_\beta\varphi(x) > \ = 0
\end{aligned}$$

Démonstration.

D'après la définition 2 on a :

$$\forall g \in G \qquad \mathcal{L}(g\,\varphi(x),\ g\circ\partial\varphi(x) \circ \partial g^{-1}(g(x))) = \mathcal{L}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x))$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}[\exp(t\omega)\varphi(x),\ \exp(t\omega)\circ(\partial\varphi(x))\circ\partial\ \exp(-t\omega)(\exp(t\omega)x)] = 0,$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times V_4.$$

En explicitant cette dérivée pour $t = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&< \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),\ \frac{\partial}{\partial t} \exp(t\omega)\,\varphi(x)\Big|_{t=o} > + \\
&+ < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),\ \frac{\partial}{\partial t} \exp(t\omega)\ \partial_\alpha\varphi(x)\Big|_{t=o} > + \\
&< \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),\ \partial_\beta\varphi(x)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\partial_\alpha \exp(-t\omega)^\beta(x)\Big|_{t=o} > + \\
&+ < \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),\ \partial_\beta\varphi(x)[\partial_\gamma\,\partial_\alpha\ \exp(-t\omega)^\beta(\exp(t\omega)x)\,\frac{\partial}{\partial t}\exp(t\omega)^\gamma x]\Big|_{t=o} > = 0
\end{aligned}$$

On voit facilement que le dernier terme est nul et que le troisième s'écrit, compte tenu de (2.4) :

$$< \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi)}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)),-\ \partial_\alpha \xi^\beta(x)\ \partial_\beta\varphi(x) >$$

Théorème de Noether. *Soit* G *un groupe de symétries pour la densité lagrangienne* $\mathcal{L}$ *, préservant la forme volume canonique de* V_4.

Pour tout $\omega \in \mathcal{G}$ *et pour toute solution* φ *de l'équation (1.2) le champ de quadrivecteurs* $\mathcal{J}$ *donné sur* V_4 *par :*

$$\text{(II.2.6)} \quad \mathcal{J}^{\alpha}(x) = - T^{\alpha}_{\beta}(x)\, \xi^{\beta}(x) + < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha} \varphi)} (\varphi(x), \partial\varphi(x)), \frac{\partial}{\partial t} (\exp(t\omega)\varphi(x)\Big|_{t=o} >$$

est conservatif (i.e. $\partial_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha} = 0$ *).*

Démonstration.

Compte tenu de (2.2) et de (1.2) on a :

$$\partial_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha}(x) = -T^{\alpha}_{\beta}(x)\ \partial_{\alpha} \xi^{\beta}(x) + < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_{\alpha}\varphi} (\varphi(x),\ \partial\varphi(x)), \frac{\partial}{\partial t} \exp(t\omega)\varphi(x)\Big|_{t=o} >$$

$$+ < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\varphi)} (\varphi(x),\ \partial\varphi(x)), \frac{\partial}{\partial t} \exp(t\omega)\ \partial_{\alpha} \varphi(x)\Big|_{t=o} > .$$

En appliquant le lemme 1, on obtient :

$$\partial_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha}(x) = -T^{\alpha}_{\beta}(x)\ \partial_{\alpha} \xi^{\beta}(x) + < \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\varphi)} (\varphi(x), \partial\varphi(x)),\ \partial_{\alpha} \xi^{\beta}(x)\ \partial_{\beta} \varphi(x) >$$

$$= \mathcal{L}(\varphi(x),\ \partial\varphi(x)) \operatorname{div} \xi(x) = 0$$

(hypothèse d'invariance de la forme volume).

Remarques.

1. La propriété du tenseur d'impulsion-énergie d'être conservatif peut également s'interpréter comme une conséquence du théorème de Noether appliqué au groupe des translations de l'espace-temps V_4 (opérant trivialement dans $\mathcal{E}$).

