PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

GÉRARD GRANGIER

4 Recherche d'orbites périodiques d'un champ hamiltonien associé à une structure symplectique non standard

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 65-78

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___3B_A6_0>

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RECHERCHE D'ORBITES PERIODIQUES D'UN CHAMP HAMILTONIEN ASSOCIE A UNE STRUCTURE SYMPLECTIQUE NON STANDARD

par Gérard GRANGIER

Résumé.

Le problème de l'existence, sur une variété compacte M, des orbites périodiques d'un champ associé à un hamiltonien H, somme d'une énergie cinétique, d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur, au moyen d'une structure symplectique, non canonique, sur le fibré cotangent T^*M est ramené à un problème variationnel global sur M à l'aide de la transformation de Legendre et d'un relèvement approprié. Cette démarche précise celle imaginée par Novikov et Shmelster pour la loi de Kirchoff dans [5] . Elle peut aussi avoir pour application l'étude du mouvement d'un système de particules dans un champ gravitationnel et dans un champ electromagnétique [11] .

— Soit M une variété compacte connexe, de dimension n, de classe $\mathscr{C}^k (k \geqslant 6)$ possédant la propriété suivante :

. Pour tout lacet $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ continu de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux il existe un ouvert $\mathscr{U}$, domaine de carte tel que

$$\Pi^1(\mathscr{U}) = \Pi^2(\mathscr{U}) = \{o\} \text{ et } \gamma(\mathbb{S}^1) \subset \mathscr{U} .$$

Ces conditions sont en particuliers vérifiées dans le cas où $M = \mathbb{S}^n$.

. Le fibré cotangent $\pi : T^*M \to M$ est supposé muni d'une structure symplectique définie au moyen de la 2 forme :

$$\Omega = -d\Lambda + \pi^*\Omega_0 \quad (1)$$

où Λ est la forme de Liouville et Ω_0 une 2 forme fermée sur M.

. De plus sur T^*M est défini un hamiltonien H par :

$$H(X) = \frac{1}{2} g^{\#}_x(X,X) + V(x) + A(x)X \quad \text{pour} \quad X \in T^*_xM \qquad (2)$$

où $g^{\#}$ est une métrique riemannienne de classe $\mathscr{C}^k$

V une fonction numérique sur M dit potentiel scalaire,

A une section du fibré $T^{**}M \to M$ dit potentiel vecteur (pour chaque $x \in M$, $A(x)$ est donc une forme linéaire sur T^*_xM)

Ω_0, A et V sont supposés au moins de classe $\mathscr{C}^4$.

. Si $(\mathscr{U}_\alpha, \varphi)$ est une carte de M, on note $q = (q^1 \ldots q^n)$ les coordonnées locales correspondantes de M, (q,p) avec $p = (p_1, p_2 \ldots p_n)$ les coordonnées locales de T^*M sur $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ naturellement déduite de q, $(q,\dot{q})$ avec $\dot{q} = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ les coordonnées locales de TM sur $\varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ naturellement déduite de q., $\varpi : TM \to M$ désignant le fibré tangent de M.

. Si $\mathscr{U}_\alpha$ est un ouvert de M vérifiant $\Pi^1(\mathscr{U}_\alpha) = \Pi^2(\mathscr{U}_\alpha) = \{o\}$ il existe donc une 1-forme ω_α sur $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ telle que

$$\Omega_{|\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)} = d\omega_\alpha \qquad (3)$$

. On a les écritures locales

$$\omega_\alpha = p_i dq^i + f_i^{(\alpha)}(q) dq^i \qquad (1')$$

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j + A^i(q) p_i + V(q) \qquad (2').$$

Les conventions usuelles de sommation tensorielle seront systématiquement utilisées dans les calculs locaux.

