

MAURICE POUZET

Une approche métrique de la rétraction dans les ensembles ordonnés et les graphes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 2B
« Compte rendu des journées infinitistes », , p. 59-89

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985__2B_59_0

© Université de Lyon, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE APPROCHE METRIQUE DE LA RETRACTION DANS LES ENSEMBLES ORDONNES ET LES GRAPHES

par Maurice POUZET

Résumé : In order to study the retractions of ordered sets and graphs I propose to consider these objects as kind of metric spaces, where, instead of reals, the values of the distance function belongs to an ordered semi-group. The characterization of absolute retracts, with respect to the non expansive mappings, due to N. Aronszajn and P. Panitchpakdi (1956), and the fixed point theorem of R. Sine and P.M. Soardi (1979), extend to these spaces. This generalization includes many old and new results on ordered sets and graphs like the Banaschewski-Brun's theorem (1967), the recent results of A. Quilliot, I. Rival and R. Nowakowski (1983) and the Tarski's fixed point theorem as well.

Introduction. La notion de rétraction est ancienne. Ces dernières années les résultats concernant les rétractions d'ordres et de graphes ont proliféré. Dans ce bref exposé je me propose de montrer comment une approche métrique permet d'englober les résultats anciens ou récents obtenus dans ce domaine et, par la même, d'illustrer comment les idées infinitistes, naturellement sous jacentes aux notions métriques, peuvent être utilisées pour étudier des structures discrètes ou, même, finies.

Cette approche consiste à traiter les ensembles ordonnés et les graphes comme des espaces métriques, leurs morphismes étant assimilés aux contractions. Pour cela je considère des espaces un peu plus généraux que les espaces classiques : Au lieu de nombres réels, les valeurs de la distance d sont éléments d'un semi groupe ordonné $\underset{\sim}{V} = (V, +, \leq)$ dont un élément 0 est à la fois le zéro de la loi de semi groupe et le plus petit élément pour l'ordre.

La distance satisfait les deux propriétés habituelles

$$d1) d(x,y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y$$

$$d2) d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \text{ pour tout } x,y,z.$$

La symétrie, pas forcément vérifiée, est remplacée par :

$$d3) d(x,y) = \overline{d(y,x)}, \text{ ou la "barre" - est une involution donnée de } V \text{ qui "préserve" l'ordre et "retourne" la loi de semi-groupe).}$$

La notion de contraction, application f telle que $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ pour tout x,y , (aussi appelée "non-expansive mapping") est étendue sans changement.

La considération d'espaces dont la métrique prend ses valeurs dans un semi-groupe ordonné n'est pas nouvelle (L.M. Blumenthal et K. Menger [4] consacrent un chapitre aux espaces à valeurs dans une algèbre de Boole) et a des origines et développements multiples (géométrie, théorie des catégories, logique, [4] [5] [6]).

L'origine ici est principalement dans l'observation, faite par A. Quilliot dans sa thèse [35], de l'analogie frappante entre les propriétés des ordres, des graphes et des espaces métriques vis à vis des rétractions (et accessoirement dans l'observation de l'analogie entre les notions de précompacité et de bel ordre). Le développement que je propose, est d'abord copié sur celui des espaces métriques classiques, particulièrement des abondants travaux sur la propriété du point fixe (cf. V. Istratescu [19] et R. Sine [42]). En effet les résultats de base sur les rétractions et la propriété du point fixe vis à vis des contractions s'étendent à ces nouveaux espaces métriques et se traduisent en anciens ou nouveaux résultats sur les ordres et les graphes. Par exemple, si on suppose que le semi-groupe \mathcal{V} est complet et, comme les réels, satisfait une condition de distributivité, on peut le munir d'une distance - pour laquelle il est hyperconvexe - et tout espace métrique s'envoie par une isométrie dans une de ses puissances. On a alors l'analogue du théorème de N. Aronszajn et P. Panitchpakdi [1] 1956 les rétracts absolus (par rapport aux isométries), les injectifs (toujours par rapport aux isométries), les hyperconvexes et les rétracts des puissances de \mathcal{V} coïncident (Théorème 1). Appliqué aux ordres et aux graphes ceci redonne aussi bien la caractérisation des rétracts absolus

d'ordres - par rapport aux plongements - due à B. Banaschewski et G. Bruns [3] 1967, que les récentes caractérisations des rétracts absolus de diverses catégories d'ordres et de graphes (variété engendrée par les zigzags, ou "fences", D. Misane et M. Pouzet, [27] 1984, variété engendrée par les chemins, R. Nowakowski et I. Rival [30] 1983, A. Quilliot [35] 1983), et donne une caractérisation des rétracts absolus de graphes équipés de la distance zig-zag introduite par A. Quilliot [36] 1983. Sous les mêmes conditions la construction de l'enveloppe injective d'un espace métrique, construction due à J.R. Isbell [18] 1965, s'étend à ces espaces (Théorème 2). Pour les ordres ceci redonne la complétion de MacNeille [26] (1933). Pour les graphes, équipés de la distance graphique, ceci exprime que tout graphe a une extension isométrique, rétract d'un produit de chemin, qui est minimale. (résultat obtenu indépendamment par E. Pesch [31] 1984). De même, le théorème de R. Sine [41] 1979 et P.M. Soardi [44] 1979, d'après lequel toute contraction d'un hyperconvexe borné a un point fixe, s'étend à ces espaces (une fois la notion d'espace borné définie de façon appropriée) (Théorème 4). Pour les ordres c'est le fameux théorème du point fixe de A. Tarski [45] 1955. Réciproquement on peut développer dans ce cadre l'étude des lacunes et des applications préservant les lacunes, initiée par I. Rival et ses collaborateurs d'abord pour les ordres puis pour les graphes. Faisant ainsi on obtient que les rétracts absolus et les injectifs - pour les applications préservant les lacunes - coïncident et forment une variété, et aussi que tout espace "métrique" s'envoie dans l'un deux par une application préservant les lacunes. (Théorème 3). Dans le cas des ordres ces rétracts absolus sont les ensembles ordonnés ayant la propriété dite de sélection, introduite par I. Rival et R. Wille [39] pour les treillis et étendu aux ordres par P. Nevermann et R. Wille [28].

On peut évidemment développer dans ce cadre les notions de convergence. J'indiquerai seulement que la notion bien connue de précompacité et celle de belordre, due à G. Higman [17] 1952, sont identiques et que leur caractérisation est une reformulation du théorème de F.P. Ramsey [37] 1930.

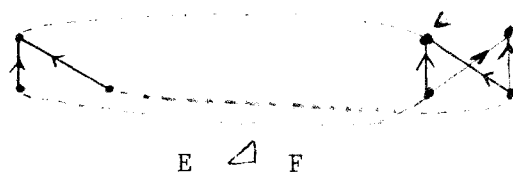
Cette approche métrique a été développée d'abord avec E. Jawhari [21] 1983 puis D. Misane [27] 1984. Les résultats présentés ici reprennent et améliorent ceux alors obtenus. L'article est basé sur le contenu d'exposés faits à Bielefeld (Novembre 1983) [34] et Calgary (Janvier 1984). Les preuves seront publiées ultérieurement.

Je remercie avec grand plaisir I. Rival, qui m'a introduit à ce sujet, pour les stimulantes discussions que nous avons eu pendant ces trois dernières années.

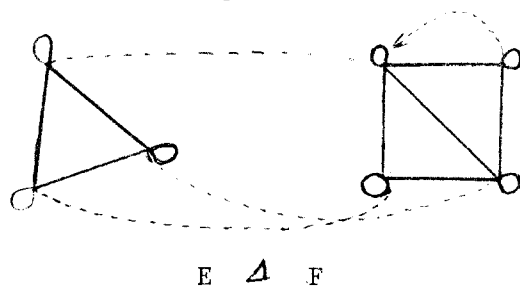
II. Rétraction.

La rétraction est une notion catégorique qui requiert des objets et des morphismes. Etant donnés deux objets E et F l'objet E est dit rétract de F , et on note $E \triangleleft F$, s'il existe des morphismes $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ tels que $g \circ f = 1_E$.

Exemples : 1) Prenons pour objets les ensembles ordonnés et pour morphismes les applications croissantes (c'est-à-dire les $f : E \rightarrow F$ etls que $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$) nous avons l'exemple suivant :



2) Prenons pour objets les graphes réflexifs (relations binaires réflexives et symétriques) et pour morphismes les applications préservant les arêtes, nous avons l'exemple suivant :



La question centrale concernant la rétraction est de décider si, étant donnés deux objets E et F , E est ou non rétract de F , et en particulier de décider si pour un morphisme donné $f : E \rightarrow F$ il existe un $g : F \rightarrow E$ tel que $g \circ f = 1_E$.

On appelle corétractions les f ayant cette propriété (mais c'est loin d'une réponse à la question !).

Une approche de la solution consiste à identifier d'abord une propriété générale, disons (\mathcal{P}) , possédée par les corétractions - par exemple on peut observer que dans le cas des ensembles ordonnés les corétractions sont des plongements (c'est-à-dire des f satisfaisant $x \leq y$ ssi $f(x) \leq f(y)$) - et considérant les morphismes ayant la propriété (\mathcal{P}) comme des approximations

des corétractions, à caractériser les E pour lesquels cette approximation est adéquate, c'est-à-dire pour lesquels tous les morphismes issus de E et possédant la propriété (\mathcal{F}^0) sont des corétractions.

Ce sont ces E qu'on appelle rétracts absolus (A.R). Ils dépendent évidemment de l'approximation \mathcal{F}^0 (cette terminologie en usage n'est donc pas des plus appropriées) et si on change (\mathcal{F}^0) par une "meilleure" approximation on obtient une classe plus large de rétracts absolus.

