PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL MIZONY

3 Semi-groupes de causalité et formalisme hilbertien de la mécanique quantique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 47-64

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___3B_A5_0>

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SEMI-GROUPES DE CAUSALITE
ET FORMALISME HILBERTIEN DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

par Michel MIZONY

PLAN :

I
1. Géométries de l'univers
2. Exemples de géométries de l'univers
3. Le théorème de Bacry et Levy-Leblond
4. Quelques décompositions.

II Le formalisme hilbertien de la mécanique quantique.

III Une remise en cause du formalisme hilbertien.

1. Un résultat négatif pour le groupe de De Sitter $SO_o(1,4)$
2. Les contractions de groupes.
3. Semi-groupes et cônes du futur
4. Représentations et contractions des semi-groupes de De Sitter et de Poincaré.
5. Modifications du formalisme hilbertien.

****

Introduction.

Wigner et Bargman ont proposé, en 1954 un formalisme qui permet de classifier les systèmes de particules libres (par la masse et le spin du système) à partir des représentations unitaires du groupe des invariants (cinématiques) de l'univers choisi.C'est le formalisme hilbertien de la mécanique quantique.

En fait pour l'univers de De Sitter à courbure constante négative, ce formalisme ne permet pas de distinguer particules d'énergie positive et négative. Nous proposons de remédier à cet état de fait en étudiant le semi-groupe de causalité globale de l'univers et en introduisant la notion de représentation isométrique hilbertienne de semi-groupe ; ceci nous entraine à modifier un peu le formalisme hilbertien de la mécanique quantique.

Notons que c'est l'interprétation en théorie des groupes des fonctions de Jacobi et de Bessel de 2ème espèce qui est à l'origine de ce travail et des résultats obtenus (notamment pour le groupe de De Sitter $SO_o(1,4)$).

I. Géométries de l'univers.

I.1. Définition d'une géométrie de l'univers.

Se donner une géométrie (U,G) c'est se donner une variété U sur laquelle agit transitivement un groupe de transformations G.

Une géométrie (U,G) de l'univers est la donnée d'une variété U de dimension 4 sur $\mathbf{R}$ (U est censée représenter l'espace-temps), sur laquelle agit transitivement un groupe de Lie G connexe de dimension 10, vérifiant un certain nombre d'hypothèses physiquement raisonnables ; ce groupe G est appelé groupe cinématique, ou groupe des changements de référentiels de l'univers U.

Définition d'un groupe cinématique G (c.f. Bacry et Levy-Leblond [2]).

Il existe dans l'algèbre de Lie $\underline{G}$ une base $\{T,P_1,P_2,P_3,K_1,K_2,K_3,J_1,J_2,J_3\}$ telle que :

α) Les sous-groupes à un paramètre associés à chacun des éléments de la base ont l'interprétation physique suivante :

T	translations de temps
P_1, P_2, P_3	translations de l'espace
K_1, K_2, K_3	transformations par inertie.
J_1, J_2, J_3	rotations de l'espace.

Cette hypothèse traduit l'homogénéité de l'espace-temps et en partie l'isotropie de l'espace.

β) L'isotropie de l'espace est complètement traduite si de plus on a les crochets de Lie suivants : pour $i,j,k \in \{1,2,3\}$: $[J_i, T] = 0$; $[J_i, J_j] = \varepsilon_{i,j,k} J_k$; $[J_i P_j] = \varepsilon_{i,j,k} P_k$; $[J_i, K_j] = \varepsilon_{i,j,k} K_k$ où $\varepsilon_{i,j,k} = 0$ si $i=j$ ou $i=k$ ou $j=k$, et $\varepsilon_{i,j,k}$ = signature $((1,2,3) \to (i,j,k))$ sinon

γ) Les sous-groupes à un paramètre associés à K_1, K_2, K_3 sont non compact (sinon il existerait une transformation d'inertie égale à la transformation identique, correspondant à une vélocité non nulle).

Définition du semi-groupe de causalité globale d'une géométrie (U,G) de l'univers. Soit A le sous-groupe à un paramètre de G, correspondant aux translations de temps. Donnons un sens de l'écoulement du temps ; soit A_+ l'ensemble des translations positives de temps ($A_+ = \{\exp t\, T \;/\; t \in \mathbb{R}_+\}$). Soit H le sous-groupe de G engendré par les rotations spatiales et les transformations d'inertie.

Le semi-groupe de causalité globale est le sous-semi-groupe G_+ engendré dans G par H et A_+. Le semi-groupe G_+ peut s'interpréter comme l'ensemble des déplacements admissibles d'un observateur physique.

I.2. Exemples de géométrie de l'univers.

Soit $\mathbb{R}^{p+q}$ muni de la pseudo norme $\| \ \|_{p,q}$:

pour $x \in \mathbb{R}^{p+q}$, $x = (x_{-p+1}, x_{-p+2}, \ldots, x_0, x_1, \ldots, x_q)$

alors $\| x \|^2_{p,q} = \sum_{k=-p+1}^{0} x_k^2 - \sum_{k=1}^{q} x_k^2$.

Le cône isotrope de $\mathbf{R}^{p+q}$ est l'ensemble $\{ x \in \mathbf{R}^{p+q} / \| x \|_{p,q} = 0 \}$. Ce cône est parfois appelé cône de lumière.

2.a) Géométrie de la relativité restreinte : (U_0, P).

L'univers U_0 est $\mathbf{R}^{1+3}$ muni de la pseudo-norme $\| \ \|_{1,3}$, il est appelé souvent univers de Minkowski ; et P est le groupe de Poincaré qui est le produit semi-direct $P = \mathbf{R}^4 \ 0 \ SO_0(1,3)$. Le groupe $SO_0(1,3)$ est appelé le groupe de Lorentz.

