PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

WILLIAM HABRE

Continuité des caractères des algèbres localement multiplicativement convexes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 1A
, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___1A_A1_0>

CONTINUITE DES CARACTERES DES ALGEBRES LOCALEMENT MULTIPLICATIVEMENT CONVEXES

Par
William HABRE

Le problème de la continuité des caractères des algèbres commutatives localement multiplicativement convexes de Fréchet a été posé par Michael dans [5] et repris par Akkar dans [1]. Nous proposons une solution dans le cas des algèbres de fonctions, ce qui conduit à des conséquences importantes pour les algèbres qui se ramènent à celles-ci.

§ 1. ALGEBRES DE FONCTIONS.

1.1. Préliminaires et notations :

On désigne par T un espace complètement régulier séparé, par $C(T)$ l'algèbre des fonctions continues et à valeurs réelles sur T et par $C^{\infty}(T)$ la sous-algèbre de $C(T)$ formée des fonctions continues et bornées sur T. On note βT le compactifié de Stone-Čech de T et υT son repleté de Hewitt ; T est dit replet si $T = \upsilon T$. Soient $\mathscr{P}$ une famille des parties de T, filtrante croissante et recouvrant T. Pour tous $P \in \mathscr{P}$ et $f \in C(T)$, on note $\|f\|_P = \sup\{|f(t)| \ ; \ t \in P\}$. Une partie A de T est dite bornée si $\|f\|_A < +\infty$. On note $\mathscr{B}$ la famille des parties bornées de T, $\mathscr{K}$ la famille des compacts de T et $T'' = \cup \{\bar{A}^{\upsilon}, A \in \mathscr{B}\}$.

Soit $C^{\mathscr{P}}(T) = \{f \in C(T) \ ; \ \|f\|_P < +\infty \ \forall P \in \mathscr{P}\}$. Evidemment $C^{\mathscr{P}}(T)$ est une sous-algèbre de $C(T)$, contenant $C^{\infty}(T)$. On note, $t_{\mathscr{P}}$ la topologie sur $C^{\mathscr{P}}(T)$ définie par le système des semi-normes $\{\|\cdot\|_P \ ; \ P \in \mathscr{P}\}$, $\upsilon_{\mathscr{P}} T = \cup \{\bar{P}^{\beta} \ ; \ P \in \mathscr{P}\}$ et $\hat{T}^{\mathscr{P}}$ le complété de T pour la structure uniforme $\mathscr{U}_{\mathscr{P}}$ sur T définie par $C^{\mathscr{P}}(T)$, c'est à dire l'espace des formes linéaires multiplicatives et non nulles de $C^{\mathscr{P}}(T)$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie définie par $\mathscr{U}_{\mathscr{P}}$.

PROPOSITION 1.2.

L'espace $\hat{T}^{\mathscr{P}}$, muni de la topologie induite par $\mathscr{U}_{\mathscr{P}}$, est replet.

PREUVE.

C'est une conséquence immédiate du lemme bien connu suivant:

LEMME 1.3.

Un espace complétement régulier séparé est replet si et seulement s'il est homéomorphe à un sous-espace fermé d'un produit cartésien.

PROPOSITION 1.4.

Le sous-espace $\upsilon_{\mathscr{P}}T$ de βT est l'ensemble des caractères continus de $C^{\mathscr{P}}(T)$, pour la topologie $t_{\mathscr{P}}$.

PREUVE.

Si u est un caractère continue de $C^{\mathscr{P}}(T)$, alors il existe $P_0 \in \mathscr{P}$ tel que $|u(f)| \leq \|f\|_{P_0}$, $\forall$ $f \in C^{\infty}(T)$. Il en résulte que $u_0 \in \bar{P}_0^{\beta}$.
La réciproque est triviale.

Pour tout $f \in C^{\mathscr{P}}(T)$, on désigne par $\bar{f}$ l'application de $\upsilon_{\mathscr{P}}T$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\bar{f}(u) = u(f)$ et on note $t_{\bar{\mathscr{P}}}$, la topologie sur $C(\upsilon_{\mathscr{P}}T)$ définie par le système de semi-normes $\{\|\cdot\|_{\bar{P}}\ ;\ P \in \mathscr{P}\}$. La proposition suivante est immédiate [4] :

PROPOSITION 1.5.