La raison de cette approche est double. En premier lieu on sait dans bien des cas décrire les rétracts absolus et donc pour eux répondre à la question d'origine. En second lieu, et surtout, ces rétracts absolus fournissent de bons candidats à la propriété du point fixe (fpp). Précisons : pour une infinité de raisons, que je n'évoquerai pas, on s'intéresse aux E tels que tout morphisme $f : E \rightarrow E$ a un point fixe, c'est-à-dire un x tel que $f(x) = x$, et on dit que ces E ont la propriété du point fixe (fpp). Il est tout à fait trivial que si E a la (fpp), ses rétracts l'ont aussi. C'est trivial mais important, il s'ensuit en effet que un AR a la (fpp) dès qu'au moins un objet dans lequel il s'envoie par une approximation la possède. Fait qui ne manquera pas de se produire si beaucoup d'objets dans la catégorie ont la (fpp).

Ceci me paraît pleinement illustré par les deux résultats suivants.

II.1 THEOREME (B. Banaschewski - G. Bruns [3]).

Soit E un ensemble ordonné ; il y a équivalence entre

- (1) E est un rétract absolu (par rapport aux plongements).*
- (2) Pour tout ensemble ordonné F, toute application croissante $f : A \rightarrow E$ où A est une partie de F, s'étend à F tout entier.*
- (3) E est un treillis complet.*
- (4) E est rétract d'une puissance de la chaîne à deux éléments.*

II.2. THEOREME (A. Tarski [45]).

Toute application croissante d'un treillis complet dans lui-même a un point fixe.

Le théorème II.1 contient une caractérisation syntaxique des rétracts absolus : le (3), une description constructive : le (4), au moyen d'opérations

catégoriques simples (retracts et produits) et l'identification à la notion plus générale d'objet injectif: le (2), qu'on peut définir comme suit :

E est injectif si pour tout objet A , tout morphisme $f : A \rightarrow E$, toute approximation (mod. \mathcal{C}^{inj}) $g : A \rightarrow F$ il existe un morphisme $h : F \rightarrow E$ tel que $h \circ g = f$ comme l'indique le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 g \uparrow & & h \\
 A & \xrightarrow{f} & E
 \end{array}$$

Des caractérisations de cette nature abondent dans la littérature et je renvoie à l'article de synthèse de E.W. Kiss , L. Marki , P. Pröhle et W. Tholen , et à ses 600 références pour les exemples que je ne traiterai pas ici. Les résultats qui ces dernières années ont proliféré dans le domaine des ordres et des graphes ont presque tous cette même apparence. Peut être peut-on envisager un traitement catégorique les englobant tous. Celui que je propose s'inspire plutôt du résultat suivant, caractérisant les rétracts absolus parmi les espaces métriques, les morphismes étant les contractions (c'est-à-dire les f telles que $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ pour tout x,y) et les approximations les isométries.

II.3. THEOREME (N. Aronszajn et P. Panitchpakdi [1])

Soit E un espace métrique : il y a équivalence entre :

- (1) E est un rétract absolu (par rapport aux isométries)
- (2) Pour tout espace métrique F , toute application contractante $f : A \rightarrow E$ définie sur une partie de F s'étend en une contraction à F tout entier ;
- (3) E est hyperconvexe (ceci signifiant que l'intersection d'une famille de boules fermées $(B(x_i, r_i))_{i \in I}$ est non vide dès que $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ pour tout $i, j \in I$);
- (4) E est un rétract de l'espace $\ell^\infty(I)$ des suites bornées de réels (ceci pour un certain I).

On ne sera pas surpris, que cette caractérisation, semblable à celle du théorème II.1, soit, comme le laissent supposer nos commentaires précédents, accompagnée d'un théorème de point fixe. (On sera peut être plus surpris qu'il ait été découvert en 1979).

II.4. THEOREME. (R. Sine [41] et P.M. Soardi [44]).

Toute application contractante d'un hyperconvexe borné dans lui-même a un point fixe.

Les caractérisations des rétracts absolus de diverses catégories ont toutes un même air de famille. Ici cette ressemblance est si frappante qu'on peut se demander si elle tient à une parenté entre ensembles ordonnés et espaces métriques.

Si effectivement, comme nous allons le voir, on peut englober ensembles ordonnés et espaces métriques dans un même cadre, ce n'est pas la raison de la ressemblance entre ces résultats. La raison est dans la parenté entre applications croissantes et applications contractantes, et un cadre commun - comme celui que je propose - n'est qu'un moyen commode, parmi d'autres, d'exprimer cette parenté.

Observons en effet que les notions de rétract, de rétract absolu et de propriété du point fixe, ne dépendent que des morphismes (et le cas échéant des approximations), peut importe les structures sur lesquelles ils agissent. La parenté entre applications croissantes - les f telles que $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ - et applications contractantes - les f telles que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ - tient au caractère "binaire" de leurs définitions. Elle peut s'exprimer de deux façons : ces f sont les applications préservant des structures relationnelles binaires et, aussi bien, les contractions associées à certaines généralisations du concept d'espace métrique.

Pour le voir considérons d'une part les structures relationnelles binaires d'un type donné, avec pour morphismes les homomorphismes relationnels. C'est-à-dire considérons, pour un ensemble I fixé, les structures $R = (E, (R_i)_{i \in I})$ où chaque R_i est une relation binaire sur E , identifiée ici à une partie de $E \times E$; un homomorphisme de $R = (E, (R_i)_{i \in I})$ dans $R' = (E', (R'_i)_{i \in I})$ étant n'importe quelle $f : E \rightarrow E'$ telle que $(x, y) \in R_i$ implique $(f(x), f(y)) \in R'_i$ pour tous les $x, y \in E, i \in I$. Soit $\mathbb{V} = 2^I$ avec $2 = \{0, 1\}$, $0 < 1$: munissons \mathbb{V} de l'ordre produit $((x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I}$ si $x_i \leq y_i$ pour tout i). Si nous associons à chaque $R = (E, (R_i)_{i \in I})$ l'application $d_R : E \times E \rightarrow \mathbb{V}$ - définie par $d_R(x, y)(i) = 0$ si $(x, y) \in R_i$ et $d_R(x, y)(i) = 1$ si $(x, y) \notin R_i$ - alors $f : E \rightarrow E'$ est un homomorphisme relationnel de $R = (E, (R_i)_{i \in I})$ dans $R' = (E', (R'_i)_{i \in I})$ si et seulement si elle satisfait $d_{R'}(f(x), f(y)) \leq d_R(x, y)$ pour tous les x et y de E . On peut dire que ces applications sont contractantes.

Considérons d'autre part un ensemble ordonné \underline{V} et, ce que j'appellerai - faute d'un meilleur terme - les espaces binaires sur \underline{V} , c'est-à-dire les couples (E, d) formé d'un ensemble E et d'une application $d : E \times E \rightarrow \underline{V}$, et prenons pour morphismes entre deux tels espaces (E, d) , (E', d') les contractions - c'est-à-dire les $f : E \rightarrow E'$ satisfaisant, comme on s'en doute, $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$. Si nous prenons $I = \underline{V}$ et si nous associons à chaque (E, d) la structure relationnelle $R_d = (E, (R_i)_{i \in I})$ où $R_i = \{(x, y) / d(x, y) \leq i\}$ alors $f : E \rightarrow E'$ est une contraction de (E, d) dans (E', d') si et seulement si c'est un homomorphisme relationnel de R_d dans $R_{d'}$.

Ces observations, même si elles sont en définitive triviales, suggèrent que l'étude des contractions d'espaces métriques peut s'inspirer de techniques de théorie des relations (et on s'étonnera moins que des résultats sur la propriété du point fixe, et parmi les plus profonds, tels ceux de B. Maurey - cf. l'exposé de J. Elton, Pei-Kee Lin, E. Odell et S. Szarek [8] - utilisent l'ultraproduit). Elles suggèrent tout autant de s'inspirer des idées métriques pour étudier les homomorphismes relationnels. Bien entendu on peut trouver a priori un peu artificielle cette assimilation des espaces binaires à des espaces métriques, l'ensemble \underline{V} des valeurs, seulement ordonné, paraissant bien loin de la structure des réels. En fait, quitte à le changer par un autre, mais en gardant les mêmes contractions, on peut toujours lui supposer une structure de semi-groupe ordonné et supposer que les espaces binaires satisfont l'inégalité triangulaire. Et si cela peut prouver a contrario que la structure métrique est irrelevante dans l'étude des contractions, il me semble toutefois que les idées métriques constituent un bon support dans l'étude de la rétraction et du point fixe. C'est ce point de vue qui est illustré dans les sections suivantes.

III. Espaces métriques sur un semigroupe ordonné . Les principaux exemples.

III.1. DEFINITIONS DE BASE.

Considérons la structure \underline{V} consistant d'un ensemble V muni d'une relation d'ordre, notée \leq , d'une opération de semigroupe, notée $+$, et d'une involution, notée $-$, satisfaisant les propriétés suivantes.

1) \underline{V} est complet pour l'ordre donc a un plus petit et un plus grand éléments notés 0 et 1.

2) L'opération de semigroupe est compatible avec l'ordre, i.e. $p \leq p'$ et $q \leq q'$ impliquent $p+q \leq p'+q'$, et en outre 0 est son zéro.

3) L'involution préserve l'ordre (i.e. $p \leq q$ implique $\bar{p} \leq \bar{q}$) et renverse l'opération de semigroupe (i.e. $\overline{p+q} = \bar{q}+\bar{p}$).