Soit C le cône des vecteurs de $\mathbf{R}^{1+3}$ du genre temps > 0:
$C = \{x \in \mathbf{R}^{1+3} / \| x \|_{1,3} > 0$ et $x_0 > 0\}$. Alors C est stable par l'action de $SO_0(1,3)$ sur $\mathbf{R}^4$ et le sous-semi-groupe de causalité est $G_+ = C \ 0 \ SO_0(1,3)$.

Dans cette présentation, nous avons pris la vitesse de la lumière égale à 1. Soit c la vitesse de la lumière, alors pour obtenir la géométrie correspondante il suffit de prendre pour U_0 l'espace $\mathbf{R}^{1+3}$ muni de la pseudo-norme $\| x \|_C^2 = C^2 x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ et pour cône C : $C = \{x \in \mathbf{R}^{1+3} / / \| x \|_C > 0$ et $x_0 > 0\}$
Le reste est inchangé.

Dans la littérature, on prend souvent à la place du groupe de Lorentz $SO_0(1,3)$ son revêtement universel (à 2 feuillets) $SL(2,\mathbb{C})$. Pour $X \in SL(2,\mathbb{C})$ et $x \in \mathbf{R}^4$ l'action de X sur x est définie par :

Soit $\sigma : x \to \sigma(x) = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}$; $\sigma(X.x) = X\sigma(x)X^*$.

2.b) Géométrie de la relativité générale avec une courbure de l'univers constante - $r < 0$:

On peut représenter l'univers noté U_{-r} par:l'hyperboloïde dans $\mathbf{R}^{1+4}$:
$U_{-r} = \{ x \in \mathbf{R}^5 / \| x \|_{1,4}^2 = - r^2 \}$.

Le groupe des transformations de cet univers est le groupe $G = SO_0(1,4)$, appelé groupe de De Sitter qui agit canoniquement sur la variété U_{-r}.

Le sous-groupe H est le sous-groupe de Lorentz $SO_0(1,3)$ (agissant sur les variables d'indices 0,1,2,3) et le sous-groupe A des translations du temps est le sous-groupe $SO_0(1,1)$ (agissant sur les variables d'indices 0 et 4).

Le sous-semi-groupe de causalité est alors $G_+ = H A_+ H$.

C'est un modèle de géométrie d'un univers dit ouvert (ou en expansion).

2.c) Géométrie de la relativité générale avec courbure de l'univers $r > 0$.

On prend pour univers $U_r = \{ x \in \mathbf{R}^{2+3} / \|x\|^2_{2,3} = r^2 \}$ sur lequel agit canoniquement le deuxième groupe de De Sitter $SO_0(2,3)$. Le sous-groupe H est le groupe de Lorentz $SO_0(1,3)$ (agissant sur les variables d'indices 0,1,2 et 3) et le sous-groupe des translations de temps est le sous-groupe compact $A = SO(2)$ (agissant sur les variables d'indices -1 et o). Donc $A_+ = A$ et $G_+ = G = SO_0(2,3)$.

C'est un exemple de géométrie d'un univers dit fermé (ou oscillant).

2.d) Des géométries d'un univers plat.

Dans les exemples qui vont suivre $U = \mathbf{R}^4$ l'univers plat Galiléen, et le groupe de transformations aura toujours pour ensemble sous-jacent l'ensemble $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times SO(3)$ (dans l'ordre translations de temps, translations d'espace, transformation d'inertie et rotations d'espace).

Pour ces cinq géométries, Soit $H = \mathbf{R}^3 \, 0 \, SO(3)$ le produit semi-direct du sous-groupe $\mathbf{R}^3$, des changements de référentiels par inertie, par le sous-groupe $SO(3)$ des rotations, alors l'univers $\mathbf{R}^4$ s'identifie à l'espace homogène G/H et l'action de G sur $\mathbf{R}^4$ provient de l'action canonique à gauche de G sur G/H.

Pour $g = (t,\vec{x},\vec{v},R)$ et $g' = (t',\vec{x}',\vec{v}',R') \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times SO(3)$ posons :

$$g.g' = (t+t',\ \vec{x}+R\vec{x}' + \vec{v}t',\ \vec{v} + R\vec{v}',\ RR')$$

nous obtenons, la loi de groupe du groupe de Galilée : $(\mathbf{R}^4,G)$ est la géométrie de l'univers relativiste Galiléen. (Courbure nulle de l'univers).

Pour $\tau < 0$, où $\frac{1}{\tau^2}$ désigne la valeur absolue de la courbure de l'univers,

$$g.g' = (t+t',\ \vec{x}\ ch\frac{t'}{\tau} + R\vec{x}' + \vec{v}\,\tau\, sh\frac{t'}{\tau},\ \vec{v}\ ch\frac{t'}{\tau} + R\vec{v}' + \frac{\vec{x}}{\tau}\ sh\frac{t'}{\tau},\ RR').$$

Nous obtenons le groupe de Newton que nous noterons N_-. $(\mathbf{R}^4,N_-)$ est la géométrie d'un univers Newtonien en expansion. Pour $\tau > 0$, où $\frac{1}{\tau^2}$ est le courbure de l'univers

$$g.g' = (t,t',\ \vec{x}\cos\frac{t'}{\tau} + R\vec{x}' + \vec{v}\,\tau\sin\frac{t'}{\tau},\ \vec{v}\cos\frac{t'}{\tau} + R\vec{v}' + \frac{\vec{x}}{\tau}\sin\frac{t'}{\tau},RR').$$

Nous obtenons le groupe de Newton que nous noterons N_+ correspondant à la géométrie d'un univers Newtonien oscillant.