1. La transformation de Legendre.

Soit X_H (resp. $\overset{\circ}{X}_H$) le champ hamiltonien de H dans la structure symplectique Ω (resp. $- d\Lambda$) , c'est-à-dire le champ défini pour tout champ Y sur T^*M par :

$$\Omega(X_H, Y) = dH.Y \qquad (4)$$

$$(\text{resp.} \quad -d\Lambda(\overset{\circ}{X}_H, Y) = dH.Y \qquad (5) \quad)$$

Si π^T désigne l'application tangente à la projection π, on a

$$\pi^T X_H = \pi^T \overset{\circ}{X}_H \ .$$

En effet localement on peut écrire :

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(- \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial f_j^{(\alpha)}}{\partial q^i}\ \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q^j}\ \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \qquad (3')$$

$$\overset{\circ}{X}_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\ \frac{\partial}{\partial p_i} \qquad (4') \qquad \text{d'où :}$$

$$\pi^T \overset{\circ}{X}_H(q,p) = \pi^T X_H(q,p) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ \frac{\partial}{\partial q^i} = (g^{ij}(q)p_j + A^i(q))\ \frac{\partial}{\partial q^i} \qquad (5')$$

Pour chaque q fixé dans M l'application $p \mapsto \pi^T X_H(q,p)$ de T_p^*M dans T_pM est une bijection affine , l'application $\pi^T X_H : T^*M \to TM$ est donc globalement inversible, fibre par fibre son inverse $\mathscr{L}$ est la transformation de Legendre. Localement on a :

$$\mathscr{L}(q,\dot{q}) = (q,p) \quad \text{avec} \quad p = g_{ij}(q)(\dot{q}^j - A^j(q)) \qquad (5'')$$

où $(g_{ij})_{ij}$ désigne la matrice inverse de la matrice $(g^{ij})_{ij}$.

2. Problème variationnel sur les ouverts $\mathscr{U}_\alpha$.

On définit sur TM l'énergie $E = H \circ \mathscr{L}$ (6) et au-dessus de chacun des $\mathscr{U}_\alpha$ une action $\mathscr{A}_\alpha : \varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \to \mathbf{R}$ par $\mathscr{A}_\alpha(v) = \omega_\alpha(X_H(\mathscr{L}(v))$ (7) et un lagrangien $L_\alpha : \varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \to \mathbf{R}$ par $L_\alpha(v) = \mathscr{A}_\alpha(v) - E(v)$ (8) pour $v \in \varpi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$.

On a les écritures locales :

$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, g_{ij}(q)\, \dot{q}^i \dot{q}^j + U(q) \qquad (6')$$

$$\mathscr{A}_\alpha(q,\dot{q}) = g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - A_i^{(\alpha)}(q)\dot{q}^i \qquad (7')$$

$$L_\alpha(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - A_i^{(\alpha)}(q)\dot{q}^i - U(q) \qquad (8')$$

avec $$A_i^{(\alpha)}(q) = g_{ij}(q)A^j(q) - f_i^{(\alpha)}(q) \qquad (9')$$

$$U(q) = V(q) - \frac{1}{2}\, g_{ij}(q)A^i(q)A^j(q) \qquad (10') .$$

Au moyen de L_α la transformation de Legendre s'écrit :

$$\mathscr{L}(q,\dot{q}) = (q,p) \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q}) - f_i^{(\alpha)}(q) \qquad (11') .$$

Si $\dot{q}$ et p sont liés par cette transformation on obtient :

$$\mathcal{A}_\alpha(q,q) = \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q})\dot{q}^i = (p_i + f_i^{(\alpha)}(q))\dot{q}^i \qquad (12')$$

On munit M de la structure riemannienne g associé à $g^\#$ et on note ΛM l'espace des lacets $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$, absolument continus dont la dérivée $\dot{\gamma}$ (qui existe presque partout) vérifie $g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) \in L^2(\mathbb{S}^1)$. On sait que ΛM est une variété hilbertienne de classe $\mathscr{C}^{k-5}$ [cf [9]] ou [3]] .

On note $W_\alpha = \{\gamma \in \Lambda M / \gamma(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{U}_\alpha\}$ W_α est un ouvert de ΛM.

On désigne par V_α l'espace des lacets $\gamma : \mathbb{S}^1 \mapsto \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ absolument continus dont le composé avec une quelconque carte définie sur $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ appartient à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbf{R}^{2n})$. V_α s'identifie donc a un ouvert de l'espace de Hilbert $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbf{R}^{2n})$.

PROPOSITION 1.

$\delta_0 \in V_\alpha$ est une orbite périodique de X_H si et seulement si δ_0 satisfait à l'équation d'Euler du problème variationnel associé à la fonctionnelle $S_\alpha : V_\alpha \to \mathbf{R}$ *définie par* $S_\alpha(\delta) = \int_0^1 \delta^*\omega_\alpha - H(\delta(t))dt$.

Si $\delta_0(t) = (q(t),p(t))$ dans les coordonnées locales.