Etant donné un ensemble E, une distance sur E est une application $d : E \times E \rightarrow \underline{V}$ satisfaisant :

d1) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

d2) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$,

d3) $d(x,y) = \overline{d(y,x)}$,

ceci pour tous les x,y,z de E..

J'appellerai espace métrique (sur \underline{V}) l'ensemble E équipé d'une telle distance et le noterai (E,d) ou de préférence E, utilisant autant que possible la même lettre d pour désigner toutes les distances. Cette définition n'est pas vide de sens : l'application $d : \underline{V} \times \underline{V} \rightarrow \underline{V}$ définie par $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = \bar{x}+y$ sinon est une distance et donc \underline{V} est "métrisable". Les autres notions primitives sont les suivantes :

Soient E un espace métrique, $x \in E$, $r \in \underline{V}$, la boule droite, (resp. gauche) de centre x et de rayon r est l'ensemble $B(x,r) = \{y \in E / d(x,y) \leq r\}$ resp. $\bar{B}(x,r) = \{y \in E / d(y,x) \leq r\}$. En raison de l'involution on a $\bar{B}(x,r) = B(x,\bar{r})$,

on peut donc se contenter de considérer seulement les boules droites. Soient E, E' deux espaces métriques; une application $f : E \rightarrow E'$ est contractante si ⁽¹⁾ $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ pour tous les x,y de E, ou de façon équivalente si $f(B(x,r)) \subseteq B(f(x),r)$ pour tous les x de E et r de \underline{V} . C'est une isométrie et son image un sous-espace isométrique de E si dans (1) l'égalité a lieu pour tous les x,y de E. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces métriques, chaque E_i équipé d'une distance notée ici d_i , leur produit, noté $\prod_{i \in J} E_i$, est le

produit cartésien muni de la distance "sup" (ou ℓ^∞) $d : E \times E \rightarrow \underline{V}$ définie par $d((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \text{Sup} \{d_i(x_i, y_i) / i \in I\}$. On voit aisément

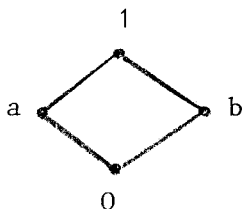
que c'est le produit direct dans la catégorie \mathcal{M}_V des espaces métriques sur V ayant pour morphismes les contractions. La supposition que V est complet pour l'ordre est faite pour assurer l'existence de tels produits. Voici les exemples.

III.2. ESPACES METRIQUES REELS.

Prenons $V = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, étendons d'une façon évidente l'addition et prenons pour involution l'identité. Les espaces que nous obtenons sont simplement des réunions disjointes d'espaces métriques usuels.

III.3. ENSEMBLES ORDONNES.

Prenons pour V le treillis complet sur quatre éléments $\{0, a, b, 1\}$, avec a incomparable à b , représenté ci-dessous :



L'opération de semi-groupe est le supremum : $x+y = x \vee y$. L'involution échange a et b et fixe 0 et 1 .

Si P est un ensemble ordonné, l'application $d : P \times P \rightarrow V$ définie par :
 $d(x,y) = 0$ si $x=y$, $d(x,y) = a$ si $x < y$, $d(y,x) = b$ si $y < x$ et enfin
 $d(x,y) = 1$ si x est incomparable à y , est une distance. Réciproquement si E est un espace métrique sur V alors la relation $x \preceq y$ définie par $d(x,y) \preceq a$ est un ordre. Les applications contractantes sont les applications croissantes, les isométries sont les plongements d'ordre. Le produit d'espaces métriques correspond au produit cartésien d'ensemble ordonné.

III.4. GRAPHES.

Classiquement un graphe G consiste en la donnée d'un ensemble de sommets et d'arêtes, dénotés ici respectivement E et ε . Tous les graphes considérés ici auront un boucle à chaque sommets et seront identifiés à des relations binaires réflexives.

III.4.1. Graphes non orientés

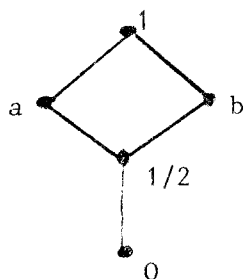
Prenons $V = \{0, 1/2, 1\}$ avec pour ordre $0 < 1/2 < 1$, pour opération de semi-groupe la somme tronquée :

$x \oplus y = \text{Max} \{ x + y, 1 \}$, et pour involution l'identité. Si $G = (E, \varepsilon)$ est un graphe non orienté, c'est-à-dire si ε est réflexive et symétrique l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{V}$ - définie par $d(x,y) = 0$ si $x = y$, $d(x,y) = \frac{1}{2}$ si $(x,y) \in \varepsilon$ avec $x \neq y$ et enfin, $d(x,y) = 1$ si $(x,y) \notin \varepsilon$ - est une distance. Réciproquement si E est un espace métrique sur \mathbb{V} alors en prenant $\varepsilon_{1/2} = \{ (x,y) / d(x,y) < \frac{1}{2} \}$ on obtient le graphe non orienté $G = (E, \varepsilon_{1/2})$.

Ici encore les applications contractantes sont les applications préservant les arêtes des graphes (telles que l'image d'une arête est une arête ou une boucle), les isométries sont les plongements, et le produit correspond au produit relationnel (deux éléments $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ d'un produit $\prod G_i$; sont liés par une arête si pour chaque i , x_i et y_i sont liés).

III.4.2. Graphes orientés.

Prenons pour \mathbb{V} l'ensemble à cinq éléments $\{0, 1/2, a, b, 1\}$. Prenons pour ordre $0 < \frac{1}{2} < a, b < 1$ avec a incomparable à b . Prenons pour opération de semi-groupe $x+y = 1$ si $x, y \geq \frac{1}{2}$ et $x+y = \text{Max}\{x, y\}$ sinon. Enfin prenons pour involution l'application qui échange a et b et fixe $0, \frac{1}{2}, 1$. Si $G = (E, \varepsilon)$ est un graphe orienté, c'est-à-dire si ε est réflexive (et pas nécessairement symétrique) définissons $d : E \times E \rightarrow \mathbb{V}$ en prenant $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et, si $x \neq y$, en prenant $d(x,y)$ égal à $\frac{1}{2}, a, b, 1$ suivant que (x,y) appartient à $\varepsilon \cap \varepsilon^{-1}, \varepsilon \setminus \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1} \setminus \varepsilon, E \times E \setminus \varepsilon \cup \varepsilon^{-1}$. C'est une distance. Réciproquement si $d : E \times E \rightarrow \mathbb{V}$ est une distance alors en prenant



$\varepsilon_a = \{ (x,y) \in E \times E / d(x,y) < a \}$ on obtient le

graphe orienté $G = (E, \varepsilon_a)$. Les applications contractantes correspondent aux applications préservant les arêtes et les isométries aux plongements. Le produit est encore le produit relationnel.

Même si cette façon de traiter les ordres est inattendue, ces exemples sont trop artificiels et triviaux pour justifier à eux seuls cette approche métrique

On peut munir les ordres et les graphes d'autres distances, celles-ci de nature réellement métrique puisque prenant en compte les chemins joignant les points dans les ordres ou les graphes. Je les introduis ci-dessous en commençant par la distance graphique bien connue.

III.5. DISTANCE ZIGZAG SUR LES GRAPHE ET LES ORDRES.

5.1. Distance graphique

Prenons V égal à $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. L'ordre et l'addition sont étendus d'une manière évidente à \underline{V} ; l'involution est l'identité. Si $G = (E, \varepsilon)$ est un graphe non orienté et x, y sont deux sommets de G , la distance graphique $d_G(x, y)$ est la longueur du plus court chemin joignant x à y , c'est-à-dire formellement :

$$d_G(x, y) = \text{Inf} \{ n / \text{il existe } n \in \mathbb{N}, x_0, x_1, \dots, x_n \text{ dans } E \text{ tels que } x_0 = x, x_n = y \text{ et } (x_i, x_{i+1}) \in \varepsilon \text{ pour tout } i = 0, \dots, n \}$$
 (en particulier $d(x, y) = +\infty$ si aucun chemin ne joint x à y). Si $G = (E, \varepsilon)$ et $G' = (E', \varepsilon')$ sont deux tels graphes une application $f : E \rightarrow E'$ préserve les arêtes si et seulement si elle est contractante. Donc la catégorie des graphes est une sous catégorie pleine de celle des espaces métriques sur \underline{V} , en particulier la distance graphique d'un produit (relationnel) de graphes est la distance "sup" des distances graphiques de ces graphes. Une distance d sur E est la distance d_G d'un graphe G si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

Pour tout $x, y \in E$, $p, q \in \underline{V}$, si $d(x, y) \leq p+q$ alors il existe un $z \in E$ tel que $d(x, z) \leq p$ et $d(z, y) \leq q$.

Cette propriété est bien étudiée dans le cadre des espaces métriques classiques. Nous allons la retrouver plusieurs fois. Nous lui garderons le nom de convexité donné par l'usage (bien qu'il s'agisse de connexité).