Pour ces trois géométries les sous-semi-groupes ont même ensemble sous-jacent $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times SO(3))$.

Enfin signalons deux géométries irréelles de l'univers.

- Pour l'univers des rêves, $U = \mathbf{R}^4$ et sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times SO(3)$ on met la loi de groupe $g.g' = (t+t'+ \langle \vec{v}\ R\vec{x}' \rangle\ ,\ \vec{x} + R\vec{x}',\ \vec{v} + R\vec{v}', RR')$ ce groupe est appelé groupe de Lewis Carrol du fait des propriétés de cette géométrie (on peut remonter dans le temps par exemple).

- Pour l'univers statique, $U = \mathbf{R}^4$ et sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times SO(3)$ la structure de groupe est donnée par $g.g' = (t+t',\ \vec{x} + R\vec{x}'\ ,\ \vec{v} + R\vec{v}',\ RR')$.

I.3. Le théorème de Bacry et Levy-Leblond :

THEOREME : Soit (U,G) une géométrie de l'univers telle que l'inversion du temps et la réflexion de l'espace définissent canoniquement des automorphisme $\mathcal{O}$ et π de l'algèbre de Lie G :

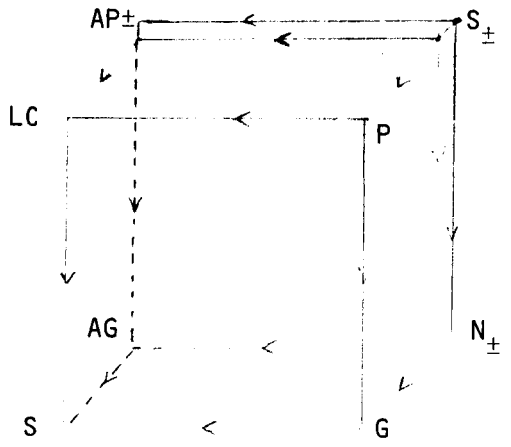
$$\mathcal{O}(H) = -H \quad , \quad \mathcal{O}(K_i) = -K_i \qquad \text{pour l'inversion du temps.}$$

$$\pi(P_i) = -P_i \quad , \quad \pi(K_i) = -K_i \qquad \text{pour la réflexion de l'espace.}$$

a) Il existe 11 géométries de l'univers : ce sont les 8 géométries définies ci-dessus et 3 géométries sans intérêt physique (les roles des translations d'espaces et des transformations d'inertie sont échangés : les deux groupes anti-Poincaré notes $AP_\pm$ et le groupe anti-galigée noté AG).

b) Notons S_+ le groupe de De Sitter $SO_0(2,3)$, S_- le groupe de De Sitter $SO_0(1,4)$, LC le groupe de Liwis Carrol et S le groupe statique.

En termes de contractions de groupes de Lie, ces 11 groupes cinématiques peuvent être visualisées suivant le cube :



Les flèches indiquent la nature des contractions :

↙ contraction espace-temps (la courbure de l'univers tend vers zéro)

↓ contraction vélocité-espace (la vitesse de la lumière tend vers l'infini)

← contraction temps-vélocité.

Nous définirons plus loin la notion de contraction de groupe de Lie.

I.4. Quelques décompositions : réalisation de l'univers comme espace homogène.

Soit (U,G) une géométrie. Comme G opère transitivement sur U, si on se fixe un point O (origine) de l'univers U, et si on note H_0 le stabilisateur de O alors U peut s'identifier à G/H_0. L'univers d'une géométrie est donc un espace homogène.

Pour les trois groupes $S_- = SO_0(1,4)$, $S_+ = SO_0(2,3)$ et $P = \mathbf{R}^4 \theta SO_0(1,3)$ de la relativité einsteinienne prenons pour origine O des trois univers U_{-r}, U_0 et U_r un point tel que $H_0 = SO_0(1,3)$, le groupe de Lorentz (engendré par les transformations d'inertie).

Pour U_{-r} il faut prendre $O = (o,o,o,o,r) \in \mathbf{R}^{1+4}$

Pour U_0 il faut prendre $O = o \in \mathbf{R}^4$

Pour U_r il faut prendre $O = (r,o,o,o,o) \in \mathbf{R}^{2+3}$.

En utilisant certaines décompositions de ces groupes, faisant apparaître le groupe de Lorentz, nous obtenons une réalisation des univers. Pour S_+ et S_- ces décompositions de groupes de Lie semi-simples ne sont pas classiques (cf. Mizony [7])

GROUPE		ESPACE-TEMPS		LORENTZ	UNIVERS
$S_- = SO_0(1,4)$	=	$SO(4)/SO(3)$	$SO_0(1,1)$	$SO_0(1,3)$	espace compact temps non compact
P	=	$\mathbf{R}^{1+3}$		$SO_0(1,3)$	espace et temps non compact
$S_+ = SO_0(2,3)$	=	$SO(2)$	$SO_0(1,3)/SO(3)$	$SO_0(1,3)$	temps compact espace non compact

C'est une description classique des univers. Nous remettrons en cause en partie cette description en tenant compte de la causalité globale.

II. Le formalisme hilbertien de la mécanique quantique.

Soit (U,G) une géométrie de l'univers.

a) Les trois premières hypothèses : Classification des systèmes de particules.

HYPOTHESE 1 : Pour tout système S de particules, l'espace des états purs est l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace de Hilbert complexe $\mathscr{H}_S$. De plus deux vecteurs $\mathbb{C}$ -colinéaires représentent le même état pur.