$\delta_0 \in V_\alpha$ est une orbite de X_H, compte tenu de (3'), si et seulement si δ_0 est dérivable et vérifie pour tout t de $\mathbb{S}^1$:

$$(13') \begin{cases} \dot{q}^i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(q(t),p(t)) \\ \dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}(q(t),p(t)) + \dfrac{\delta f_j^{(\alpha)}}{\partial q^i}(q(t))\dfrac{\partial H}{\partial p_j}(q(t),p(t)) - \dfrac{\delta f_i^{(\alpha)}}{\partial q^j}(q(t))\dfrac{\partial H}{\partial p_j}(q(t),p(t)) \end{cases}$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation d'Euler du problème variationnel défini au moyen de S_α .

PROPOSITION 2.

$\gamma_0 \in W_\alpha$ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H si et seulement si γ_0 satisfait presque partout à l'équation d'Euler du problème

variationnel associé à la fonctionnelle $\hat{L}_\alpha : W_\alpha \mapsto \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\hat{L}_\alpha(\gamma) = \int_0^1 L_\alpha(\dot{\gamma}(t)dt.$$

Remarques préliminaires.

1. On note Φ $W_\alpha \mapsto H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$ l'application définie par $\Phi(\gamma) = \varphi \circ \gamma$ où φ est la carte définie sur $\mathcal{U}_\alpha$. Φ est un difféomorphisme de W_α sur l'ouvert $\tilde{W}_\alpha = \{\tilde{\gamma} \in H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n) \mid \tilde{\gamma}(\mathbb{S}^1) \subset \varphi(\mathcal{U}_\alpha)\}$ (cf. [7]) p. 168). Démontrer la proposition 2 pour $\hat{L}_\alpha$ revient à démontrer cette même proposition pour la fonctionnelle $\hat{L}_\alpha \circ \Phi^{-1}$ sur $\tilde{W}_\alpha$. En conséquence dans la suite on identifiera W_α et $\tilde{W}_\alpha$ et $\hat{L}_\alpha$ et $\hat{L}_\alpha \circ \Phi^{-1}$.

2. Si γ est la projection sur M d'une orbite δ de X_H, γ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\delta = \mathcal{L}(\dot{\gamma})$. En effet si δ est une orbite de X_H; δ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\dot{\delta}(t) = X_H(\delta(t))$ pour tout t . Comme $\gamma = \pi\delta$, on obtient pour tout t $\dot{\gamma}(t) = \pi^T\dot{\delta}(t) = \mathcal{L}^{-1}(\delta(t))$, γ est donc $\mathcal{C}^2$ et $\delta = \mathcal{L}(\dot{\gamma})$.

3. On a la formule $\hat{L}_\alpha(\gamma) = S_\alpha(\mathcal{L}(\dot{\gamma}))$ (9) dès que $\mathcal{L}(\dot{\gamma})$ appartient à V_α Si on a les écritures locales $\gamma(t) = q(t)$ et $\mathcal{L}(\dot{\gamma}(t)) = (q(t),p(t))$ c'est dire que $p(t)$ et $q(t)$ sont liés par la formule (5') (ou (5")), on obtient alors compte tenu des formules (8) , (12') et (1')

$$S_\alpha(\mathcal{L}(\dot{\gamma})) = \int_0^1 \mathcal{L}(\dot{\gamma})^*\omega_\alpha - H(\mathcal{L}(\dot{\gamma}))dt$$

$$= \int_0^1 (p_i(t) + f_i^{(\alpha)}(q(t))\dot{q}^i(t) - E(\dot{\gamma}(t))dt = \hat{L}_\alpha(\gamma)$$

Démonstration de la proposition 2.

On suppose que pour $\gamma_0 \in W_\alpha$ d'écriture locale $q(t)$, la fonction $t \to \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))$ appartienne à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$ et que pour presque tout t de $\mathbb{S}^1$ on ait la formule d'Euler :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),\dot{q}(t))\Big|_t = \frac{\partial L}{\partial q^i}(q(t),\dot{q}(t)) \right. \quad (14').$$

On pose $p_i(t) = \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),\dot{q}(t) - f_i^{(\alpha)}(q(t))$ pour i=1...n et $\delta_0(t) = (q(t),p(t))$

On a donc $\delta_0 \in V_\alpha$. Comme la relation de définition dje p est la formule (11') la relation (5') à savoir $\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t),p(t) = g^{ij}(q(t))p_j(t) + A^i(q(t))$ est aussi vérifiée. $\dot{q}$ est donc continue et sa dérivée existe presque partout sur $\mathbb{S}^1$. En particulier γ_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\delta_\circ = \mathscr{L}(\dot{\gamma}_\circ)$.