5.2. Semigroupe des zigzags.

Pour étendre la notion de distance graphique à un graphe orienté et particulièrement à un ensemble ordonné, on étend la notion de chemin en celle de zigzag : Un graphe orienté $Z = (E', \varepsilon')$ est un zigzag - d'extrémités x, y - si le graphe non orienté $Z^S = (E', \varepsilon' \cup \varepsilon'^{-1})$ est un chemin - d'extrémité x, y - (je rappelle qu'un graphe $C = (E'', \varepsilon'')$ est un chemin, d'extrémités x, y , si on peut énumérer ses sommets en une suite $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ de sorte que $\varepsilon'' = \{(x_i, x_{i+1}) / i = 0, \dots, n\}$). Si pour deux sommets x, y d'un graphe $G = (E, \varepsilon)$ on prend pour distance de x à y la longueur du plus court zigzag Z , sous graphe de G et d'extrémités x et y , on ne fait que retrouver la distance graphique du graphe non orienté $G^S = (E, \varepsilon \cup \varepsilon^{-1})$. Pour éviter de perdre autant d'information sur G , il faut prendre en compte tous les zigzags joignant x à y .

Pour les comparer à ceux joignants deux autres sommets x' et y' , l'idée est de les coder par des mots et de définir la distance $d_G(x,y)$ comme l'ensemble des codes des zigzags d'extrémités x et y .

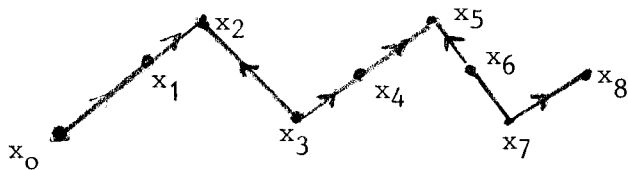
L'ensemble \underline{V} des valeurs de cette distance est défini comme suit :

Soit A "l'alphabet" formé des lettres a et b et soit A^* l'ensemble des "mots" finis $r = r_0 \cdot r_1 \dots r_{n-1}$, écrits avec les lettres a et b , ceci incluant le mot vide \square (donc $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$). Ordonnons A^* avec l'ordre de Higman :

Etant donnés deux mots $r = r_0 \dots r_{n-1}$ et $s = s_0 \dots s_{m-1}$ on a $r \leq s$ si on peut trouver des entiers $0 < j_0 < \dots < j_{n-1} < m-1$ tels que $r_0 = s_{j_0}, \dots, r_{n-1} = s_{j_{n-1}}$ c'est-à-dire si en effaçant des lettres du mot s on obtient le mot r . Muni de cet ordre et de l'opération de concaténation des mots - le concaténat $r+s$ de deux mots $r=r_0 \dots r_{n-1}$ et $s = s_0 \dots s_{m-1}$ est le mot $r_0 \dots r_{n-1} s_0 \dots s_{m-1}$ - l'ensemble A^* est un semigroupe ordonné, le mot vide \square est à la fois le plus petit élément pour l'ordre et le zéro de la loi de semigroupe. L'involution "-" qui échange a et b s'étend à A^* de sorte que $\overline{r+s} = \overline{s} + \overline{r}$ (donc pour tout mot $r=r_0 \dots r_{n-1}$ on a $\overline{r} = \overline{r}_{n-1} \dots \overline{r}_0$). Si on excepte le fait que A^* ainsi ordonné n'est pas complet, il a toutes les propriétés requises pour être l'ensemble des valeurs \underline{V} d'une métrique. Pour disposer d'un treillis complet il suffit de prendre pour \underline{V} l'ensemble $F(A^*)$ des sections finales de \underline{V} (sous ensembles F de A^* tels que $r \in F$ et $r \leq s$ impliquent $s \in F$) ordonné par l'inverse de l'inclusion soit \supseteq . Dans ce treillis complet les infima et suprema correspondent respectivement aux réunions et intersections, le plus petit élément est A^* , le plus grand \emptyset , je continuerais à les désigner par 0 et 1 . La loi de semigroupe et l'involution définies sur A^* s'étendent directement à \underline{V} en posant $p+q = \{r+s / r \in p, s \in q\}$ et $p = \{\overline{r} / r \in p\}$ pour tout $p, q \in \underline{V}$. Ce faisant on obtient un semi groupe ordonné - que j'appellerai le semi groupe des zigzags - satisfaisant les conditions énoncées en III 1, et on peut représenter A^* dans \underline{V} en associant à chaque $r \in A^*$ l'ensemble $[r] = \{s \in A^* / r \leq s\}$.

5.3. Distance zigzag sur un graphe orienté.

Soit $G = (E, \varepsilon)$ un graphe orienté. Si on code chaque zigzag de (G, ε) par un seul mot, par exemple en associant au zigzag x_0, x_8 représenté ci-après



le mot aabaabba et si on définit

la distance entre deux sommets x et y de G comme l'ensemble des codes des zigzags d'extrémités x et y qui sont sous graphes de G on a une petite difficulté : cet ensemble n'est pas une section finale. Elle tient au fait que les zigzags sont des graphes et non pas des suites de sommets et d'arêtes, dans lesquelles la répétition d'un même sommet est permise. L'idée du codage est alors mise en oeuvre comme suit :

Un zigzag valué de x_0 à x_m est une suite $(x_0, \dots, x_m; r_0 \dots r_{m-1})$ telle que $x_0, \dots, x_m \in E$, $r_0 \dots r_{m-1} \in A^*$ et $(x_i, x_{i+1}) \in \varepsilon$ si $r_i = a$, $(x_{i+1}, x_i) \in \varepsilon$ si $r_i = b$ pour tout $i = 0 \dots m-1$ (si $m = \square$ c'est la suite (x_0, \square)). On définit

$d_G : E \times E \rightarrow \underline{V}$ en posant :

$d_G(x, y) = \{ r_0 \dots r_{m-1} / (x_0 \dots x_m : r_0 \dots r_{m-1}) \text{ est un zigzag d'extrémités } x \text{ et } y \}$. Cette application qui satisfait d1) d2) d3) est la distance zigzag.

Le graphe peut être reconstruit à partir de cette distance une fois observée que $(x, y) \in \varepsilon$ si et seulement si $d_G(x, y) \leq [a]$. Par conséquent les contractions sont encore les applications préservant les arêtes et les isométries sont les plongements. Réciproquement si $d : E \times E \rightarrow \underline{V}$ est une distance alors d est de la forme d_G si et seulement si elle satisfait la propriété suivante :

Pour tout $x, y \in E$, $r, s \in A^*$, si $r+s \in d(x, y)$ alors il existe $z \in E$ tel que $r \in d(x, z)$ et $s \in d(z, y)$, qui est une forme affaiblie de la propriété de convexité rencontrée en 5.1.

Cette notion de distance généralise la distance graphique. En effet d'une part si G est un graphe non orienté alors la distance zigzag de x à y est l'ensemble $A^{\geq n}$ de tous les mots de longueur au moins n , où n est la longueur du plus court chemin joignant x à y . D'autre part l'ensemble $L = \{A^{\geq n} / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ définit une sous structure de \underline{V} , isomorphe à celle précédemment définie sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

La considération de sous structures de \underline{V} permet de prendre en compte d'autres classes de graphes, e.g. graphes antisymétriques avec $\underline{V} \setminus \{[a] \wedge [b]\}$, graphes w -convexes avec le complété de Mac Neille de A^* (cf. [27]) mais aussi les ensembles ordonnés.

Je vais traiter ceux-ci à part :

5.4. Distance zigzag sur les ensembles ordonnés

A cause de la transitivité les zigzags ont la forme suivante :



Ce sont les "fences" telles que introduites par I. Rival. Ceux-ci peuvent être codés par des mots dans lesquels les lettres a et b alternent.

L'espace des valeurs de la distance se simplifie alors comme suit : soit M l'ensemble des mots non vides alternés de a et b. L'ordre et l'involution sont inchangés, la loi de semi groupe est adaptée ainsi :

pour $r = r_0 \dots r_{n-1}$ et $s = s_0 \dots s_{m-1}$, $r+s$ est le mot $r_0 \dots r_{n-1} s_0 \dots s_{m-1}$ si $r_{n-1} \neq s_0$ et $r_0 \dots r_{n-1} s_1 \dots s_{m-1}$ sinon.

Soit $\underline{V} = (\underline{F}(M), \supseteq)$ l'ensemble des segments finaux de M ordonné par l'inverse de l'inclusion ; on lui étend comme en 5.2 la loi de semi-groupe et l'involution. Au contraire de 5.2 l'ordre est aisé à représenter (cf. figure ci-dessous).

Si P est un ensemble ordonné alors $d_p : P \times P \rightarrow \underline{V}$ est définie en posant

$$d_p(x,y) = \{r_0 \dots r_{m-1} \in M / (x_0, \dots, x_m; r_0 \dots r_{m-1}) \text{ est un zigzag valué, d'extrémités } x \text{ et } y\}$$

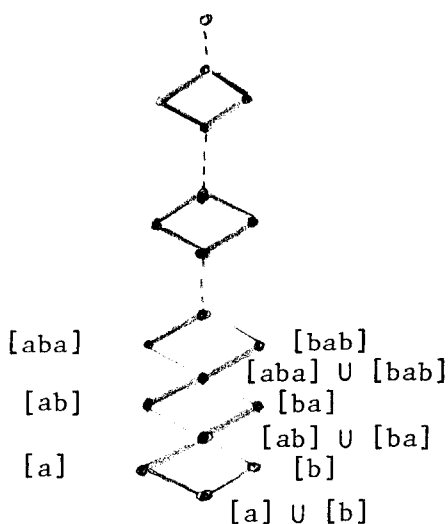
Puisque les ordres sont réflexifs $d_p(x,y)$ est bien un segment final de M ; ses éléments minimaux codent les fences de longueurs minimales joignant x à y .