Notations. 1 - Si $\psi \in \mathscr{H}_S$ avec $||\psi|| = 1$, nous noterons $\vec{\psi} = \{e^{i\alpha}\psi \,/\, \alpha \in \mathbf{R}\}$, l'état pur correspondant au vecteur ψ. Nous noterons $\vec{\mathscr{H}}_S$ l'ensemble des états purs. L'ensemble $\vec{\mathscr{H}}_S$ est en bijection avec l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de $\mathscr{H}_S$.

2 - Si $\vec{\psi}_1$ et $\vec{\psi}_2$ sont deux états purs alors $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$ est indépendant des représentants $\psi_1 \in \vec{\psi}_1$ et $\psi_2 \in \vec{\psi}_2$. Ainsi $|\langle\vec{\psi}_1|\vec{\psi}_2\rangle|^2$ a un sens et s'appelle la probabilité de transition de l'état $\vec{\psi}_1$ à l'état $\vec{\psi}_2$.

Définition 1 : On appelle opérateur de symétrie $\vec{U}$ d'un système S, une bijection de $\vec{\mathscr{H}}_S$ sur $\vec{\mathscr{H}}_S$ qui conserve les probabilités de transitions.

Hypothèse 2 : Soit S un système de particules, $\vec{\mathscr{H}}_S$ l'espace de ses états purs. A tout élément $g \in G$ (groupe de symétrie), est associé un unique opérateur de symétrie $\vec{\pi}_g$ sur $\vec{\mathscr{H}}_S$ tel que $\vec{\pi}_e = \vec{id}$ et $\vec{\pi}_{g_1 g_2} = \vec{\pi}_{g_1} \circ \vec{\pi}_{g_2}$ pour tout $g_1, g_2 \in G$.

Pour comprendre cette hypothèse rappelons le :

Théorème de Wigner : Si pour un groupe connexe G on a pour tout $g \in G$ un opérateur de symétrie $\vec{\pi}_g$ sur $\vec{\mathscr{H}}$ tel que $\vec{\pi}_e = \vec{id}$ et $\vec{\pi}_{g_1 g_2} = \vec{\pi}_{g_1} \circ \vec{\pi}_{g_2}$ pour tout $g_1, g_2 \in G$, alors il existe une application π de G dans les opérateurs unitaires de l'espace hilbertien $\mathscr{H}$ qui vérifie :

i) $\forall g \in G$, $\forall \psi \in \vec{\psi} \in \vec{\mathscr{H}}$, $\pi_g(\psi) \in \vec{\pi}_g(\vec{\psi})$.

ii) $\pi_e = id$ et $g \mapsto \pi_g$ est continue de G dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

iii) $\pi_{g_1} \circ \pi_{g_2} = \omega(g_1, g_2)\ \pi_{g_1 g_2}$, $\forall g_1, g_2 \in G$, et avec $\omega(g_1, g_2) \in \mathbb{C}$ et de norme 1.

Une telle application s'appelle une représentation projective de G dans $\mathscr{H}$, de multiplicateur ω. De plus pour tout autre représentation π' de G dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ qui vérifie i), ii) et iii), on a $\pi'_g = \phi(g)\,\pi_g$ où ϕ est une application de G dans l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. π et π' sont dites équivalentes.

Ainsi l'hypothèse 2 signifie : A tout système de particules S est associé une classe de représentations unitaires projectives du groupe cinématique G dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_S)$.

Définition 2 : Un système de particules S est dit élémentaire si la classe de représentations associée est irréductible.

Hypothèse 3 : Soit S le système de particules formé par la réunion (sans interaction) de deux systèmes S_1 et S_2 ; alors la classe de représentations π_S associée à S est la classe $\pi_{S_1} \otimes \pi_{S_2}$ produit tensoriel des représentations π_{S_1} et π_{S_2} associées à S_1 et S_2 . (L'espace $\mathscr{H}_S$ est $\mathscr{H}_{S_1} \otimes \mathscr{H}_{S_2}$).

Ainsi pour classifier les systèmes quantiques (libres) dans une géométrie de l'univers (U,G) nous sommes amenés par ce formalisme hilbertien à calculer les classes de représentations unitaires projectives irréductibles du groupe G.

Remarque. Pour les groupes cinématiques présentés, certains paramètres qui apparaissent dans la classification des représentations irréductibles s'interprètent aisément physiquement comme représentant le spin du système ou la masse (l'énergie) du système. Mais l'adéquation entre représentations irréductibles et particules élémentaires est loin d'être parfaite (même pour le groupe de Poincaré).

b) Sur les observables et les états :

Soit $(\pi_S, \mathscr{H}_S)$ une représentation de G associée au système S.

Soit $\vec{\psi}$ un état pur, alors à $\psi \in \vec{\psi}$ on associe le projecteur de rang 1 sur $\mathscr{H}_S$ défini par $\xi \to \langle \xi | \psi \rangle \psi$. Cet opérateur ne dépend pas du représentant $\psi \in \vec{\psi}$. Ainsi un état pur est un opérateur de rang 1 sur $\mathscr{H}_S$.

Hypothèse 4 : L'ensemble des états du système S, (superposition des états purs) sont les opérateurs positifs, à trace et de trace 1 sur $\mathscr{H}_S$.

Historiquement, les observables définies par les physiciens sont des opérateurs non bornés, hermitiens, définis sur des sous-espaces partout dense de l'espace $\mathscr{H}_S$. Puis s'est imposé le fait que ces opérateurs étaient des opérateurs essentiellement auto-adjoints (c'est-à-dire intégrale de leurs projecteurs spectraux). On a donc l'hypothèse suivante sur les observables.