L'application $f \longrightarrow \bar{f}$ de $C^{\mathscr{P}}(T)$ dans $C(\upsilon_{\mathscr{P}}T)$ et l'application de restriction de $C(\upsilon_{\mathscr{P}}T)$ dans $C^{\mathscr{P}}(T)$ sont deux isomorphismes algèbriques et topologiques réciproques l'une de l'autre.

THEOREME 1.6.

Pour que tout caractère de l'algèbre $C^{\mathscr{P}}(T)$ soit $t_{\mathscr{P}}$-continu, il faut et il suffit que $\upsilon_{\mathscr{P}}T$ soit replet.

PREUVE.

C.N. Si tout caractère de $C^{\mathscr{P}}(T)$ est $t_{\mathscr{P}}$-continu, alors $\hat{T}^{\mathscr{P}} \doteq \upsilon_{\mathscr{P}}T$ et $\upsilon_{\mathscr{P}}T$ est replet d'après la proposition (1.2) précédente.

C.S. Si $\upsilon_{\mathscr{P}}T$ est replet, puisque les algèbres $C(\hat{T}^{\mathscr{P}})$ et $C(\upsilon_{\mathscr{P}}T)$ sont toutes les deux algèbriquement isomorphes à $C^{\mathscr{P}}(T)$ et puisque $\hat{T}^{\mathscr{P}}$ est replet, alors on a $\hat{T}^{\mathscr{P}} = \upsilon_{\mathscr{P}}T$.
Ainsi tout caractère de $C^{\mathscr{P}}(T)$ est continu.

Dans [4] on a considéré les familles $\mathscr{P}$ du type $\mathscr{P} = \{T_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ où $(T_n)_n$ est une suite croissante de fermés et on s'est posé la question de savoir si tout caractère de $C^{\mathscr{P}}(T)$ est $t_{\mathscr{P}}$-continu. La réponse est donnée dans le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.7.

Si $\mathscr{P} = \{T_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$, alors tout caractère de $C^{\mathscr{P}}(T)$ est $t_{\mathscr{P}}$-continu.

PREUVE.

L'espace $\upsilon_{\mathscr{P}}T = \bigcup_n \bar{T}_n^{\beta}$ est une réunion dénombrable de compacts, il est par suite replet d'après [3].

COROLLAIRE 1.8.

Si $\mathscr{P} = \{T_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est telle que, pour tout n, T_n soit borné, alors $C^{\mathscr{P}}(T) = C(T)$, $\upsilon_{\mathscr{P}}T = \upsilon T$ et tout caractère de $C(T)$ est $t_{\mathscr{P}}$-continu.

PREUVE.

On a, pour tout n, $\bar{T}_n^{\beta} = \bar{T}_n^{\upsilon} \subseteq \upsilon T$. Par suite, on a $\upsilon_{\mathscr{P}} T \subset \upsilon T$. Mais comme $\upsilon_{\mathscr{P}} T$ est replet et contient T, il en résulte que $\upsilon_{\mathscr{P}} T = \upsilon T$ et tout caractère de $C(T)$ est $t_{\mathscr{P}}$-continu.

COROLLAIRE 1.9.

1° Pour que tout caractère de $C(T)$ soit $t_{\mathscr{K}}$-continu, il faut et il suffit que T soit replet.

2° Pour que tout caractère de $C(T)$ soit $t_{\mathscr{B}}$-continu, il faut et il suffit que $T'' = \upsilon T$ (T'' voir [3]).

On désigne maintenant par τ une topologie d'algèbre localement multiplicativement convexe séparée sur $C(T)$ (en abregé l.m.c.h) (voir [2]), définie par le système de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$, pour laquelle tout point $t \in T$ définit un caractère continu sur $C(T)$. On note $\upsilon_{\tau} T$ les caractères τ-continus de $C(T)$. On a d'après [2] (Th. 4.10.7).

$$\upsilon_{\tau} T = \bigcup_{i \in I} \bar{T}_i^{\beta} \quad \text{où} \quad \bar{T}_i^{\beta} = \upsilon T \cap \overline{\{f \ ; \ p_i(f) \leqq 1\}}^{0}$$

est un compact et $\overline{\{f \ ; \ p_i(f) \leqq 1\}}^{0}$ est le polaire de $\overline{\{f \ ; \ p_i(f) \leqq 1\}}$ dans $C(T)'$.

THEOREME 1.10.