Comme on peut le voir directement, d_p satisfait d1) d2) d3) et $x \leq y$ équivaut à $d_p(x,y) \leq [a]$. De même que pour les graphes, une distance $d : E \times E \rightarrow \underline{V}$ est

de la forme d_p si et seulement si elle satisfait la propriété :

Pour tout $x,y \in E$, $r,s \in M$, si $r+s \in d(x,y)$ alors il existe un $z \in E$ tel que $r \in d(x,z)$ et $s \in d(z,y)$. Comme précédemment, pour ces

espaces les contractions sont les applications croissantes, les isométries les plongements.



Ce sont là les exemples motivés par les recherches récentes sur les ordres et les graphes. Il y a en bien d'autres (e.g. [5], [32]).

NOTE : La définition pour un graphe ou pour un ordre de l'ensemble $d_G(x,y)$ des mots codant les zigzags (ou les "fences") joignant x à y est due à A. Quilliot [35],[36]. Notre présentation est toutefois différente puisque A. Quilliot ne considère pas de structure d'ordre sur les mots, donc ne définit pas le semi groupe ordonné \underline{V} et, a fortiori, ne définit pas, comme nous allons le faire, une structure de graphe, ou d'ordre, sur ce semi groupe.

IV. Rétracts absolus.

IV.1. RETRACTS ABSOLUS PAR RAPPORT AUX ISOMETRIES.

Soit \underline{V} satisfaisant les conditions énoncées en III.1. Dans la catégorie consistant des espaces métriques (à valeur dans \underline{V}) et des contractions, les corétractions sont des isométries. Considérant les isométries comme approximations des corétractions on a une notion de rétract absolu. Comme dans le cas des ensembles ordonnés ou des espaces métriques ordinaires la caractérisation de ces rétracts absolus passe par l'intermédiaire de la notion d'injectif.

Du fait que les contractions sont des homomorphismes relationnels l'injectivité se réduit à ceci :

IV.1.1. LEMME : *Un espace métrique E est injectif (par rapport aux isométries si et seulement si pour tout espace métrique F et toute partie propre A de F , toute contraction f de A dans E s'étend sur une contraction définie sur $A \cup \{x\}$ pour au moins un x de $F \setminus A$.*

En raison des axiomes satisfaits par les distances, cette propriété admet une traduction syntaxique, l'hyperconvexité, que nous empruntons à la théorie des espaces métriques réels

Un espace métrique E sur \underline{V} est hyperconvexe si l'intersection de toute famille de boules $B(x_i, r_i)$, ($x_i \in E, r_i \in \underline{V}, i \in I$) est non vide dès que $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ pour tout i, j . Ce qui équivaut à la conjonction des deux conditions suivantes :

H1) Convexité : pour tout $x, y \in E$, $p, q \in \underline{V}$ tels que $d(x, y) < p+q$ il existe $z \in E$ tel que $d(x, z) \leq p$ et $d(z, y) \leq q$. Cette condition, qui est en fait une condition de connexité, exprime que l'inégalité triangulaire est la meilleure possible.

H2) Propriété de 2-Helly : l'intersection de tout ensemble (ou , ce qui revient au même, de toute famille) de boules est non vide dès que les intersections des paires de boules sont non vides .

Si sur l'ensemble I , augmenté d'un élément i_∞ , nous définissons une distance en posant $d(i, j) = r_i + \bar{r}_j$ pour $i \neq j$ et $d(i, i_\infty) = r_i$, dire que l'application de I dans E qui à i associe x_i est contractante veut dire que $d(x_i, x_j) \leq r_i + \bar{r}_j$ pour tout i, j , et dire qu'elle se prolonge à i_∞ veut dire que l'intersection des boules $B(x_i, r_i)$ est non vide. Par conséquent :

IV.1.2. LEMME : Un espace métrique sur \underline{V} est injectif si et seulement si il est hyperconvexe.

Pour en dire plus je vais supposer que \underline{V} satisfait la condition de distributivité suivante :

$$\bigwedge_{\alpha \in A, \beta \in B} (p_\alpha + q_\beta) = \bigwedge_{\alpha \in A} p_\alpha + \bigwedge_{\beta \in B} q_\beta$$

ceci quelles soient les familles $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(q_\beta)_{\beta \in B}$ d'éléments de \underline{V} .

(En vertu de l'involution ceci équivaut à $\bigwedge_{\alpha \in A} p_\alpha + q = \bigwedge_{\alpha \in A} (p_\alpha + q)$ pour

tout p_α et tout q de \underline{V}) et je dirai que \underline{V} est Heyting (bien que pour être conforme à la terminologie en usage c'est \underline{V} muni de l'ordre opposé qui devrait être dénommé ainsi).

IV.1.3. PROPOSITION : Soit \underline{V} Heyting et $d : \underline{V} \times \underline{V} \rightarrow \underline{V}$ définie par

$$d_V(p, q) = \bigwedge \{ r / p \leq q + \bar{r} \text{ et } q \leq p + r \} . \text{ Alors}$$

- 1) d_V est une distance et \underline{V} équipé de cette distance est hyperconvexe ;
- 2) tout espace métrique sur \underline{V} s'envoie, par une isométrie, dans une puissance de l'espace \underline{V} .

IV.1.4. THEOREME 1 : Soit \underline{V} Heyting. Pour un espace métrique sur \underline{V} les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) E est un rétract absolu (par rapport aux isométries)
- 2) E est injectif (par rapport aux isométries)
- 3) E est hyperconvexe
- 4) E est rétract d'une puissance de \underline{V} .

La preuve est très simple :

1) \Rightarrow 4) D'après la proposition ci-dessus E se plonge dans une puissance de \underline{V} , puisque c'est un rétract absolu, il est rétract de cette puissance.

4) \Rightarrow 3) Les rétracts des produits d'injectifs sont injectifs (c'est de là que vient l'importance de la notion d'injectifs) or hyperconvexes et injectifs coïncident, donc les rétracts des puissances de \underline{V} sont hyperconvexes.

3) \Rightarrow 2) Lemme IV.1.2.

2) \Rightarrow 1) Tout injectif est trivialement un rétract absolu.

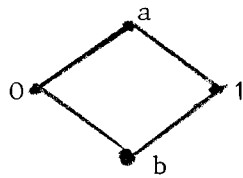
IV.2. EXEMPLES

Ce résultat donne une caractérisation des rétracts absolus de chacune des catégories d'espaces métriques énumérées précédemment. Illustrons le par les exemples suivants :

- Espaces métriques. Cette caractérisation est le théorème de N. ARONSZAJN et P. PANITCHPAKDI (Il y a naturellement cette petite différence que les rétracts des puissances de $[0, +\infty]$ remplacent les rétracts des espaces ℓ^∞ . Mais le fait qu'un espace métrique ordinaire s'envoie isométriquement dans un espace ℓ^∞ se déduit directement du fait qu'il s'envoie dans une puissance de $[0, +\infty]$).

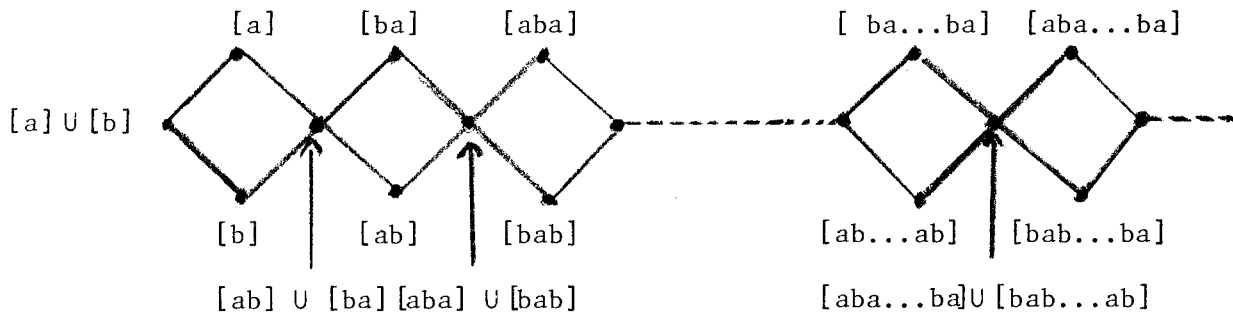
- Ensembles ordonnés 1) Pour $\underline{V} = a \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diamond \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \end{array} b$, les boules d'un espace métrique E sur \underline{V} sont l'ensemble E, les singletons de E, les segments initiaux et finaux principaux de E. L'espace est convexe s'il est filtrant supérieurement et inférieurement ; il a la propriété de 2-Helly si toute partie A a un supremum, respectivement un infimum, dès que chaque partie à deux éléments de A a un majorant, resp. un minorant. Par conséquent les hyperconvexes sont les treillis complets. La distance sur \underline{V} définit un ordre pour lequel b et a sont le premier

et dernier éléments de \tilde{V} et 0,1 sont incomparables :



ainsi \tilde{V} est isomorphe à 2×2 . La caractérisation précédente redonne donc le théorème de B. BANASCHEWSKI - G. BRUNS.

2) Pour $\tilde{V} = (F(M), \supseteq)$ cf. III.5 un espace E est hyperconvexe si sa distance est la distance zig-zag associée à un ordre et si la collection des boules $B(x, [r])$ ($x \in E, r \in M$) a la propriété de 2-Helly. En particulier la distance sur \tilde{V} vient de l'ensemble ordonné $P_{\tilde{V}}$ dont la structure est celle d'une double "fence" augmentée d'un point incomparable à tous les autres. Cet ensemble se représente comme suit :



Les "fences" étant hyperconvexes et la distance $d_p(x,y)$ mesurant la collection des "fences" joignant x à y , on peut trouver pour chaque ensemble ordonné P et chaque paire x,y , une fence F et deux applications croissantes f_1, f_2 de P dans F telles que $f_p(x,y) = d_F(f_1(x), f_1(y)) \vee d_F(f_2(x), f_2(y))$. Il s'ensuit les deux résultats ci-dessous, obtenus récemment avec D. MISANE [27].