Le deuxième membre de (14') est continue, on peut donc dire que $t \to \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),q(t))$ est continûment dérivable et que (14') est vraie partout.

Comme $t \to f_i^{(\alpha)}(q(t))$ est $\mathscr{C}^1$, il en est de même de p, de (12') , de (8) et de (14') il vient :

$$\dot{p}_i(t) + \frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q^k}(q(t))\dot{q}^k(t) = \frac{\partial f_j^{(\alpha)}(q(t))}{\partial q^i}\dot{q}^j(t) - \frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t),p(t))$$

Compte tenu de (5') on obtient

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t),p(t)) + \frac{\partial f_j^{(\alpha)}(q(t))}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_j}(q(t),p(t)) - \frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q^k}(q(t)),\frac{\partial H}{\partial p_k}(q(t),p(t))$$

Cette formule et (5') donne exactement (13').

$\delta_\circ$ est une orbite périodique de X_H, en particulier $\delta_\circ$ est $\mathscr{C}^1$ donc $\gamma_\circ$ est $\mathscr{C}^2$.

Réciproque.

Si γ_0 est la projection sur M d'une orbite de X_H contenu dans $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$, γ_0 est, d'après la remarque préliminaire 2 de classe $\mathscr{C}^2$ et cette orbite périodique est $\delta_0 = \mathscr{L}(\dot{\gamma}_0)$. Les relations (13') et (5') sont vraies elles impliquent pour tout t de $\mathbb{S}^1$ (14') γ_0 est une extrémale de $\hat{L}_\alpha$ sur W_α .

Remarque.

On peut définir [cf [1]] le champ X_E sur TM dit champ de Lagrange par $i_{X_E}\mathscr{L}^*\Omega = dE$ (10). La formule classique $\mathscr{L}_* X_E = X_H$ (11) reste vraie. Autrement dit γ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H si et seulement si $\dot{\gamma}$ est un orbite périodique de X_E .

Le problème variationnel local que l'on vient de décrire est très satisfaisant car on a la :

PROPOSITION 3.

$\hat{L}_\alpha : W_\alpha \mapsto \mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ (c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^1$ et de différentielle localement lipchitzienne) et vérifie la condition (C) de Palais Smale.

On a $\hat{L}_\alpha(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\,dt - A_\star^{(\alpha)}(\gamma(t))\dot\gamma(t) - U(\gamma(t))dt$ (12)

On sait classiquement (cf [9]) que $\gamma \mapsto \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t),dt$ est de classe $\mathscr{C}^{k-4}_-$ donc au moins de classe $\mathscr{C}^2_-$ puisque $k \geqslant 6$.

Il est élémentaire de vérifier que $\gamma \mapsto \int_0^1 U(\gamma(t))dt$ est de classe $\mathscr{C}^2$ dès que U est classe $\mathscr{C}^4$.

Enfin $\gamma \to \int_0^1 A_\star^{(\alpha)}(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^4$, cela résulte du lemme 8.21. p. 211 de ([9])).

Si $A_\star$ est de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbf{R}^n$ dans $(\mathbf{R}^n)^*$ l'application $\tilde{A}_\star : H^1(\mathbb{S}^1,\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbb{S}^1,\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ définie par $\tilde{A}_\star(f,v) = \int_0^1 A_\star(f(t))v(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^{k-2}$.

On voit sur l'écriture locale (9') que $A_\star^{(\alpha)}$ est de classe $\mathscr{C}^4$.

Pour obtenir la condition (C) de Palais Smale on suit la démarche de [4] p. 524.

Soit une fonctionnelle $\mathscr{J} : H^1(\mathbb{S}^1,\mathbf{R}^n) \mapsto \mathbf{R}$ qui vérifie les deux conditions :

a) $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^1} = \infty$ implique $\lim_{n\to\infty} |\mathscr{J}(u_n)| = +\infty$.

b) si $(u_n)_n$ est une suite bornée de $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbf{R}^n)$ satisfaisant $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \quad p,q \geqslant N \Rightarrow |(D\mathscr{J}(u_p)-D\mathscr{J}(u_q))(u_p-u_q)| < \varepsilon$ il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ convergeant dans $H^1.(\mathbb{S}^1,\mathbf{R}^n)$.