2. Un des axiomes fondamentaux de la théorie relativiste des champs est que le groupe de Lorentz (ou son revêtement universel $SL(2,\mathbb{C})$) est toujours un groupe de symétries de la densité lagrangienne (invariance de Lorentz). Si G est le groupe de Lorentz L(4), le terme $-T^{\alpha}_{\beta}\, \xi^{\beta}$ dans (2.6) correspond au **tenseur de moment orbital,** le second terme correspond au **tenseur de moment de spin.**

On distingue deux grands types de champs de matière :

1. les champs de bosons définis par une représentation linéaire du groupe de Lorentz $L(4)$ et une densité lagrangienne admettant $L(4)$ comme groupe de symétries (pour son action naturelle dans l'espace-temps plat V_4 et la représentation linéaire donnée) ;

2. les champs de fermions (spinoriels) pour lesquels la densité lagrangienne admet le groupe de spin $SL(2,\mathbb{C})$ comme groupe de symétries (pour une représentation de $SL(2,\mathbb{C})$ dans l'espace vectoriel de dimension finie et l'action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur V_4 déduite de celle de $L(4)$).

§ 3. Deux exemples fondamentaux de champs de matière.

A. Champ scalaire ou pseudo-scalaire complexe (chargé) - (Mésons $\pi^{\pm}$).

Dans ce cas $\mathscr{E} = \mathbb{C}$ muni de la représentation triviale de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Les équations de champ libre sont les équations de Klein-Gordon :

$$\text{(II.3.1)} \qquad \begin{cases} \Box \varphi = m^2 \varphi \\ \Box \overline{\varphi} = m^2 \overline{\varphi} \end{cases}$$

où $\Box = -\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$ est le d'Alembertien, m est la densité de masse du champ et $\overline{\varphi}$ est le complexe conjugué du champ $\varphi : V_4 \to \mathbb{C}$.

La densité lagrangienne correspondante est :

$$\text{(II.3.2)} \qquad \mathscr{L} = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \overline{\varphi}\, \partial_\beta \varphi - m^2 \overline{\varphi} \varphi .$$

Le tenseur d'énergie-impulsion du champ s'exprime par :

$$\text{(II.3.3)} \qquad T^\alpha_\beta = \eta^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \overline{\varphi}\, \partial_\beta \varphi + \eta^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \varphi\, \partial_\beta \overline{\varphi} - \delta^\alpha_\beta \mathscr{L}.$$

On remarque qu'il est auto-adjoint ($\eta_{\alpha\gamma}\ T^\gamma_\beta = \eta_{\beta\gamma}\ T^\gamma_\alpha$). Cela n'est pas le cas en général et est lié à l'absence de spin.

La densité d'énergie du champ φ est :

$$T^o_o = \sum_{i=o}^{3} |\partial_i \varphi|^2 + m^2 |\varphi|^2 \geqslant 0.$$

La densité lagrangienne (3.2) admet le groupe $G = U(1)$ comme groupe de symétries internes dont l'action est donnée par :

$$\varphi \longmapsto e^{-i\theta}\varphi$$
$$\overline{\varphi} \longmapsto e^{i\theta}\overline{\varphi}$$

En appliquant le théorème de Noether on obtient le quadrivecteur conservatif de composantes :

(II.3.4) $$\mathcal{J}^{\alpha} = i\eta^{\alpha\beta}(\overline{\varphi}\,\partial_\beta\varphi - \varphi\,\partial_\beta\overline{\varphi})$$

qu'on appelle **quadrivecteur courant.**

L'intégrale première de l'équation (3.1) de Klein-Gordon qui lui correspond,

(II.3.5) $$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{J}^{0}(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

s'interprète comme la charge du champ φ .