IV.2.1. PROPOSITION : *Tout espace métrique sur \tilde{V} , et en particulier tout ensemble ordonné, s'envoie isométriquement dans un produit de fences, muni de la distance zigzag.*

IV.2.2. THEOREME : *Pour un ensemble ordonné P les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1) P est un rétract absolu (par rapport aux plongements isométriques) ;
- 2) P est injectif (par rapport aux plongements isométriques) ;

- 3) La collection des boules $B(x, [r])$ ($x \in P, r \in M$) a la propriété de 2-Helly ;
- 4) P est un rétract d'un produit de "fences".

- Graphes . 1) Pour $\mathbb{V} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ un espace E est hyperconvexe si sa distance est la distance d'un graphe réflexif non orienté et si, la collection des boules a la propriété de 2-Helly. La distance sur \mathbb{V} est celle associée au chemin infini augmenté d'un point à l'infini tel que représenté ci-dessous :



Dans ce cas on obtient deux résultats dus à R. NOWAKOWSKI et I. RIVAL [29] et indépendamment A. QUILLIOT [35] .

IV.2.3. PROPOSITION : *Tout espace métrique sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et en particulier tout graphe, se plonge isométriquement dans une puissance d'un chemin infini, ou ce qui revient au même, dans un produit de chemins finis, muni de la distance graphique.*

IV.2.4. THEOREME : *Pour un graphe réflexif non orienté G les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) G est un rétract absolu (par rapport aux isométries)
- 2) G est un injectif (par rapport aux isométries)
- 3) La collection des boules de G a la propriété de 2-Helly
- 4) G est un rétract d'un produit de chemin

2) Pour les graphes réflexifs orientés munis de la distance zigzag l'hyperconvexité se réduit encore à la propriété de 2-Helly. Le fait que la distance sur \mathbb{V} soit la distance zigzag d'un graphe $G_{\mathbb{V}}$ entraîne que les rétracts absolus et injectifs coïncident. Compte tenu de l'équivalence entre injectif et propriété de 2-Helly antérieurement observée par A. QUILLIOT [36] on a :

IV.2.5. THEOREME : *Dans la catégorie des graphes réflexifs orientés, les rétracts absolus (par rapport aux plongements isométriques), les injectifs (par rapport aux plongements isométriques), les graphes G dont la collection des boules*

$B(x, [r])$ ($x \in G, r \in \{a, b\}^*$) a la propriété de 2-Helly et les rétracts des puissances de G_{\vee} coïncident.

Si la définition du graphe G_{\vee} est particulièrement simple (p et q sont liés par une arête si $p \leq q + [b]$ et $q \leq p + [a]$), sa description reste à faire. Elle devrait être possible, puisqu'en raison du théorème de G. Higman [17] ce graphe est dénombrable. De toute façon il n'est pas sûr que la description d'une famille de graphes donnant, par produit et rétracts, tous les rétracts absolus, passe nécessairement par la description du graphe G_{\vee} . Avec D. MISANE (cf. [27]), considérant la classe des graphes W -connexes (graphes dont la distance prend ses valeurs dans le complété de Mac Neille de $\{a, b\}^*$) nous montrons que les rétracts absolus sont les rétracts des puissances de zigzag sans pour autant décrire la structure de graphe de ce complété (l'observation que l'espace des valeurs de la distance a une structure d'espace métrique hyperconvexe est d'ailleurs postérieure à ce résultat).

IV.3. ENVELOPPE INJECTIVE

Suivant (à peu de chose près) J.R. ISBELL [18] l'enveloppe injective d'un espace métrique E est tout espace injectif F qui étend isométriquement E et dont aucun sous-espace injectif propre ne contient E . De même que pour les espaces métriques ordinaires on a le

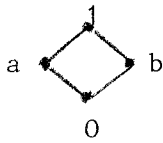
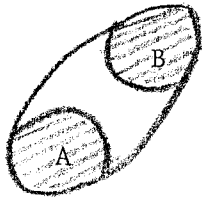
IV.3.1. THEOREME . Si \vee est Heyting alors tout espace métrique E a une enveloppe injective, et toutes les enveloppes injectives de E sont isomètres par des isométries qui laissent E invariant point par point,

L'enveloppe injective de E , qui est donc définie à une isométrie près, est le sous-espace $N(E)$ de \vee^E consistant des f minimales (dans l'ensemble ordonné \vee^E) telles que $d(x, y) \leq f(x) + \overline{f(y)}$ pour tout $x, y \in E$. Cet espace $N(E)$ peut être considéré comme extension isométrique de E , puisque l'application $\delta : E \rightarrow N(E)$ qui à x associe l'application $\delta(x) : E \rightarrow \vee$, définie en posant $\delta(x)(y) = d(y, x)$, est une isométrie.

Ce résultat s'applique à chacun des exemples considérés en III; Dans le cas des ensembles ordonnés, si on prend comme approximations les plongements, ceci redonne le résultat suivant:

IV.3.2. THEOREME (B. BANASCHEWSKI-G. BRUNS [3]). L'enveloppe injective d'un ensemble ordonné est sa complétion de MacNeille.

En effet une application $f : E \rightarrow \underline{V}$ est dans $\underline{N}(E)$ si et seulement si pour



$A = f^{-1}(a)$ et $B = f^{-1}(b)$ on a
 $A^+ = B$, $B^- = A$ et $f^{-1}(0) = A \cap B$
 (Ici A^+ est l'ensemble des majorants de A , B^- l'ensemble des minorants de B .
 B) Donc si $f^{-1}(0) = \emptyset$ le couple (A, B)

définit une "coupure". Enfin $d(f, f') \leq a$ signifie (avec des notations évidentes) $A \subseteq A'$ et $B' \subseteq B$, donc la distance sur $\underline{N}(E)$ redonne bien l'ordre sur les coupures.

IV. 4. RETRACTS ABSOLUS PAR RAPPORT AUX APPLICATIONS PRESERVANT LES LACUNES.

La définition de la notion de lacune ("hole") s'inspire directement de celle introduite, pour les graphes, par R. NOWAKOWSKI et I. RIVAL [30] et étudiée avec plus de détails en [15] [20].

Soit E un espace métrique sur \underline{V} . Une lacune est une application $h : E \rightarrow \underline{V}$ telle que l'intersection des boules $B(x, h(x))$ ($x \in E$) est vide. Etant donnés deux espaces métriques E et F et une contraction $f : E \rightarrow F$, l'image d'une application $h : E \rightarrow \underline{V}$ est l'application $h_f : F \rightarrow \underline{V}$ définie par $h_f(y) = \bigwedge \{h(x) / f(x) = y\}$. Si h est une lacune, elle est préservée par f si son image est encore une lacune.

Enfin f présERVE les lacunes si l'image de toute lacune est une lacune.

On voit aisément que les corétractions préservent les lacunes et que les applications préservant les lacunes sont des isométries. On peut donc considérer les applications préservant les lacunes comme des approximations des corétractions. Les rétracts absolus correspondants constituent une classe bien plus large que celle des hyperconvexes. Leur description reste à faire. Mentionnons comme résultat non trivial ceci :

IV. 4.1. THEOREME 3 : *Si \underline{V} est Heyting alors les rétracts absolus et les injectifs, par rapport aux applications préservant les lacunes, coïncident. En particulier ces espaces sont préservés par la formation des produits et des rétracts. De plus tout espace métrique s'envoie dans un rétract absolu par une application préservant les lacunes.*

Ce résultat s'obtient comme suit : à chaque espace métrique E on associe le sous espace $H(E)$ de \underline{V} consistant des $h : E \rightarrow \underline{V}$ telles que

- 1) $\bigcap \{ B(x, h(x)) / x \in E \} \neq \emptyset$
- 2) $d(x, y) \leq h(x) + h(y)$ et $h(x) \leq d(x, y) + h(y)$ pour tout x, y de E , ceci étant équivalent à la condition
- 2') $d(\bar{\delta}(x), h) = h(x)$ pour tout x de E .

on prouve que l'application $\bar{\delta}$ de E dans $H(E)$ (considérée précédemment) préserve les lacunes et que $H(E)$ est un rétract absolu. Puis on prouve que quels que soient les espaces F, G , la contraction $f : F \rightarrow E$ et l'application préservant les lacunes $g : F \rightarrow G$, il existe une contraction $\hat{f} : G \rightarrow H(E)$ telle que $\hat{f} \circ g = \bar{\delta} \circ f$:

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\quad} & G \\
 \downarrow f & & \downarrow \hat{f} \\
 E & \xrightarrow{\quad \bar{\delta} \quad} & H(E)
 \end{array}$$

La coïncidence entre rétracts absolus et injectifs en résulte.

L'espace $H(E)$ permet de tester si ou non E est un rétract absolu, en effet E est un rétract absolu si et seulement si il est rétract de $H(E)$; de plus $f : H(E) \rightarrow E$ est une rétraction (et $\bar{\delta}$ est la corétraction) si f est une contraction et si $f(h) \in \bigcap \{ B(x, h(x)) / x \in E \}$ pour tout $h \in H(E)$. Une telle application f est appelée une sélection. Lorsque existe une sélection c'est-à-dire lorsque E est un rétract absolu, on dit aussi qu'il a la propriété de sélection.