Alors $\mathcal{J}$ vérifie la condition (C) à savoir :

toute suite $(u_n)_n$ satisfaisant $|\mathcal{J}(u_n)|$ borné et $\lim_{n \to \infty} || \operatorname{grad} \mathcal{J}(u_n)|| = 0$ possède une suite extraite convergente.

On introduit les notations pour $u \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha)$:

$$\hat{L}^\circ_\alpha(u) = \int_0^1 g_{ij}(u(t))\dot{u}_i(t)\dot{u}_j(t)dt$$

$$\hat{L}^1_\alpha(u) = \hat{L}^o_\alpha(u) - \int_0^1 A_i^{(\alpha)}(u(t))\dot{u}^i(t)dt \qquad (15')$$

$$\hat{L}_\alpha(u) = \hat{L}^1_\alpha(u) - \int_0^1 U(u(t)dt \qquad (16')$$

On sait [cf [4] v. p. 528] que $\hat{L}^\circ_\alpha$ vérifie les conditions a) et b).

LEMME 1.

$\hat{L}^{o1}_\alpha : H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha) \to \mathbf{R}$ *vérifie la condition a).*

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, la compacité de M et la continuité de $A^{(\alpha)}$ sur U_α il vient pour tout u de $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha)$

$$\left| \int_0^1 A_i^{(\alpha)}(u(t))\dot{u}^i(t)dt \right| \leqslant \left(\int_0^1 || A_\star^{(\alpha)}(u(t))||^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 || \dot{u}(t)||^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(C \int_0^1 || \dot{u}(t)||^2 dt \right)^{1/2}$$

C désignant une constante.

Mais pour chaque x de $\mathcal{U}_\alpha$ $h \to g_{ij}(x)h^ih^j$ est une forme quadratique définie positive, il existe donc $m(x) > 0$ tel que

$$g_{ij}(x)h^ih^j \geqslant m(x) \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \right).$$

De plus les $(g_{ij})_{ij}$ sont continues et M est compact il existe donc $m > 0$ telle que pour tout x de $\mathcal{U}_\alpha$ et tout h de $\mathbf{R}^n$

$$g_{ij}(x)h^ih^j \geqslant m \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \right).$$

On en déduit pour tout u de $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha)$:

$$\hat{L}^1_\alpha(u) \geqslant m \int_0^1 \|\dot{u}(t)\|^2 dt - C\Big(\int_0^1 \|\dot{u}(t)\|^2 dt\Big)^{1/2}$$

$$\geqslant m \int_0^1 \|\dot{u}(t)\|^2 dt \Big(1 - \frac{C}{m} \frac{1}{\Big(\int_0^1 \|\dot{u}(t)\|^2 dt\Big)^{1/2}}\Big)$$

Si $(u_n)_n$ est une suite de $H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha)$ tq $\lim_{p \to \infty} \|u_p\|_{H^1} = +\infty$ du fait que M est compact cela implique $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \|\dot{u}_p(t)\|^2 dt = +\infty$ donc $\lim_{p \to \infty} L^1_\alpha(u_p) = +\infty$.

LEMME 2.

$\hat{L}^1_\alpha : H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha) \mapsto \mathbf{R}$ *vérifie la condition b).*

En différentiant (15') on peut écrire pour $h \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{U}_\alpha)$

$$D\hat{L}^0_\alpha(u)h = D\hat{L}^1_\alpha(u)h + \int_0^1 (DA_*(u(t))h(t) + A^{(\alpha)}_*(u(t))\dot{h}(t))dt .$$

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbf{R}^n)$ satisfaisante la condition :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad p,q \geqslant N \Rightarrow |D\hat{L}^1_\alpha(u_p) - D\hat{L}^1_\alpha(u_q)|(u_p - u_q)| < \varepsilon$.