Hypothèse 5 : Les observables d'un système physique S sont les opérateurs essentiellement auto-adjoints sur $\mathscr{H}_S$ tels que tous leurs projecteurs appartiennent à la W*-algèbre VN_{π_S} ; l'algèbre de Von Neumann VN_{π_S} étant la W*-algèbre d'opérateurs sur $\mathscr{H}_S$ engendrée dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_S)$ par les $\pi_S(g)$, pour $g \in G$.

Remarques. 1°) Si $(\pi_S, \mathscr{H}_S)$ est une représentation unitaire de multiplicateur trivial, (ce qui ne constitue pas une restriction du fait de la construction des représentations projectives), alors les états sont encores les formes linéaires positives, de norme 1, ultrafaiblement continues sur VN_{π_S} , et les états purs sont les points extrémaux de ce cône tronqué.

2°) Si de plus π_S est irréductible, ou produit tensoriel fini de représentations unitaires irréductibles, on peut identifier l'ensemble des états à l'ensemble des fonctions de type positif sur G, de norme 1 et appartenant à l'espace A_{π_S} ; les états purs sont les points extrémaux de ce cône tronqué de A_{π_S}.

Cette remarque est une conséquence de résultats établit par G. Arsac [1] et P. Nouyrigat [9], qui ont défini et étudié les espaces A_π et VN_π associés à une représentation π d'un groupe. (Voir P. Bonnet [3] pour l'intérêt de ces espaces A_π).

III. Une remise en cause du formalisme hilbertien.

1°) Un résultat négatif.

Soit $G = SO_0(1,4)$ le groupe de De Sitter. Considérons les représentations unitaires irréductibles $\pi_{\lambda,\sigma}$ de la série principale de $SO_0(1,4)$, ces représentations étant indexées par $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\sigma \in \widehat{SO(3)}$, plus précisément :

Soit $K = SO(4)$, $M = SO(3)_{1,2,3}$, $A = SO_0(1,1)_{0,4}$ le sous-groupe de translations de temps ; soit $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa (N est isomorphe à $\mathbb{R}^3$).

Soit MAN le parabolique. Soit $\lambda \in \hat{A}$ un caractère du groupe $A \simeq \mathbb{R}$ et $\sigma \in \widehat{SO(3)}$ de dimension d_σ. Alors $\lambda \otimes \sigma$ est une représentation de MAN et $\pi_{\lambda,\sigma} = \mathrm{Ind}_{MAN}^{G} \lambda \otimes \sigma$ qui se réalise dans $L^2(SO(4)/SO(3), \mathbb{C}^{d_\sigma})$.

Les représentations $\pi_{\lambda,\sigma}$ et $\pi_{-\lambda,\sigma}$ qui sont conjuguées, sont unitairement équivalentes.

Soit $P = \mathbb{R}^4 \otimes SO_0(1,3)$ le groupe de Poincaré. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ et soit $\lambda e_0 \in (\mathbb{R}^4)^*$ un caractère de $\mathbb{R}^4$. $SO_0(1,3)$ agit sur $(\mathbb{R}^4)^*$ et le stabilisateur du point λe_0 est $SO(3)$. Par la théorie de Mackey nous avons la famille suivante de représentations unitaires irréductibles de P : Soit $\sigma \in \widehat{SO(3)}$, alors $\lambda e_0 \otimes \sigma$ est une représentation de $\mathbb{R}^4 \otimes SO(3)$ et $U_{\lambda,\sigma} = \mathrm{Ind}_{\mathbb{R}^4 \otimes SO(3)}^{P} \lambda e_0 \otimes \sigma$ est une représentation (unitaire et irréductible) qui se réalise dans $L^2(SO_0(1,3)/SO(3), \mathbb{C}^{d_\sigma})$.

De plus $U_{\lambda,\sigma}$ et $U_{-\lambda,\sigma}$ ne sont pas équivalentes.

Considérons alors la contraction de $SO_0(1,4)$ vers $\mathbb{R}^4 \otimes SO_0(1,3)$ parallèlement au groupe de Lorentz $SO_0(1,3)$: c'est la contraction espace-temps, la courbure de l'univers tend vers zéro.

Nous avons le résultat suivant (cf. PRIMET [10]) :

" $\lim_{r \to 0} \pi_{\frac{\lambda}{|r|}, \sigma} = U_{\lambda,\sigma} \oplus U_{-\lambda,\sigma}$ "

(nous préciserons ce résultat au paragraphe suivant), qui signifie que la limite, quand la courbure de l'univers tend vers zéro, de la représentation $\pi_{\frac{\lambda}{|r|}, \sigma}$ converge vers la somme des deux représentations $U_{\lambda,\sigma}$ et $U_{-\lambda,\sigma}$. $U_{\lambda,\sigma}$ pour $\lambda > 0$, représente la particule d'énergie positive λ (ou de masse λ , $c = 1$) et de spin σ dans l'univers plat ; $U_{-\lambda,\sigma}$ n'a aucun sens physique. Pour $\pi_{\frac{\lambda}{|r|}, \sigma}$ si $\frac{\lambda}{r}$ représente bien une énergie (dual du groupe des translations de temps agissant sur l'univers U_r) et σ un spin (entier ou 1/2 entier si on prend les projectives de $SO(3)$) ; ce résultat établit que $\pi_{\frac{\lambda}{|r|}, \sigma}$ convient mal pour paramétrer la particule de masse $\frac{\lambda}{|r|}$ et de spin σ, dans la mesure où par contraction $\pi_{\frac{\lambda}{|r|}, \sigma}$ est une somme de représentations, la notion de somme n'ayant aucun sens physique.

III.2. Les contractions de groupes : (cf. Dooley et Rice [5]).

Soit G un groupe de Lie contenant un sous-groupe réductif H : c'est-à-dire il existe dans l'algèbre de Lie $\underline{G}$ un supplémentaire V de la sous-algèbre $\underline{H}$ qui est $ad_{\underline{H}}$-invariant. Donc H agit sur V considéré comme espace vectoriel.