B. Champ de spineurs (électrons, positrons, nucléons, mésons μ, quarks, etc.)

Le cas le plus simple est ici obtenu pour $\mathcal{E} = \mathbb{C}^4$ muni d'une représentation spinorielle. La représentation infinitésimale de l'algèbre de Lie $\ell(4) = sl(2,\mathbb{C})$ associée peut être décrite comme suit :

à tout $\omega = (\omega^{\alpha}_{\beta}) \in \ell(4)$ on associe la matrice :

(II.3.6) $$\tilde{\omega} = \frac{1}{8}\,\omega_{\alpha\beta}[\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}] \in gl(4,\mathbb{C})$$
$$\text{où} \quad \omega_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$$

et où les γ^{α} , $\alpha = 0,1,2,3$, sont quatre matrices de Dirac, c'est-à-dire des matrices complexes telles que :

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2\eta^{\alpha\beta}.$$

Généralement on en choisit la réalisation suivante :

$$\gamma^{0} = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 \end{array}\right), \quad \gamma^{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma_\alpha \\ \hline -\sigma_\alpha & 0 \end{array}\right)$$

où les σ_{α} , $\alpha = 1,2,3$, sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'équation du champ spinoriel est **l'équation de Dirac**

(II .3.7) $$i\gamma^\alpha \partial_\alpha \varphi = m\varphi .$$

En remarquant que l'on a :

$$(i\,\gamma^\beta \partial_\beta + m)(i\,\gamma^\alpha \partial_\alpha - m) = \square - m^2,$$

on voit que toute solution de l'équation de Dirac est solution de l'équation de Klein-Gordon (la réciproque étant évidemment fausse).

Notons $\overline{\varphi} : V_4 \to (\mathbb{C}^4)^*$ le **conjugué de Dirac** de $\varphi : V_4 \to \mathbb{C}^4$. On a :

$$\overline{\varphi}\,(x) = (\varphi(x))^*\,\gamma^0$$

où $(\overline{\varphi}\,(x))^*$ est la matrice ligne transposée conjuguée de la matrice colonne $\varphi(x)$. Par conjugaison de Dirac on déduit de (3.7) :

(II .3.8) $$i\,\partial_\alpha \overline{\varphi}\,\gamma^\alpha + m\overline{\varphi} = 0 .$$

Les équations de Dirac (3.7) et (3.8) constituent l'équation d'Euler déduite de la densité lagrangienne :

(II .3.9) $$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\,(\overline{\varphi}\,\gamma^\alpha \partial_\alpha \varphi - \partial_\alpha \overline{\varphi}\,\gamma^\alpha \varphi) - m\,\overline{\varphi}\,\varphi .$$

Le tenseur d'énergie-impulsion s'écrit :

(II .3. 10) $$T^\alpha_\beta = \frac{i}{2}(\overline{\varphi}\,\gamma^\alpha \partial_\beta \varphi - \partial_\beta \overline{\varphi}\,\gamma^\alpha \varphi) .$$

Le groupe de symétries internes U(1) fournit le quadrivecteur courant conservatif :

(II .3.11) $$\mathscr{J}^\alpha = \overline{\varphi}\,\gamma^\alpha \varphi .$$

En outre la densité lagrangienne (3.9) admet le groupe SL(2,$\mathbb{C}$) comme groupe de symétries. Pour chaque $\omega = (\omega^\alpha_\beta) \in \ell(4)$ on a, d'après le théorème de Noether, le quadrivecteur conservatif :

$$(II.3.12)\qquad \mathscr{J}^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta}_{\gamma}\,x^{\gamma} + S^{\alpha,\beta\delta}\,\omega_{\beta\delta},$$

où les quantités

$$S^{\alpha,\beta\delta} = \frac{1}{8i}\,\bar{\varphi}(\gamma^{\alpha}[\gamma^{\beta},\gamma^{\delta}] + [\gamma^{\delta},\gamma^{\beta}]\gamma^{\alpha})\,\varphi$$

sont les composantes du **tenseur de moment de spin.**

III. Champs classiques en interaction.

Il est généralement admis en physique théorique que chacune des trois interactions (non gravitationnelles) de la physique des particules est associée à un groupe de Lie compact :

(i) U(1) pour le champ électromagnétique,
(ii) SU(2) pour les interactions faibles,
(iii) SU(3) pour les interactions fortes.

Actuellement de nombreuses tentatives ont pour but de remplacer ces groupes par un groupe plus "grand" donnant une description unitaire des trois interactions.