Pour deux indices i et j on a donc

$$D\hat{L}^0_\alpha(u_i) - D\hat{L}^0_\alpha(u_j)(u_i - u_j) = (D\hat{L}^1_\alpha(u_i) - D\hat{L}^1_\alpha(u_j))(u_i - u_j)$$

$$+ \int_0^1 (DA_*(u_i(t)) - DA_*(u_j(t))(u_i(t) - u_j(t)) + (A^{(\alpha)}_*(u_i(t)) - A^{(\alpha)}_*(u_j(t))(\dot{u}_i - \dot{u}_j)dt .$$

Comme L^0_α vérifie la condition b) pour obtenir à partir de la suite $(u_n)_n$ une suite extraite convergente il suffit de montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad p,q \geqslant N \Rightarrow$

$$\int_0^1 \{DA_*(u_p(t)) - DA_*(u_q(t) - u_p(t) - u_q(t)) + A^{(\alpha)}_*(u_p(t)) - A^{\alpha}_*(u_q(t))\}(\dot{u}_p(t) - \dot{u}_q(t))dt < \varepsilon$$

ou ce même résultat pour une suite extraite de $(u_n)_n$.

Mais :

$$\left| \int_0^1 (A_*^{(\alpha)}(u_i(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_j(t)))(\dot{u}_i(t)-\dot{u}_j(t))dt \right|$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \| A_*^{(\alpha)}(u_i(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_j(t)) \|^2 dt \right)^{1/2} \| u_i-u_j \|_{H^1}$$

$$\leqslant 2A \left(\int_0^1 \| A_*^{(\alpha)}(u_i(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_j(t) \|^2 dt \right)^{1/2}$$

car la suite $(u_n)_n$ est bornée.

L'inclusion de $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n})$ dans $\mathscr{C}^0_\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^{2n})$ étant compact donc il existe une suite extraite (u_{n_k}) qui converge uniformément sur $[0,1]$, le fait que A_* est continue implique que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad p,q > N \Longrightarrow \int_0^1 \| A_*^{(\alpha)}(u_{np}(t)) - A_*^{(\alpha)}(u_{n(q}(t) \|^2 dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4A}$$

$$\text{et} \quad \left| \int_0^1 (DA(u_{np}(t)) - DA(u_{nq}(t)))(u_{np}-u_{nq})(t)dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 3.

PROPOSITION 4.

$\gamma_0 \in W_\alpha$ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H ssi γ_0 est un point critique de $\hat{L}_\alpha$ sur W_α.

On remarque préalablement (cf. [9] lemme 8.18 p. 210) que $T_\gamma H^1(\mathbb{S}^1, \mathscr{U}_\alpha)$ pour $\gamma \in W_\alpha$ s'identifie à $H^1(\mathbb{S}^1, T_\gamma \mathscr{U}_\gamma)$ donc finalement comme $\mathscr{U}_\alpha$ est un domaine de carte à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$.

De plus comme $\hat{L}_\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que $d_f^2 L_\alpha$ (la dérivée seconde de L_α le long de la fibre) est une forme quadratique définie positive, il résulte d'un théorème de [10] (p. 392) que $D\hat{L}_\alpha(\gamma_0)$ est l'extension à $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$ de l'application

$$v \to \int_0^1 \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q})\dot{v}^i + \frac{\partial L_\alpha}{\partial q^i}(q,\dot{q})v^i \right)(t)dt \qquad (17')$$

de $\mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$.

γ_o est donc un point critique de $\hat{L}_\alpha$ si et seulement si pour tout v de $\mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1, \mathscr{U}_\alpha)$

$$\int_o^1 \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q})\dot{v}^i + \frac{\partial L_\alpha}{\partial q^i}(q,\dot{q})v^i \right)(t)dt = 0 .$$

C'est-à-dire en généralisant à $H^1(\mathbb{S}^1, \mathscr{U}_\alpha)$ le lemme de Dubois Raymond si et seulement si pour presque tout t de $\mathbb{S}^1$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}^i}(q(t),\dot{q}(t)) \right) = \frac{\partial L_\alpha}{\partial q^i}(q(t),\dot{q}(t))$$

d'où, grâce à la proposition 2 si et seulement si γ_o est le projection d'une orbite périodique de X_H sur M.