Par exemple dans le cas des ensembles ordonnés, si nous considérons les applications $h : E \rightarrow \underline{V} \setminus \{0\}$, une lacune est simplement une paire de sous-ensembles (A, B) de E telle qu'il n'y ait aucun élément x entre A et B . L'espace $H(E)$ est l'ensemble des paires (A, B) où A est un segment initial de E , B est un segment final de E , telles que $A^+ \cap B^- \neq \emptyset$. L'ordre sur $H(E)$, déduit de la distance est le suivant : $(A, B) \leq (A', B')$ dès que $A \subseteq A'$ et $B' \subseteq B$. Une sélection est une application croissante f de $H(E)$ dans E telle que $f(A, B) \in A^+ \cap B^-$ pour tout A, B .

Pour les ensembles ordonnés, l'espace $H(E)$ a été introduit par P. NEVERMANN et R. WILLE [28]. Les auteurs montrent que la propriété de sélection (qu'ils appellent propriété forte de sélection) est préservé par rétracts et produits et est équivalente à la propriété de rétract absolu. L'équivalence avec l'injectivité est nouvelle. Pour davantage de résultats voir par exemple [7], [33].

V. Propriété du point fixe.

V.1 PROPRIÉTÉ DU POINT FIXE POUR UNE FONCTION CONTRACTANTE.

Soit \underline{V} notre espace des valeurs (que nous ne supposons pas distributif). Un élément r de \underline{V} est auto-dual si $\bar{r} = r$, accessible si $r \leq u + \bar{u}$ pour au moins un u , $u \leq r$, et inaccessible sinon. Clairement 0 est inaccessible et tout élément inaccessible est auto-dual. Un espace métrique E sur V est borné s'il existe $x \in E$ $r \in \underline{V}$ tel que

- 1) $E = B(x, r)$
- 2) 0 est le seul élément inaccessible inférieur ou égal à r . D'une façon équivalente 0 est le seul élément inaccessible inférieur ou égal au diamètre $\underline{\delta}(E)$ de E (comme on peut le deviner $\underline{\delta}(E) = \bigvee \{d(x, y) / x, y \in E\}$).

V.1.1. LEMME : Soit E un espace hyperconvexe non vide et $f : E \rightarrow E$ une application contractante. Il existe un sous espace hyperconvexe non vide S tel que $f(S) \subseteq S$ et dont le diamètre $\underline{\delta}(S) = \bigvee \{d(x, y) / x, y \in S\}$ est inaccessible.

V. 1.2. THEOREME 4 : Si E est un espace hyperconvexe borné et non vide alors toute application contractante $f : E \rightarrow E$ a un point fixe.

V.2. EXEMPLES

V.2.1. Espaces métriques : Dans $\underline{V} = [0, +\infty]$ les éléments inaccessibles sont 0 et $+\infty$, donc la définition d'espace borné coïncide avec la définition usuelle et le théorème 4 est le théorème de R. SINE [41] et P.M. SOARDI [44].

V.2.2. Ensembles ordonnés : Dans $\underline{V} = \{0, a, b, 1\}$, 0 est le seul élément inaccessible et, donc tout ensemble ordonné est borné et le théorème 4 est le théorème de A. TARSKI [45].

Dans $\underline{V} = (F(M), \supseteq)$ les seuls éléments inaccessibles sont 0 et $+\infty$, le théorème 4 exprime que tout rétract d'une puissance d'une "fence" (finie) a la propriété du point fixe pour les applications croissantes.

V.2.3. Graphes : Dans $\underline{V} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ les éléments inaccessibles sont 0, 1 et $+\infty$. On n'a pas de théorème du point fixe, néanmoins d'après le lemme V.1.1., si G est un rétract d'une puissance d'un chemin fini alors pour toute application $f : G \rightarrow G$ préservant les arêtes il existe un sous graphe complet S de G tel que $f(S) \subseteq S$.

Dans $\underline{V} = (\underline{F}(\{a,b\}^*), \supseteq)$ les éléments inaccessibles sont 0 (c'est-à-dire $\{a,b\}^*$), 1 (c'est-à-dire \emptyset) et $[a] \wedge [b]$ (c'est-à-dire $\{a,b\}^* \setminus \{\emptyset\}$). Le lemme V.1.1. donne la même conclusion que ci-dessus pour les hyperconvexes bornés. Pour obtenir un théorème du point fixe il suffit de considérer les espaces hyperconvexes à valeurs dans $\underline{V} \setminus \{[a] \wedge [b]\}$ c'est-à-dire les graphes réflexifs et antisymétriques. On obtient alors que si G est un graphe réflexif antisymétrique tel que :

- 1) l'ensemble des boules $B(x, [r])$, $x \in G$, $r \in A^*$ a la propriété de 2-Helly,
- 2) chaque paire de sommets peut être connectée par un zigzag dont la longueur est bornée indépendamment de ces sommets, alors toute application contractante a un point fixe. Il vient en particulier que tout rétract d'une puissance d'un zigzag fini (donc d'une fence) a la propriété du point fixe.

V.3. PROPRIETE DU POINT FIXE POUR UN ENSEMBLE DE FONCTIONS QUI COMMUTENT.

A. TARSKI a obtenu un résultat meilleur que celui qu'on retient de lui, à savoir que tout ensemble G d'applications croissantes f d'un treillis complet P dans lui-même, qui commutent deux à deux, a un point fixe commun (c'est-à-dire qu'il existe un $x \in P$ tel que $f(x) = x$ pour toutes les f de G). J'ignore si ce résultat s'étend aux hyperconvexes bornés. Pire, la réponse ne semble même pas connue dans le cas des espaces métriques ordinaires. Ce type de question a pourtant un intérêt puisque pour diverses applications c'est d'un théorème de point fixe pour un ensemble de fonctions, plutôt que pour une seule fonction, dont on a besoin. (Comme exemple typique d'application de tels théorèmes mentionnons la preuve de l'existence d'une mesure de Haar). La réponse est positive lorsque l'ensemble G est dénombrable (malheureusement la plupart des semigroupes d'opérateurs intervenant dans les applications sont non dénombrables). De façon précise :

V. 3.1. PROPOSITION : *Soit E un hyperconvexe borné non vide et G un ensemble dénombrable de fonctions contractantes $f : G \rightarrow G$ qui commutent deux à deux : alors l'ensemble de leurs points fixes communs est un hyperconvexe non vide.*

Ce résultat découle du théorème 4 en observant d'abord, avec une nouvelle application de ce théorème, que l'ensemble des points fixes d'une contraction

est hyperconvexe puis en montrant, toujours à l'aide du théorème 4, que l'intersection d'une suite dénombrable décroissante d'hyperconvexes bornés non vides est un hyperconvexe non vide.

Le lecteur devine que pour se débarrasser de l'hypothèse de dénombrabilité sur G il suffit de montrer que l'intersection de tout ensemble totalement ordonné d'hyperconvexes bornés non vides est non vide. Hélas ceci revient exactement au problème d'origine, c'est-à-dire à l'existence d'un point fixe commun pour un ensemble de contractions qui commutent.

VI. Précompacité et belordre.

Tout le monde connaît la caractérisation des espaces précompacts au moyen de l'une des propriétés du théorème suivant :

VI.1. THEOREME *Pour un espace métrique E (sur les réels) les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *de toute suite d'éléments de E on peut extraire une suite de Cauchy,*
- 2) *Pour tout $\varepsilon > 0$ l'espace E peut être couvert par un nombre fini de boules fermées de rayon ε ,*
- 3) *Il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ et d'ensemble infini X de E tels que $d(x,y) > \varepsilon$ pour tout $x,y \in X$, $x \neq y$.*

La caractérisation des ensembles belordonnés au moyen des propriétés figurant dans le théorème suivant est de la même nature.

VI.2. THEOREME (G. HIGMAN [17]) : *Pour un ensemble ordonné P les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *de toute suite d'éléments de P on peut extraire une suite croissante ;*
- 2) *toute partie non vide a un nombre fini d'éléments minimaux ;*
- 3) *Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de P existent n et m avec $n < m$ et $x_n \leq x_m$;*
- 4) *P ne contient ni antichaine infinie ni chaîne infinie descendante.*

En fait ces deux théorèmes ne sont que deux versions d'un même résultat. Pour le voir considérons un ensemble ordonné \tilde{V} ayant un plus petit élément 0.

Choisissons un ensemble dénombrable filtrant inférieurement D ne contenant pas 0 et posons $U = \{p \in \underline{V} / u \leq p \text{ pour au moins un } u \in D\}$ alors U est un filtre ne contenant pas 0 . Soit (E, d) un espace binaire sur \underline{V} tel que $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$; une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est une U -suite de Cauchy (à droite) si pour tout $\varepsilon \in U$ il existe un entier n tel que $d(x_{n'}, x_{n''}) \leq \varepsilon$ pour tout $n \leq n' \leq n''$. Dans ce contexte le théorème VI.1. devient avec une preuve tout à fait banale :

VI .3. PROPOSITION : Pour un espace binaire E sur \underline{V} les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) de toute suite d'éléments de E on peut extraire une U -suite de Cauchy,
- 2) Pour tout $\varepsilon > 0$, tout ensemble non vide A de E peut être couvert par un nombre fini de boules (à droites) $B(x, \varepsilon) = \{y \in E / d(x, y) \leq \varepsilon\}$ dont les centres x appartiennent à A .
- 3) Pour tout $\varepsilon \in U$ et toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existent n, m avec $n < m$ et $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$.