Dans ce qui suit G désignera un groupe de Lie compact fixé correspondant à une **interaction** que l'on dira **de type G.**

Le cadre géométrique pour cette interaction est alors un fibré principal de groupe structural G.

§ 1. Interaction et géométrie différentielle.

a) Champs en interaction et espaces fibrés :

On suppose donnés :

(i) Un groupe de Lie compact G associé à une interaction (de type G).

On fixe un produit scalaire défini positif $(.|.)$ sur l'algèbre de Lie de G, invariant par la représentation adjointe.

(ii) Un fibré principal $P \xrightarrow{\pi_0} V_4$ (où V_4 est l'espace-temps), de groupe structural G.

P est appelé espace des facteurs de phase.

(iii) Une représentation unitaire ρ de G dans un espace vectoriel hermitien (ou euclidien) $\mathscr{E}$.

Soit $E \xrightarrow{\pi} V_4$ le fibré vectoriel associé à P par la représentation ρ (Rappelons que E est l'espace quotient de $P \times \mathscr{E}$ par G opérant comme suit :

(III.1.1) $$g.(p,\xi) = (R_{g^{-1}}(p), \rho(g)\xi)$$

$$\text{où } g \in G,\ p \in P,\ \xi \in \mathscr{E}).$$

Un champ en interaction de type G est une section s de ce fibré vectoriel, solution d'une équation associée à un lagrangien que l'on introduira plus loin.

Remarquons que l'espace des sections du fibré E est naturellement isomorphe à l'espace des fonctions $\psi : P \to \mathscr{E}$ de type ρ, c'est-à-dire telles que

(III.1.2) $$\psi(R_g(p)) = \rho(g^{-1})\psi(p).$$

Cet isomorphisme est construit de la façon suivante :

Etant donné une section $s : V_4 \to E$, on lui associe la fonction $\psi : P \to \mathscr{E}$ telle que pour tout $p \in P$, $s \circ \pi_0(p)$ soit l'orbite de $(p, \psi(p))$ pour l'action de G dans $P \times \mathscr{E}$.

Lorsque s est un champ en interaction de type G, **la fonction ψ** qui lui est ainsi associée **est appelée fonction d'onde.**

b) Lagrangien, connexions et dérivées covariantes :

Les lagrangiens considérés par les physiciens pour les champs en interaction sont étroitement reliés à ceux déjà introduits pour les champs libres (II. § 1). On verra ci-dessous qu'ils ne peuvent être exprimés sans l'introduction d'une connexion sur P.

Soit $\mathscr{L} : \mathscr{E} \times L(\mathbb{R}^4, \mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ une densité lagrangienne de champ libre admettant G comme groupe de symétries internes. Soit également $s : V_4 \to E$

une section du fibré E.

Si $f : U \subset V_4 \to P$ est une section locale de P (une **jauge locale** pour les physiciens), on considère l'application $\varphi_f : U \to \mathscr{E}$ telle que, pour tout $x \in U$, s(x) soit l'orbite de $(f(x), \varphi_f(x))$ pour l'action définie par (1.1). Si s est un champ en interaction, φ_f s'interprète alors comme un champ libre local associé à s par la jauge locale f.

On peut noter que l'on a :

$$\varphi_f = \psi \circ f$$

où ψ est la fonction d'onde de s.

Une remarque très importante est que la fonction

(III.1.3) $$x \longmapsto \mathscr{L}(\varphi_f(x), \partial\varphi_f(x))$$

ne dépend pas uniquement de la section s, mais également de la jauge locale f. On peut la rendre intrinsèque en remplaçant dans (1.3) $\partial\varphi_f$ par l'expression locale dans la jauge f de la différentielle covariante Ds de la section s relativement à une connexion ω sur P. On peut en donner une expression ne faisant pas intervenir de jauge locale de la façon suivante :

Soit ψ la fonction d'onde de la section s. En chaque point $p \in P$ on définit sa différentielle covariante $\widetilde{D}\psi(p) \in L(\mathbb{R}^4, \mathscr{E})$ par :

(III.1.4) $$\widetilde{D}\psi(p) = \partial_H\psi(p) \circ (\partial_p\pi_o|_{H_p})^{-1}$$

où $H_p \subset T_pP$ est l'espace horizontal de la connexion ω au point p et

$$\partial_H\psi(p) = \partial_p\psi|_{H_p}$$

est la différentielle horizontale de ψ au point p.