3. Problème global.

On remarque que si γ appartient à $W_\alpha \cap W_\beta$, en raison de (12).

$$\hat{L}_\alpha(\gamma) - \hat{L}_\beta(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} A_i^{(\beta)}(q(t))\dot{q}^i(t)dt - \int_{\mathbb{S}^1} A_i^{(\alpha)}(q(t))\dot{q}^i(t)dt$$

de sorte que si $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ le calcul précédent implique :

$$(D\hat{L}_\alpha(\gamma) - D\hat{L}_\beta(\gamma))(h) = \int_{\mathbb{S}^1} \left[-\frac{d}{dt}(A_j^{(\beta)}(q(t)) + \frac{\partial A_i^{(\beta)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i_{(t)} \right] \dot{h}^j(t)dt$$

$$- \int_{\mathbb{S}^1} \left[-\frac{d}{dt}(A_j^{(\alpha)}(q(t)) + \frac{\partial A_i^{(\alpha)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i(t) \right] h^j(t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \left(-\frac{\partial A_j^{(\beta)}}{\partial q^i}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t) + \frac{\partial A_i^{(\beta)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t) \right)dt$$

$$- \int_{\mathbb{S}^1} \left(-\frac{\partial A_j^{(\alpha)}}{\partial q^i}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t) + \frac{\partial A_i^{(\alpha)}}{\partial q^j}(q(t))\dot{q}^i(t)h^j(t) \right)dt$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} - dA_*^{(\beta)}(q(t))(\dot{q}(t),h(t)) + dA_*^{(\alpha)}(q(t))(\dot{q}(t),h(t))dt$$

mais $dA_*^{(\alpha)}$ est globale , car $dA_*^{(\alpha)} = dB + \Omega_o$ avec B la 1 forme définie par $B(v) = A(x)\,(v)^\#$ pour $v \in T_xM$ ($v^\#$ désignant la 1 forme associée à v au moyen de

g c'est-à-dire $X \to g_x(v,X)$ pour $x \in T_xM$). Cela résulte immédiatement de l'écriture (9').

Donc pour $\gamma \in W_\alpha \cap W_\beta$ $\hat{DL}_\alpha(\gamma) = \hat{DL}_\beta(\gamma)$.

On peut donc parfaitement définir sur ΛM une 1-forme fermée $\hat{K}$ coïncidant avec les divers $\hat{DL}_\alpha$; et pour globaliser le problème introduire : $\Lambda\tilde{M}$ le revêtement universel de ΛM, ce qui a un sens puisque ΛM est une variété hilbertienne connexe donc localement connexe par arcs et "semi-localement simplement connexe". Les éléments de $\Lambda\tilde{M}$ sont les classes d'homotopie de chemin $\gamma_s : \mathbb{S}^1 \to M$ paramétrés par $s \in [0,1]$ d'origine un lacet γ_0 que l'on peut choisir pour simplifier comme réduit a un point m_0 de M et ayant même extrémités γ_1 (cf. [2]).

On note $[\Gamma]$ un élément de $\Lambda\tilde{M}$ ayant pour représentant l'application $\Gamma : (s,t) \mapsto \Gamma(s,t)$ de $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ dans M satisfaisant pour tout t de $\mathbb{S}^1$ $\Gamma(o,t) = m_0$. Soit p la projection canonique $\Lambda\tilde{M} \to \Lambda M$ c'est-à-dire l'application définie par $p[\Gamma] = \gamma_1$.

On définit tout naturellement une application $\hat{L}$ qui globalise les différents $\hat{L}_\alpha$ en posant

$$\hat{L}([\Gamma]) = \int_\Gamma \hat{K}$$

Cette application est bien définie (c'est-à-dire indépendamment du représentant choisi) en raison du lemme de Poincaré, $\hat{K}$ étant fermée (cf. la démonstration pour les variétés de dimension infinie du lemme de Poincaré dans [12]).
Si $[\Gamma] \in \Lambda\tilde{M}$ il existe α tel que $p[\Gamma] \in W_\alpha$ et $\hat{L}[\Gamma] = \hat{L}_\alpha(p[\Gamma])$,, de plus comme $\Pi^1(W_\alpha) = \Pi^2(\mathcal{U}_\alpha) = \{0\}$ si Γ est un chemin paramétré sur $[0,1]$ joignant γ_1 et γ_2 de sorte que $\Gamma(I \times \mathbb{S}^1) \subset \mathcal{U}_\alpha$ on a si $[\Gamma_i]$ se projette sur γ_i (i=1,2), On a $L([\Gamma_i]) = L_\alpha(\gamma_i)$ (i=1,2) pour le même indice α.

PROPOSITION 5.

$\hat{L} : \Lambda\tilde{M} \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a la condition : si $(u_n)_n$ est une suite de points de $\Lambda\tilde{M}$ vérifiant

1) $|L(u_n)|$ est bornée et $\lim_{n \to \infty} \| \text{grad} L(u_n) \| = 0$

2) $(u_n)_n$ est contenu dans un nombre fini de feuillets

alors il existe une suite convergente.