Pour que tout caractère de $C(T)$ soit τ-continu, il faut et il suffit que $\upsilon_{\tau} T$ soit replet.

PREUVE.

Ceci découle immédiatement du fait que υT est le plus petit sous-espace replet de βT contenant T.

COROLLAIRE 1.11.

Si τ est une topologie métrisable sur $C(T)$, pour laquelle tout point de T est continu, alors tout caractère de $C(T)$ est τ-continu.

Le théorème suivant généralise le théorème 3 de [7].

THEOREME 1.12.

Si τ est une topologie d'algèbre (l.m.c.h.) métrisable complète sur $C(T)$, pour laquelle les points de T sont des caractères continus, alors υT est un espace hémi-compact k-espace et τ est la topologie de la convergence compacte sur υT.

PREUVE.

En effet, $C(\upsilon T)$ muni de la topologie τ est une algèbre de Fréchet et puisque $\upsilon_\tau T = \upsilon T$, alors tout point de υT définit un caractère continu. Il résulte d'après le théorème 3 de [7] que υT est hémi-compact k-espace et τ est la topologie de la convergence compacte sur υT.

§ 2. ALGEBRES ABSTRAITES.

Une algèbre localement multiplicativement convexe séparée (l.m.c.h), A, est une algèbre topologique dont la topologie est définie par un système de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, $p_i(x \cdot y) \leqq p_i(x) \cdot p_i(y)$. On dit que A est pseudo-normée si, pour tout i et pour tout $x \in A$, on a :

$$p_i(x^2) = p_i(x)^2.$$

Une involution sur A est une application $x \longrightarrow x^*$ de A dans A telle que

(i) $x^{**} = x$,

(ii) $(x + y)^* = x^* + y^*$,

(iii) $(\beta x)^* = \bar{\beta} x^*$ et

(iv) $(xy)^* = x^* y^*$

Une algèbre (l.m.c.h), muni d'une involution est dite $*$-algèbre si, pour tout $i \in I$ et tout $x \in A$, on a

$$p_i(x \cdot x^*) = p_i(x)^2.$$

L'algèbre A est supposée commutative et unitaire.

Il est bien connu ([2] th. 4.12.10) qu'une $*$-algèbre est pseudo-normée.

On appelle caractère de A toute forme linéaire multiplicative de A dans $\mathbb{C}$ non nulle. On note $\Phi(A)$ les caractères de A et $\Phi^C(A)$ ceux qui sont continus. On dit que A est fortement semi-simple si $\Phi^C(A)$ sépare A, c'est à dire

$$a \in A \text{ et } u(a) = 0, \ \forall\, u \in \Phi^C(A) \Longrightarrow a = 0.$$

Si on note $I = \{a \in A \ ; \ u(a) = 0, \ \forall\, u \in \Phi^C(A)\}$, alors I est un idéal fermé et A/I est une algèbre (l.m.c.h), fortement semi-simple.

THEOREME 2.1.

Soit A une algèbre (l.m.c.h) complète, alors

$$\Phi(A) = \Phi(A/I) \quad \text{et} \quad \Phi^C(A) = \Phi^C(A/I).$$

PREUVE.

L'application canonique θ de A sur A/I définit une application $\tilde{\theta} : \Phi(A/I) \longmapsto \Phi(A)$, par $\tilde{\theta}(\tilde{u}) = \tilde{u} \circ \theta$

Evidemment $\tilde{\theta}$ est injective. Montrons que $\tilde{\theta}$ est surjective. Soit, pour cela, $u \in \Phi(A)$. Posons $\tilde{u} : A/I \longrightarrow \mathbb{C}$, par

$\tilde{u}(\theta(x)) = u(x)$. Ceci est bien défini car, si $\theta(x) = \theta(y)$, alors $x - y \in I$, or A étant complète, donc $I = \text{Rad } A$ (radical de A) donc $u(x) = u(y)$. Ainsi on obtient que $\tilde{\theta}(\Phi(A/I)) = \Phi(A)$ et puisque θ est continue, alors $\tilde{\theta}(\Phi^C(A/I)) = \Phi^C(A)$.

On suppose par la suite que A est semi-simple complète ce qui ne change rien pour l'étude des caractères continus. L'espace $\Phi(A)$ est muni de la topologie induite par $\sigma(A^*, A)$ et on note ψ la transformation de Gelfand de A dans $C(\Phi^C(A))$, ψ est définie par $\psi(a) = \hat{a}$ où $\hat{a}(u) = u(a)$.