Alors il existe une unique fonction $\mathscr{L}_\psi : V_4 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in P$ on ait :

(III.1.5) $$\mathscr{L}_\psi(\pi_o(p)) = \mathscr{L}(\psi(p), \widetilde{D}\psi(p))$$

La fonction $\mathscr{L}_\psi$ sera appelée la densité lagrangienne de la fonction d'onde ψ pour la connexion ω.

c) Connexions, courbure et champs de Yang et Mills :

On vient de voir ci-dessus que pour obtenir, pour un champ en interaction, un lagrangien intrinsèque conforme aux prescriptions de la physique on est amené à introduire une connexion ω, a priori arbitraire sur le fibré P. Certaines de ces connexions ont un sens physique : lorsqu'elles vérifient les équations (1.7) et (1.8) ci-dessous, on les appelle **potentiel de champ de Yang-Mills**) (ou **de champ de jauge**) ; on dit qu'une telle connexion définit l'interaction.

Le champ de jauge proprement dit est donné par la forme de courbure Ω de la connexion.

La dynamique d'un champ de Yang-Mills est dérivée, comme pour les champs matériels, d'une densité lagrangienne $\mathscr{L}_{YM}$ définie comme suit :

Soit $f : U \subset V_4 \to P$ une jauge locale. On pose :

$$f^*\Omega = F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

où les $F_{\alpha\beta} \in \mathscr{G}$ sont les "forces du champ de jauge" dans la jauge f.

Alors on a sur U :

(III.1.6) $$\mathscr{L}_{YM}(\omega) = -\frac{1}{4}\, \eta^{\alpha\gamma}\, \eta^{\beta\delta}\, (F_{\alpha\beta} | F_{\gamma\delta}),$$

qui ne dépend pas de la jauge f (les $\eta^{\alpha\gamma}$ sont les composantes du tenseur métrique de Minkowski).

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathscr{G}$ (dim $\mathscr{G} = p$) et on pose :

$$f^*\omega = A^i\, e_i.$$

Les 1-formes A^i sur U sont appelées les **potentiels de Yang-Mills dans la jauge f** et, par dualité au moyen de la métrique de Minkowski η, peuvent être considérées comme définissant des champs de "bosons vectoriels".

La formule (1.6) indique que ces "bosons" sont sans masse (absence de termes quadratiques en les A^i). On verra plus loin (§ 2) comment, sous certaines hypothèses, les champs de jauge peuvent engendrer de véritables champs de bosons avec masse.

d) Equations des champs en interaction :

Considérons une section $s : V_4 \to E$ définissant un champ en interaction de fonction d'onde $\psi : P \to \mathscr{E}$ et un potentiel de champ de jauge ω.

Les équations vérifiées par ces deux champs en interaction sont données par l'équation d'Euler associée à la densité lagrangienne $\mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_{YM}$. On obtient :

- d'une part, pour une expression locale

$$\varphi = \psi \circ f$$

du champ matériel défini par s, l'équation

(III.1.7) $$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}(\varphi(x), D\varphi(x)) = D_\alpha\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (D_\alpha \varphi)}(\varphi(x), D\varphi(x))\right)$$

analogue à (II.1.2) où l'on a remplacé les dérivées ordinaires par les dérivées covariantes ;

- d'autre part, pour le champ de Yang-Mills, une équation de la forme :

(III.1.8) $$\eta^{\beta\gamma} D_\gamma F_{\beta\alpha} dx^\alpha = j$$

où la 1-forme j sur $U \subset V_4$ qui définit les **courants de champs de matière** s'écrit :

(III.1.9) $$j = f^* \mathscr{I},$$

$\mathscr{I}$ étant une 1-forme tensorielle sur P à valeurs dans $\mathscr{G}$.

e) Exemples :

1. $G = U(1)$,

la représentation ρ de U(1) dans $\mathscr{E}$ étant la multiplication par les scalaires.