La condition (2) signifie qu'il existe un nombre fini d'indices α telle que pout tout n $p(u_n) \in \bigcup_\alpha W_\alpha$ et pour chacun de ces α, les (u_n) se projettant dans le même W_α sont dans un nombre fini d'ouverts W_{α_i} de $p^{-1}(W_\alpha)$ sur lesquels p est un difféomorphisme.

Si M est une variété telle que $\Pi^2(M)$ soit un groupe fini, la proposition 4 implique que $\hat{L}$ vérifie la condition (C).

Le fait que $\hat{L}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ est évident puisque p est un revêtement.

Si les conditions (1) et (2) sont vérifiées pour une suite $(u_n)_n$ la condition (2) implique qu'il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$, et un même indice α telles que $\forall k\ \hat{L}(u_{n_k}) = \hat{L}_\alpha(pu_{n_k})$. Comme L_α vérifie la condition (C), on peut extraire de cette suite (pu_{n_k}) une suite convergente ; la suite correspondante pour $(u_n)_n$ est celle que l'on souhaite.

PROPOSITION 6.

Les projections sur M *des orbites périodiques de* X_H *coïncident avec les projections sur* ΛM *des points critiques de* $\hat{L}$.

Si $[\Gamma]$ est un point critique de $\hat{L}$, il existe α tel que $\hat{L}([\Gamma]) = \hat{L}_\alpha(p[\Gamma])$ Comme p est un difféomorphisme local $\gamma = p\,[\Gamma]$ est un point critique de $\hat{L}_\alpha$ donc en vertu de la proposition 4, γ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H.

Réciproquement si γ est la projection sur M d'une orbite périodique de X_H, γ est de classe $\mathscr{C}^2$ donc il existe $\mathscr{U}_\alpha$ satisfaisant $\Pi^1(\mathscr{U}_\alpha) = \Pi^2(\mathscr{U}_\alpha) = \{0\}$ et $\gamma(\mathbb{S}^1) \subset \mathscr{U}_\alpha$. En relevant γ dans $\tilde{\Lambda}M$, on peut dire qu'il existe $[\Gamma] \in \Lambda M$ telle $p[\Gamma] = \gamma$ et $\hat{L}([\Gamma]) = \hat{L}_\alpha(\gamma)$, comme γ est un point critique de L_α , que p est un difféomorphisme local, $[\Gamma]$ est un point critique de L.

Le nombre d'orbites périodiques va pouvoir être estimé en étudiant la topologie de $\tilde{\Lambda}M$ et en appliquant la théorie de Lyusternik-Schnirel'mann[6] .

Bibliographie.

[1] R. ABRAHAM and J.E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics* (2ème édition) Benjamin (1978) p. 218-251.

[2] C. GRENBERG, Lectures on algebraic topology, Benjamin (1967).

[3] W. KLINGENBERG, Lectures on closed geodesics, Springer (1978).

[4] J.P. MESIROV, *Perturbation theory for condition (C) in the calculus of variation,* J. differential geometry 12 (1977), p. 523-533.

[5] S.P. NOVIKOV and I. SHMEL'STER, *Periodic solution of Kirchoff equations for the free motion of rigid body in a fluid and the extended theory of Lyusternik-Schnirel'mann Morse (I).* Funct. Anal. Priloztien 15 n°3, traduction américaine (1982), p. 197-207.

[6] R. PALAIS, *Lusternick-Schnirel'mann theory on Banach manifold,* Topology 5 (1966), p. 115-132.

[7] R. PALAIS and S. SMALE, *A generalised Morse theory :* Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), p. 165-171.

[8] P.H. RABINOWITZ, *Periodic solutions of Hamilton systems,* Comm. on Pure and Applied Maths. vol. XXXI (1978), p. 157-184.

[9] J.T. SCHWARTZ, *Non linear functional analysis,* Gordon and Breach (1969).

[10] S. SMALE, *Morse theory and a non linear generalisation of the dirichlet Problem,* Ann. Math. 80 (1964), p. 382-396.

[11] J.M. SOURIAU, *Structures des systèmes dynamiques,* Dunod (1975).

[12] A. WEINSTEIN, *Symplectic manifold and their lagrangien submanifold,* Advances in maths (1971), p. 329-345.