Si nous considérons un ensemble ordonné P comme un espace métrique sur $\underline{V} = \{0, a, b, 1\}$ alors pour $D = \{a\}$ les suites de Cauchy sont les suites croissantes à partir d'un certain rang. La condition 2) de la proposition VI.3. signifie que tout ensemble non vide A contient un nombre fini d'éléments, soient a_1, \dots, a_n , tels que chaque a de A soit minoré par l'un d'eux. En conséquence cette proposition donne l'équivalence entre 1), 2) et 3) du théorème VI.2. L'implication 3) \Rightarrow 4) est triviale. La réciproque s'obtient par une autre application de la proposition VI.3. En effet soient $V = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $D = \{\frac{1}{2}\}$ et d la distance associée au graphe de comparabilité de P . Le fait que P n'a pas d'antichaine infinie est la condition 3) de VI.3. donc si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de P alors on peut en extraire une $\{\frac{1}{2}, 1\}$ -suite de Cauchy, mais puisque dans celle-ci tous les éléments sont comparables à partir d'un certain rang , et puisque P n'a pas de chaîne descendante infinie il s'ensuit que $x_n \leq x_m$ pour au moins un n et un m tels que $n < m$. Q.E.D.

Pour un graphe réflexif et symétrique G considéré comme espace métrique sur $\underline{V} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, la proposition VI.3 donne l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- 1) De toute suite infinie on peut extraire une suite infinie formée d'éléments deux à deux connectés.
- 2) Tout ensemble A de sommet contient un sous ensemble fini A' tel que tout a de A soit connecté à au moins un a' de A' .
- 3) Le graphe ne contient pas d'ensemble indépendant infini .

Le lecteur aura sans doute reconnu dans cet énoncé une forme équivalente du

VI.4. THEOREME DE RAMSEY : *Tout graphe infini contient soit un sous graphe complet infini soit un ensemble indépendant infini.*

Je ne prétends pas ici présenter, via la proposition VI.3, une généralisation du théorème de Ramsey (en fait cette proposition s'en déduit de façon presque immédiate) . Au contraire ce théorème de Ramsey me paraît contenir l'essence de la caractérisation de la précompacité. Mais je crois que cette connection entre espaces métriques, ordres et graphes, même si elle paraît triviale, éclaire certains développements dans ces domaines et suggère de nouvelles recherches. Par exemple la preuve du théorème de Ramsey par ultrafiltration découverte dans les années 50 ne fait que reprendre la preuve du théorème VI.1. au moyen des suites généralisées universelles (cf. J . KELLEY p. 198-199). La théorie des ensembles belordonnés est riche de nombreuses applications en combinatoire (cf. [25]). Des analogues des théorèmes de G. HIGMAN et J.B. KRUSKAL (cf. [25]) dans le contexte des espaces métriques seraient sûrement intéressants. Enfin je mentionnerai qu'on rencontre à la fois les notions de belordre et de précompacité dans l'étude des suites presque-périodiques. Cette coïncidence qui n'est sans doute pas accidentelle mériterait d'être éclaircie.

Bibliographie.

- [1] N. ARONSZAJN, P. PANITCHPAKDI, Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces. *Pacific J. Math.* 6 (1956), p. 405-439.
- [2] K. BACLAWSKI and A. BJORNER, Fixed points in partially ordered sets, *Advances in Mathematics*, 31 (1979), p. 263-287.
- [3] B. BANASCHEWSKI and G. BRUNS, Categorical characterization of the Mac Neille completion, *Archiv. der Math. Basel* 18 (1967), p. 369-377.
- [4] L.M. BLUMENTHAL, K. MENGER, *Studies in geometry 1970*, W.H. Freeman and Co. San Francisco.
- [5] U. CERRUTI and U. HOHLE, Categorical foundations of probabilistic microgeometry, *Séminaire de "Mathématique floue" LYON* (1983-1984) p. 189-246.
- [6] D. DUFFUS and I. RIVAL, A structure theory for ordered sets, *J. of Discrete Math.* 35 (1981), P. 53-118.
- [7] D. DUFFUS and M. POUZET, Representing ordered sets by chains, in : *Orders: Descriptions and Role* (M. Pouzet and D. Richard, eds). *Annals of Discrete Math.* 23 (1984) p. 81-98.
- [8] J. ELTON, PEI-KEE-LIN, E. ODELL and S. SZAREK, Remarks on the fixed point problem for non expansive maps in *Fixed Points and non expansive mappings* (Sine Ed.) *Contemporary Math.* Vol. 18, (1983), p. 87-120.
- [9] M. FRECHET, *Rend. Circ. Math. Palermo*, Vol. 22 (1906), p. 6.
- [10] M. FRECHET, *Les espaces abstraits*, Paris 1928.
- [11] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, Leipzig.
- [12] P. HELL, Absolute retracts of graphs, *Lecture notes 406* (1974)p. 291-301.
- [13] P. HELL, Graph retractions, *Atti dei convegni lincei* 17, *teorie combinatorie* (1976) p. 263-268.
- [14] P. HELL, *Rétractions de graphes*. PhD. Université de Montréal, Juin 1972, 148 pages.
- [15] P. HELL and I. RIVAL, Absolute retracts and varieties of reflexive graphs, preprint, 1983.
- [16] D. HIGGS, Injectivity in the topos of complete Heyting algebra valued sets, *Canadian J. Of Math.* 36 (1984) p. 550-568.
- [17] G. HIGMAN, Ordering by divisibility in abstract algebra, *Proc. London Math. Soc.* (3) 2 (1952) p. 326-336.

- [18] R. ISBELL, Six theorems about injective metric spaces, *Comment. Math. Helv.* 39 (1964) p. 65-76.
- [19] V.I. ISTRATESCU, Fixed point theory, an introduction. *Math. and its applications*, Vol. 7 (1981) D. Reidel.
- [20] E. JAWHARI, M. POUZET, I. RIVAL, A classification of reflexive graphs : The use of "holes". *Rapport de recherche du Laboratoire d'Algèbre ordinale et algorithmique*, Lyon (1983). To appear in *Canadian J. of Math.*
- [21] E. JAWHARI, Les rétractions dans les graphes. Applications et généralisations, Thèse de 3ème cycle, n° 1318 (Juillet 1983). Lyon.
- [22] J.L. KELLEY, *General Topology*, (1955), Van Nostrand.
- [23] W. A. KIRK, Fixed point theory for non expansive mapping, *Lecture notes in math.*, 886 (1981) p. 484-505.
- [24] E.W. KISS, L. MARKI, P. PROHLE and W. THOLEN, Categorical algebraic properties. A compendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residual smallness, and injectivity, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 18 (1983), p. 79-141.
- [25] J.B. KRUSKAL, The theory of well quasi ordering : a frequently discovered concept, *J. Comb. Th. (A)* 13, p. 197-305/
- [26] H. MACNEILLE, Partially ordered sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 42 (1937) p. 416-460.
- [27] D. MISANE, Retracts absolus d'ensembles ordonnés et de graphes. Propriété du point fixe. Thèse de doctorat de 3ème cycle, n° 1571 (Septembre 1984), Lyon.
- [28] P. NEVERMANN and R. WILLE, The strong selection property and ordered sets of finite length, *Alg. Univ.* 18 (1984) p. 18-28.
- [29] R. NOWAKOWSKI and I. RIVAL, A fixed edge theorem for graphs with loops. *J. Graph theory* 3 (1979) p. 339-350.
- [30] R. NOWAKOWSKI and I. RIVAL, The smallest graph variety containing all paths, *J. of Discrete Math.* 43 (1983) p. 223-234.
- [31] E. PESH, Minimal extension of graphs to absolute retracts, preprint n° 839, July 1984. Technische Hochschule Darmstadt.
- [32] M. PONS VALLES, Contribucio a l'estudi d'estructures uniformes sobre conjunts ordenats, Thesis (1984), Barcelona.
- [33] M. POUZET, I. RIVAL, Every countable lattice is a retract of a direct product of chains, *Alg. Univ.* 18 (1984) p. 295-307.
- [34] M. POUZET, Retracts, recent and old results on graphs, ordered sets and metric spaces. Circulating manuscript, 29 pages, Nov. 1983.

- [35] A. QUILLIOT, Homomorphismes, points fixes, rétractions et jeux de poursuite dans les graphes, les ensembles ordonnés et les espaces métriques. Thèse de doctorat d'Etat, Univ. Paris VI (1983).
- [36] A. QUILLIOT, An application of the Helly property to the partially ordered sets, J. Comb. Theory, série A, 35 (1983) p. 185-198.
- [37] F.P. RAMSEY, On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. 30, p. 264-286.
- [38] I. RIVAL, A fixed point theorem for finite partially ordered sets, J. of Comb. theory (1976) p. 309-318.
- [39] I. RIVAL, R. WILLE, The smallest order variety containing all chains, Discrete Math., 35, p. 203-212.
- [40] Z. SEMADENI, Banach spaces of continuous functions, Vol. I. Monografie Matematyczne, Warszawa (1971).
- [41] R. SINE, On non linear contractions in Sup. norm. spaces. Non linear analysis , TMA, 3 (1979) p. 885-890.
- [42] R. SINE, Fixed points and non expansive mappings (R. Sine ed.) Contemporary Math. Vol. 18. AMS.
- [43] D.R. SMART, Fixed point theorems, Cambridge tracts in Math. 66 (1974) Cambridge University Press.
- [44] P.M. SOARDI, Existence of fixed points of non expansive mappings in certain banach lattices, Proc. A.M.S. (1979) p. 25-29.
- [45] A. TARSKI, A lattice theoretical fixed point theorem and its applications. Pacific J. Math. 5 (1955) , p. 285-309.

Maurice POUZET
 Université Claude Bernard (Lyon I)
 Département de Mathématiques
 43, boulevard du 11 novembre 1918
 69622 VILLEURBANNE Cedex (France)