Ω correspond alors au champ électromagnétique. Plus précisément $\frac{1}{i}\Omega$

est l'image réciproque par π_o d'une 2-forme réelle sur V_4 pour laquelle l'équation (1.8) donne l'équation de Maxwell. On retrouve dans ce cas le photon comme "boson vectoriel de jauge".

2. Les quarks sont obtenus en considérant la représentation naturelle de $G = SU(3)$ dans $\mathscr{E} = (\mathbb{C}^4)^3$. Les huit "bosons de Yang-Mills" sans masse qui apparaissent dans ce cas sont appelés **gluons.**

§ 2. Brisure spontanée de symétrie et bosons de jauge.

a) Une brisure spontanée de symétrie se produit lorsqu'une symétrie du lagrangien d'un champ libre ne laisse pas invariant l'état du vide (d'énergie minimum). Pour préciser cela considérons un lagrangien de la forme :

(III.2.1) $$\mathscr{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) = \eta^{\alpha\beta} < \partial_\alpha\varphi(x)| \partial_\beta \varphi(x) > - V(\varphi(x))$$

où $\varphi : V_4 \to \mathscr{E}$ représente un n-uple de champs scalaires chargés (dim $\mathscr{E} = n$), $< .|. >$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathscr{E}$ et $V : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ est une **fonction potentiel.**

On suppose que l'on a une représentation ρ d'un groupe **compact connexe** G dans $\mathscr{E}$ laissant invariants :

(i) le produit scalaire hermitien,
(ii) la fonction potentiel V.

En outre (cette hypothèse est implicite dans tous les ouvrages de physique traitant le problème) G ne laisse invariante aucune droite vectorielle de $\mathscr{E}$.

La densité d'énergie du n-uple de champs scalaires libres φ est :

(III.2.2) $$\mathscr{H} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_o\varphi)} \partial_o \varphi - \mathscr{L},$$

soit, dans le cas (2.1)

(III.2.3) $$\mathscr{H} = \sum_{\alpha=o}^{3} < \partial_\alpha \varphi(x)| \partial_\alpha \varphi(x) > + V(\varphi(x)).$$

Les physiciens font l'hypothèse, essentielle pour eux, de l'existence de champs libres d'énergie minimum (états du vide), ce qui revient à supposer que le potentiel V a un minimum absolu que l'on posera égal à zéro.

Alors l'invariance de jauge du potentiel V entraîne que l'ensemble $V^{-1}(0)$ des points de $\mathscr{E}$ où V est minimum est une réunion d'orbites de G.

Pour la suite **on supposera que $V^{-1}(0)$ est une unique orbite de G.**

Deux cas peuvent alors se produire :

(i) $V^{-1}(0)$ est réduit à un point qui est nécessairement 0 en vertu des hypothèses et qui est évidemment invariant par G. Dans ce cas il n'y a pas brisure de symétrie.

(ii) $\dim V^{-1}(0) = k \geqslant 1$.

Un état du vide $\varphi_o \in V^{-1}(0)$ étant choisi une fois pour toutes, **une transformation g $\in$ G telle que $\rho(g)\varphi_o \neq \varphi_o$ est appelée symétrie spontanément brisée.**

Le stabilisateur G_o de φ_o dans G est appelé le **petit groupe de jauge** correspondant à φ_o dans G.

Pour toute la suite, on se place dans les conditions (ii).

b) Vide en interaction et réduction du groupe structural :

On se donne un fibré principal $P \xrightarrow{\pi_o} V_4$ de groupe structural G (espace des facteurs de phase) et on considère les champs dont la fonction d'onde ψ est une application de P dans $\mathscr{E}$ (champs en interaction).