Soit G' le groupe produit semi-direct $G' = V \oplus H$, on dit que G' est le contracté de G parallèlement au sous-groupe réductif H.

La contraction est la donnée d'une famille d'automorphismes $\Phi_r, r > 0$, de $\underline{G}$ considéré comme espace vectoriel ($\underline{G}$ et $\underline{G'}$ ont le même espace vectoriel sous-jacent), tels que $\Phi_r/\underline{H} = id$ et tels que pour $X = X_{V'} + X_{\underline{H}} \in V \oplus \underline{H}$ on a $\Phi_r(X) = rX_{V'} + X_{\underline{H}}$. Le rapport entre le crochet de Lie $[X,Y']$ dans $\underline{G'}$ et le crochet $[X,Y]$ dans $\underline{G}$ est : $[X,Y] = \lim_{r \to 0} \Phi_r^{-1}([\Phi_r(X),\Phi_r(Y)])$.

Au niveau des groupes la contraction est définie par une famille d'applications P_r, $r > 0$, de G' dans G telles que $\Phi_r = dP_r$; plus précisément pour $(x,h) \in G' = V \oplus H$ on a $P_r(x,h) = \exp_G(rx)h \in G$.

Exemples : a) La contraction "espace-temps" du groupe de De Sitter $S_- = SO_0(1,4)$ vers le groupe de Poincaré $P = \mathbb{R}^4 \oplus SO_0(1,3)$. Cette contraction se fait parallèlement au groupe de Lorentz $L = SO_0(1,3)$.

Donnons l'expression de la famille d'applications P_r , $r > 0$, sur le sous-semi-groupe de Poincaré P_+ : Soit x un vecteur du genre temps > 0, ($\|x\|_{1,3} > 0$ et $x_0 > 0$) ; soit $r > 0$, qui représente la valeur absolue de la courbure de l'espace-temps, posons $k = r\|x\|_{1,3}$. Il existe $h' \in SO_0(1,3)$ tel que $x = \frac{k}{r} h'.e_0$. Alors pour $(x,h) \in P_+$ on a

$$P_r(x,h) = h' a_{rk} h'^{-1} h \in S_-.$$

PROPOSITION: Pour tout $r > 0$ P_r est un difféomorphisme du semi-groupe de causalité P_+ sur le semi-groupe de causalité $(S_-)_+$ du groupe de De Sitter.

b) Contraction "vélocité-espace" du groupe de Poincaré vers le groupe de Galilée : c'est une contraction de $P = \mathbb{R}^4 \oplus SO_0(1,3)$ vers $G = (\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^3) \oplus SO(3)$

parallèlement au sous-groupe $H = \mathbf{R} \times SO(3)$, produit direct des translations de temps et des rotations spatiales.

Donnons la famille P_r d'applications de G dans P :

$P_r(t,\vec{o},\vec{o},R) = ((\vec{t},\vec{o}),R) \in P$

$P_r(o,\vec{x},\vec{o},id) = ((o,r\vec{x}),id) \in P$

$P_r(o,\vec{o},ke_i,id) = (o,a^i_{rk}) \in P$ où e_i désigne la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $a^i_{rk} \in SO_o(1,1)_{o,i} \subset P$, agissant canoniquement sur les coordonnées d'indices o et i .

La famille P_r est ainsi parfaitement définie, mais P_r n'est pas une bijection de G sur P.

Soit $G_+ = \{(t,\vec{x},\vec{v},R) \in G/t > o\}$ le semi-groupe de causalité globale du groupe de Galilée ; considérons pour $r > 0$, le sous-semi-groupe $P_{+,r}$ de causalité globale du groupe de Poincaré, pour lequel la vitesse de la lumière est $c = \frac{1}{r}$, et la forme de Minkowski est $\| x\|^2_r = \frac{1}{r^2} x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ sur $\mathbf{R}^4$.

Proposition : $P_{+,r} = \{ (x,h) \in P / x_o > 0$ et $\| x\|^2_r > 0\}$ et P_r est un difféomorphisme du semi-groupe G_+ sur le semi-groupe $P_{+,r}$.

Ecrivons alors plus précisément le résultat du paragraphe III.1.

Soit $f \in L^2(SO(4)/SO(3) , \mathbb{C}^{d_\sigma})$.

Comme $SO_o(1,4) = K\ A\ N$, décomposition d'Iwasawa

$= \overline{H\ W\ A\ N}$, décomposition du type Iwasawa relatif au sous-groupe $H = SO_o(1,3)$, où W est un groupe de Weyl (à deux éléments), alors on peut identifier HW/SO(3) à un ouvert partout dense dans SO(4)/SO(3). Ainsi $f = f_+ + f_-$ avec $f_+, f_- \in L^2(SO_o(1,3)/SO(3), \mathbb{C}^{d_\sigma})$.

Le résultat s'énonce alors : pour $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$, $\sigma \in \widehat{SO(3)}$, et pour $(x,h) \in P = \mathbf{R}^4 \theta SO(3)$, $\lim_{r \to 0} \pi_{\frac{\lambda}{|r|}} \circ P_r(x,h)f = U_{\lambda,\sigma}(x,h)f_+ + U_{-\lambda,\sigma}(x,h)f_-$,

la limite étant simple en tout point où f est continue et uniforme par rapport aux compacts de Poincaré.

III.3. Un peu plus sur les semi-groupes de causalités ; cônes du futur.

Soit (U,G) une géométrie de l'univers. Soit H le sous-groupe de G engendré par les rotations spatiales et par les transformations d'inertie. Soit A_+ le semi-groupe des translations positives de temps.