Soit $(p_i)_{i \in I}$ le système de semi-normes définissant la topologie de A. On note $\{\overline{x, p_i(x) \leq 1}\}^0$ le polaire de $\{x, p_i(x) \leq 1\}$ dans A' et soit $K_i = \Phi^C(A) \cap \{\overline{x ; p_i(x) \leq 1}\}^0$. D'après le théorème (4.10.7) de [2], on a K_i compact et $\Phi^C(A) = \bigcup_{i \in I} K_i$, sur $C(\Phi^C(A))$ on note t_{wc} la topologie définie par le système de semi-normes $\{\|\cdot\|_{K_i}, i \in I\}$.

THEOREME 2.3.

Si A est une algèbre l.m.c.h, complète, alors on a

1° A et $C(\Phi(A))$ ont même espace de caractères,

2° A et $C(\Phi^C(A))$ ont même espace de caractères continus.

PREUVE.

1° Puisque $\Phi(A)$ est replet, comme étant fermé d'un produit $\mathbb{R}^I$, tout caractère de $C(\Phi(A))$ est un élément de $\Phi(A)$.

2° La famille des compacts $(K_i)_{i \in I}$ recouvre $\Phi^C(A)$ et le résultat découle du corollaire (1.9).

Une Q-algèbre est une algèbre (l.m.c.h), dont l'ensemble des éléments inversibles est ouvert.

COROLLAIRE 2.4.

Si l'algèbre A est un Q-algèbre complète, alors tout caractère est continu.

PREUVE.

En effet, dans ce cas, $\Phi^C(A)$ est compact, donc on a l'égalité $\Phi^C(A) = \Phi(A)$.

Le théorème suivant généralise le corollaire 5.6. de [6].

THEOREME 2.5.

Si A est une $\star$-algèbre, alors sont équivalentes :

1° tout caractère de A est continu,

2° $\Phi^C(A)$ est replet.

PREUVE.

Dans ce cas, ψ est une isomorphisme algébrique de A sur $C(\Phi^C(A))$. Or l'application $f \longrightarrow f_{|\Phi^C(A)}$ de $C(\Phi(A))$ dans $C(\Phi^C(A))$ permet d'identifier $C(\Phi(A))$ à une sous-algèbre de $C(\Phi^C(A))$. Comme $\psi(A) \subseteq C(\Phi(A)) \subseteq C(\Phi^C(A))$, on aura $C(\Phi(A)) = C(\Phi^C(A))$. Il en résulte que $\Phi(A) = \Phi^C(A)$ si $\Phi^C(A)$ est replet.

L'implication $1° \Longrightarrow 2°$ est évidente.

QUESTION 2.6.

A-t-on toujours $\Phi(A) = \upsilon\Phi^C(A)$, pour les algèbres complètes semi-simples?

COROLLAIRE 2.7.

Si A est une $\star$-algèbre complète et métrisable, alors tout caractère de A est continu.

PREUVE.

En effet dans ce cas $\Phi^{c}(A)$ est une union dénombrable de compacts, donc, il est replet et $\Phi(A) = \Phi^{c}(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **AKKAR, M.** : Seminaire Choquet (Initiation à l'analyse 1974 - 75, n° 21, 12p.

[2] **BECHENSTEIN, E, NARICI L., et SUFFEL, C.** : Topological algebras - Mathematics studies North-Holland (1977).

[3] **BUCHWALTER, H.** : Fonctions continues et mesures sur un espace complètement régulier. Summer school on TVS. Lectures Notes in Mathematics 331 p.183-202. Springer-Verlag, 1973.

[4] **HABRE W. et NOUREDDINE K.** : Sous-Algèbres localement convexes de C(T). C.R. Acad. Sc. Paris t.280. (30 Juin 1975).

[5] **MICHAEL, E.A.** : Locally multiplicatively convex topological algebras. (Memories of the American Mathematical society 11. 1952).

[6] **MORRIS, P.D. et WULBERT, D.E.** : Function representation of topological algebras. Pacific J. Math. 22, pp. 323-337 (1967).

[7] **WARNER, S.** : The topology of compact convergence on continuous function spaces. Duke Math. J. 25 (1958) 265-282.

W. HABRE
UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES II
MANSOURIEH - EL METN.