Une **hypothèse essentielle** (bien que généralement implicite) en physique est qu'il existe un champ d'énergie minimum dont la fonction d'onde ψ_o, définie sur P, est à valeurs dans $V^{-1}(0)$. Cette fonction d'onde joue un rôle clé par l'intermédiaire de la proposition suivante.

Proposition : *L'ensemble* $P_o = \psi_o^{-1}(\varphi_o) \subset P$ *est un sous-fibré principal de* P *de groupe structural le "petit groupe"* G_o.

Démonstration : On note $\rho' : \mathscr{G} \to L(\mathscr{E})$ la représentation de l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ dérivée de la représentation ρ de G.

Soit η un vecteur tangent en φ_o à $V^{-1}(0)$. Alors il existe $\xi \in \mathscr{G}$ tel que

$$\eta = \rho'(\xi)\varphi_o.$$

Mais puisque ψ_o vérifie (1.2) on voit que, pour tout $p \subset P_o$ on a :

$$\eta = T_p \psi_o (\frac{d}{dt} R_{\exp(-t\xi)} p \Big|_{t=o}).$$

Il en résulte que $\psi_o : P \to V^{-1}(0)$ est une submersion en tout point de P_o et que P_o est donc une sous-variété fermée de P telle que :

(III.2.4) $$\dim P_o = \dim P - k$$

D'autre part on voit très aisément que :

1) $\forall x \in V_4,\ P_o \cap \pi_o^{-1}(x) \neq \emptyset,$

2) $\forall p \in P_o$ et $\forall g \in G,\ R_g p \in P_o \Longleftrightarrow g \in G_o.$

On appellera $i : P_o \hookrightarrow P$ le plongement canonique.

Remarquons que si ω_o est une forme de connexion sur P_o, la différentielle covariante $\tilde{D}\psi_o$ de ψ_o relativement à ω_o est nulle. On voit donc que ψ_o est la fonction d'onde d'un champ en interaction d'énergie minimum (= 0) lorsque l'interaction est définie par une connexion ω sur P telle que $i^*\omega$ soit une forme de connexion sur P_o.

c) Bosons de jauge avec masse :

Soit $\mathcal{K}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{G}_o$ dans $\mathcal{G}$ relativement au produit scalaire euclidien $(.|.)$ invariant par la représentation adjointe. $\mathcal{K}$ est stable par la représentation adjointe de G_o et on notera μ la représentation de G_o dans $\mathcal{K}$ ainsi induite.

Supposons donnée une interaction de type G définie par une connexion ω sur P. Alors $i^*\omega$ se décompose selon :

(III.2.5) $$i^*\omega = \omega_o + \gamma,$$

où ω_o est une 1-forme de connexion sur P_o (à valeurs dans $\mathcal{G}_o$) et γ est une 1-forme tensorielle de type μ.

Soit $f : U \subset V_4 \to P_o$ une section locale de P_o (une jauge locale). Alors on peut montrer que la différentielle covariante de ψ_o relativement à ω en un point f(x) s'écrit :

(III.2.6) $$\tilde{D}\,\psi_o(f(x))(Y) = \rho'(f^{*}\gamma(x)(Y))\varphi_o$$

où $x \in U$ et $Y \in T_x V_4$.

Soit $(e_1,\dots,e_k)$ une base orthonormée de $\mathscr{K}$ et posons :

(III.2.7) $$f^{*}\gamma = \gamma^i_\alpha\, dx^\alpha e_i$$

Les $\gamma^i = \gamma^i_\alpha dx^\alpha$ forment un k-uple de 1-formes réelles sur U.