Soit G_+ le semi-groupe engendré par H et A_+ dans G.

Prenons un point O de l'univers U et soit H_0 le stabilisateur de O, alors H_0 est un sous-groupe conjugué à H dans G (autrement dit, il existe une origine O de l'univers tel que $H_0 = H$).

Définition : Appelons cône du futur C(O) d'un point O de l'univers, l'image de O par le semi-groupe G_+ de causalité globale.

Ce cône du futur peut s'identifier à $C(O) \simeq G_+/H$.

Exemples : Pour la géométrie $(U_{-r}, SO_0(1,4))$; $H = SO_0(1,3)$,

$G_+/H \simeq SO_0(1,3)/SO(3) \times SO_0(1,1)^*_+$

Pour la géométrie $(U_r, SO_0(1,3)$; $H = SO_0(1,3)$,

$G/H = G_+/H \simeq SO_0(1,3)/SO(3) \times SO(2)$

Pour la géométrie $(U_0, \mathbb{R}^4 \otimes SO_0(1,3))$; $H = SO_0(1,3)$,

$G_+/H \simeq C \simeq SO_0(1,3)/SO(3) \times \mathbb{R}^*_+$.

Dans cette description, pour les trois géométries einsteinniennes ci-dessus, l'espace $\simeq SO_0(1,3)/SO(3)$ est non compact.

III.4. Représentations des semi-groupes $C \otimes SO_0(1,3)$ et $SO_0(1,4)_+$; contractions de représentations .

Théorème de Kaneta (cf. [6]) : La restriction à $P_+ = C \otimes SO_0(1,3)$ de toute représentation projective du groupe de Poincaré $\mathbb{R}^4 \otimes SO_0(1,3)$ est irréductible.

Construction de représentations hilbertiennes isométriques de $SO_0(1,4)_+$:

. soit $G = SO_0(1,4) = K\,A\,N$ la décomposition d'Iwasawa ($K = SO(4)$, $A = SO_0(1,1)_{0,4}$ $N \simeq \mathbb{R}^3$) ;

. soit M A N le parabolique où $M = SO(3)_{1,2,3}$ et $H = SO_0(1,3)_{0,1,2,3}$.

Considérons H A N c'est une partie ouverte de G contenant M A N. G_+ agit par translations sur H A N (mais cette action ne s'étend pas à G). Par suite G_+ agit sur $H/M \simeq H\,A\,N\,/\,M\,A\,N$. Du fait de cette action on peut construire une famille de représentations $\tilde{\pi}_{\lambda,\sigma}$, où $(\sigma, \mathbb{C}^{d_\sigma})$ est une représentation projective de SO(3) et où $\lambda \in \mathbb{C}$ définit un morphisme de A dans $\mathbb{C}^*$.

Cette représentation $\tilde{\pi}_{\lambda,\sigma}$ se realise dans l'espace hilbertien $L^2(SO_0(1,3)/SO(3), \mathbb{C}^{d_\sigma})$ et on a les résultats suivants :

Théorème (cf. Mizony [7]).

i) pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tilde{\pi}_{\lambda,\sigma}$ est une représentation hilbertienne isométrique et irréductible du semi-groupe $(SO_0(1,4))_+$

ii) $\tilde{\pi}_{\lambda,\sigma}$ est équivalente à une sous-représentation de la restriction à G_+ de la représentation $\pi_{\lambda,\sigma}$ de la série principale de $SO_0(1,4)$.

iii) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\lim_{r \to 0} \pi_{\frac{\lambda}{r},\sigma} \circ P_r(x,h) f = U_{\lambda,\sigma}(x,h) f$ simplement sur $SO_0(1,3)/SO(3)$ pour toute fonction continue de $L^2(SO_0(1,3)/SO(3), \mathbb{C}^{d_\sigma})$; Cette convergence étant de plus uniforme par rapport aux compacts de $C \ominus SO_0(1,3)$.

Remarques. i) Nous avons contracté la famille de représentations $\tilde{\pi}_{\frac{\lambda}{r},\sigma}$ du semi-groupe $SO_0(1,4)_+$ vers la représentation unitaire $U_{\lambda,\sigma}$ du semi-groupe P_+ de Poincaré ; nous avons pris $\lambda \in \mathbb{R}^+$, mais nous pouvons définir de la même manière les représentations $U_{\lambda,\sigma}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ en considérant λe_0 comme un morphisme de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{C}^*$, et nous avons, pour $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$, des représentations qui diminuent les normes et $\lim_{r \to 0} \pi_{\frac{\lambda}{r},\sigma} P_r(x,h) f = U_{\lambda,\sigma}(x,h) f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) \geqslant 0$.

En fait $\{\pi_{\lambda,id} / \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\lambda) \geqslant 0\}$ s'interprète comme le demi-plan de définition de la transformation de Laplace-Jacobi associée au groupe $SO_0(1,4)$ et $\{U_{\lambda,id} / \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\lambda) \geqslant 0\}$ s'interprète comme le demi-plan de définition de la transformation de Laplace-Bessel (cf. Mizony [7], [8]). Enfin le théorème ci-dessus est valable pour $SO_0(1,n)$ et $\mathbb{R}^n \ominus SO_0(1,n-1)$, avec $n \geqslant 2$.

ii) Pour $\lambda = 0$ $\lim_{r \to 0} \tilde{\pi}_{o,\sigma} \circ P_r$ est une représentation du semi-groupe de Poincaré ; cette représentation se décompose et son support est l'adhérence pour la topologie de Fell sur $\hat{P}$ de la représentation de masse nulle et d'hélicité σ (cf. Dague [4] , pour la topologie de Fell sur $\hat{P}$).