Le lagrangien décrivant l'interaction entre le champ d'énergie minimum ψ_o et le champ de jauge défini par ω s'écrit :

(III.2.8) $$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \eta^{\alpha\beta} < \tilde{D}_\alpha\, \psi_o | \tilde{D}_\beta\, \psi_o > + \mathscr{L}_{YM}(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \eta^{\lambda\mu}\ \eta^{\alpha\beta}\ \tilde{D}^o_\alpha \gamma^i_\lambda \tilde{D}^o_\beta \gamma^i_\mu + \\ &+ \eta^{\alpha\beta}\ \gamma^i_\alpha \gamma^j_\beta < \rho'(e_i)\varphi_o | \rho'(e_j)\varphi_o > + \mathscr{L}_{YM}(\omega_o) + \\ &+ \text{termes de degré} \geqslant 3 \text{ en } \gamma \text{ et } \omega_o,\end{aligned}$$

où $\tilde{D}^o\gamma$ représente la différentielle covariante de la forme tensorielle γ relativement à la forme de connexion ω_o sur P_o.

Le premier terme de ce développement montre que les γ^i représentent des champs de bosons vectoriels.

Le deuxième terme est interprété par les physiciens comme un **terme de masse** pour ces champs de bosons. La matrice de masse est la matrice hermitienne de coefficient général :

(III.2.9) $$m_{ij} = < \rho'(e_i)\varphi_o | \rho'(e_j)\varphi_o >$$

et dont on vérifie aisément qu'elle est définie positive.

Ainsi la brisure spontanée de symétrie et l'existence d'un champ en interaction d'énergie minimum imposent que le potentiel du champ de Yang-Mills définissant l'interaction soit partiellement constitué de champs de bosons vectoriels de masse positive. Ces bosons sont appelés **bosons de jauge.**

Exemples :

1. $G = U(1)$, $G_o = \{1\}$;

Cette situation se rencontre en supraconductivité où la théorie de Ginzburg et Landau conduit à donner une masse positive au photon à l'intérieur d'un superconducteur pour expliquer qu'un champ magnétique externe n'y pénètre pas (effet Meissner).

2. $G = U(1) \times SU(2)$, $G_o = U(1)$.

Ce cas correspond au modèle de Weinberg-Salam des interactions électrofaibles. Trois bosons de jauge (noté W^+, W^- et Z^o) acquièrent une masse positive. Le photon reste sans masse.

*

Bibliographie

[1] **BJORKEN and DRELL :** "Relativistic Quantum Fields", Mc Graw Hill, 1964.

[2] **BOGOLIUBOV et CHIRKOV :** "Introduction à la théorie quantique des champs", Dunod, 1960.

[3] **CHENG and LI :** "Gauge theory of elementary particle physics", Clarendon Press, Oxford, 1984.

[4] **M. DANIEL and C.M. VIALLET :** "The geometrical setting of gauge theories of Yang-Mills type", Reviews of Modern Physics, Vol. 52, n° 1, January 1980.

[5] **FADEEV and SLAVNOV :** "Gauge fields, Introduction to quantum theory", Benjamin 1980.

[6] **B. FELSAGER :** "Geometry, Particles and Fields", Odense University Press 1981.

[7] **K. HUANG :** "Quarks, leptons and gauge fields", World Scientific Publ. 1982.

[8] **KOBAYASHI and NOMIZU :** "Foundations of Differential Geometry", Vol. I, Interscience, 1963.

[9] **A. LICHNEROWICZ :** "Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie", Ed. Cremonese, 1962.

[10] **C. QUIGG :** "Gauge theories of strong, weak and electromagnetic interactions", Benjamin, 1983.

[11] **A. TRAUTMAN :** "Differential Geometry for physicists", Stony Brook Lectures, Bibliopolis, 1984.

[12] **A. TRAUTMAN :** "Geometrical Aspects of Gauge Configurations", Act. Phys. Austr. (Suppl.) XXIII, 401-432, 1981.

[13] "Geometric techniques in gauge theories", Proc. Scheveningen 1981, Lecture Notes in Math. n° 926 (1982).

Des compléments de géométrie peuvent être trouvés dans : [8], [9], [11], [13].

La théorie classique des champs matériels est traitée dans : [1], [2], [6].

L'aspect physique des théories de jauge est développé dans : [3], [4], [5], [7], [10] et la bibliographie de [4].

L'idée de réduction du groupe structural développée dans III.2.b est apparue pour la première fois dans [12] où elle est exposée dans un cas particulier.