Ce sont ces deux théorèmes qui m'ont suggéré de modifier le formalisme hilbertien de la mécanique quantique.

III.5. Modifications du formalisme hilbertien.

. L'hypothèse 1 est inchangée (un état d'un système S est une raie d'un espace de Hilbert complexe $\mathscr{H}_S$), la notion de probabilité de transition également.

Définition 1' : i On appelle opérateur de symétrie $\vec{U}$ d'un système S, une bijection de $\vec{\mathscr{H}}_S$ sur $\vec{\mathscr{H}}_S$ qui conserve les probabilités de transitions.

ii) On appelle opérateur d'évolution $\vec{U}$ d'un système S, une injection de $\vec{\mathscr{H}}_S$ dans $\vec{\mathscr{H}}_S$ qui conserve les probabilités de transitions.

l'hypothèse 2 devient alors :

Hypothèse 2' : Soit S un système, $\vec{\mathscr{H}}_S$ l'espace de ses états purs. A tout élément $g \in G_+$ le semi-groupe de causalité dans la géométrie (U,G), est associé un opérateur d'évolution $\vec{U}_g$ sur $\vec{\mathscr{H}}_S$ tel que $\vec{U}_e = \vec{id}$ et $\vec{U}_{g_1,g_2} = \vec{U}_{g_1} \circ \vec{U}_{g_2}$ pour tout $g_1, g_2 \in G_+$. (Si $g \in G_+$ est inversible dans G_+ alors $\vec{U}_g$ est un opérateur de symétrie).

Le théorème de Wigner s'applique à tout sous-groupe connexe de G_+, en particulier à H ; mais il ne s'applique pas à G_+ . Aussi remplaçons l'hypothèse 2' par l'hypothèse raisonnable suivante :

Hypothèse 2" : A tout système S de particules est associée la classe d'équivalence d'une représentation projective isométrique $(\pi_S, \mathscr{H}_S)$ du semi-groupe de causalité globale G_+.

La définition 2 d'un système élémentaire et l'hypothèse 3 concernant un système réunion sans intéraction de deux systèmes sont inchangées.

Ainsi dans ce formalisme modifié (hypothèse 2"), pour classifier les systèmes quantiques nous sommes amenés à calculer les classes de représentations projectives hilbertiennes isométriques du semi-groupe de causalité globale.

Remarques : i) Pour le groupe de De Sitter $SO_0(2,3)$ les deux formalismes sont identiques.

ii) Pour le groupe de Poincaré, il en est de même du fait du théorème de Kanéta.

iii) Par contre pour le groupe de De Sitter $SO_0(1,4)$, les deux formalismes donnent des résultats différents. Le formalisme modifié semble plus adéquat du fait des premiers résultats obtenus par contraction de représentations.

Les hypothèses 4 et 5 sur les états et les observables restent identiques si l'on définit VN_{π_S} comme étant la W*-algèbre engendrée dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_S)$ par les opérateurs $\pi_S(g)$ pour $g \in G_+$.

Questions : i) Il serait intéressant de définir et d'étudier l'objet A_π d'une représentation projective hilbertienne isométrique π d'un semi-groupe, en vue d'obtenir une autre réalisation de l'espace des états.

ii) Pour conforter ce formalisme modifié il faudrait calculer les représentations isométriques des semi-groupes de Galilée, de Newton, et étudier les contraction des représentations du semi-groupe de Poincaré vers le semi-groupe de Galilée, etc... .

Bibliographie.

[1] Gilbert ARSAC, *Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire d'un groupe localement compact,* Publ. Dep. Math. Lyon, tome 13 fasc. 2 (1976) p. 1-107.

[2] Henry BACRY, et Jean-Marc LEVY-LEBLOND, *Possible kinematics*, Journal of Math. Physics, vol. 9 n° 10 (1968).

[3] Pierre BONNET, *Analyse harmonique non commutative et théorie des interactions fortes,* pré-publication n° 3 , Université de St-Etienne (1980) p. 1-87.

[4] Philippe DAGUE, *Détermination de la topologie sur le dual du groupe de Poincaré,* Thèse (1976), Université - Paris VI.

[5] A.M. DOOLEY et J.W. RICE, *On contractions of semi-simple Lie groups,* Preprint (1982).

[6] H. KANETA, *Irreducibility of some unitary representations of the Poincare group with respect to the Poincare subsemigroup,* I et II. Nagoya Journal of Math., Vol. 78 (1980) p. 113-136, Vol. 87 (1982), p. 147-225.

[7] Michel MIZONY, *Analyse harmonique hyperbolique : représentations et contractions des groupes $SO_o(1,n)$,* Publ. Dep. Math. Lyon, 1982, 3/A p. 1-27.

[8] Michel MIZONY, *Une transformation de Laplace-Jacobi,* SIAM J. on Math. Anal. Vol. 14 n° 5 (1983), p. 987-1003.

[9] Paul NOUYRIGAT, *Sur le prédual de l'algèbre de Von Neumann associée à une représentation unitaire d'un groupe localement compact,* Publ. Dep. Math. Lyon, tome 9 fasc. 2 (1972), p. 31-59.

[10] Gilbert PRIMET, *Contractions de groupes de Lie semi-simples sur le groupe de Poincaré généralisé.* Publ. Dep. Math. Lyon série 6/D (1983) p. 1-69.

Voici deux ouvrages que nous avons utilisé :

Gilbert ARSAC, *Le groupe de Poincaré et ses représentations,*
Publ. Dep. Math. Lyon, 1982 3/C , p. 1-171.
1983 5/C , p. 1-117.

A.O. BARUT et R. RACZKA, *Theory of group representations and applications.* Polish scientific publishers Warzawa (1977).

****