

HENRI BUCHWALTER

DIAN JIÉ CHEN

**Une question d'extremum dans le problème des moments de Stieltjes
issue d'une inégalité logarithmique de Weisser**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 2A
« Une question d'extremum dans le problème des moments de Stieltjes issue d'une inégalité logarithmique de Weisser », , p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984__2A_A1_0

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**UNE QUESTION D'EXTREMUM DANS LE PROBLEME DES
MOMENTS DE STIELTJES ISSUE D'UNE
INEGALITE LOGARITHMIQUE DE WEISSLER**

*

BUCHWALTER Henri et CHEN Dian Jié (*)

On donne ici une légère amélioration technique dans la preuve d'une inégalité de Weissler sur le cercle, ce qui fait apparaître un problème général d'extrémum tronqué portant sur des mesures de Stieltjes.

1. INTRODUCTION.

Soit $dv = \frac{d\theta}{2\pi}$ la probabilité de Haar sur le cercle unité $U = \{z, |z| = 1\}$. Pour démontrer que les estimations hypercontractives de Nelson conviennent au semi-groupe de Poisson et au semi-groupe de la chaleur sur U , WEISSLER [3] a tout d'abord prouvé l'inégalité de Sobolev suivante

$$(1) \quad \int f^2 \text{Log } f \, dv < \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| |a_n|^2 + \|f\|_2^2 \text{Log} \|f\|_2$$

pour une fonction $f \in L^2(v)$ telle que $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta} > 0$. Cette inégalité de Sobolev a été améliorée dans le même article sous la forme suivante, que nous nommerons inégalité de Weissler dans la suite :

(*) Travail effectué lors d'un séjour à l'Université LYON I, du 1er octobre 1982 au 30 juin 1983.

$$(2) \quad \int f^2 \text{Log } f \, dv < \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n |a_n|^2 + \|f\|_2^2 \text{Log} \|f\|_2$$

sous les mêmes hypothèses sur f , où les coefficients β_n sont définis par

$$\beta_{-n} = \beta_n, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \text{si } n \geq 2.$$

La méthode utilisée par Weissler est très indirecte. Sans la reprendre dès son début rappelons qu'elle se ramène à prouver l'inégalité $G(r) \geq 0$ pour $0 < r < 1$, où la fonction G est définie par

$$(3) \quad \frac{1}{2} G(r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} (\beta_{\ell}-1) |a_{\ell}|^2 r^{2\ell} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n (n-3)! \int \frac{x_r^n}{n!} dv$$

avec $x_r(\theta) = \sum_{m \neq 0} a_m r^{|m|} e^{im\theta}$ et $a_{-m} = \overline{a_m}$. On a supposé ici

$\beta_{-n} = \beta_n$, $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 1$ et la question intéressante reste la démonstration de l'inégalité $G(r) \geq 0$ avec les constantes β_{ℓ} les plus petites possibles. Plutôt que de suivre Weissler en utilisant la formule multinomiale pour expliciter x_r^n , effectuons un calcul direct élémentaire. On a successivement

$$x_r^n = \sum_{m_1, \dots, m_n \neq 0} a_{m_1} a_{m_2} \dots a_{m_n} r^{|m_1| + \dots + |m_n|} e^{i(m_1 + \dots + m_n)\theta}$$

$$\int x_r^n dv = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n = 0 \\ m_k \neq 0}} a_{m_1} a_{m_2} \dots a_{m_n} r^{|m_1| + \dots + |m_n|}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = n_1 + \dots + n_q \\ 1 \leq p, q ; p+q = n \\ m_i \geq 1, \quad n_j \geq 1}} C_n^p a_{m_1} \dots a_{m_p} \overline{a_{n_1}} \dots \overline{a_{n_q}} r^{m_1 + \dots + m_p + n_1 + \dots + n_q} \\
 &= \sum_{\ell} \left[\sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = n_1 + \dots + n_q = \ell \\ 1 \leq p, q ; p+q = n \\ m_i \geq 1, \quad n_j \geq 1}} \frac{n!}{p!(n-p)!} a_{m_1} \dots a_{m_p} \overline{a_{n_1}} \dots \overline{a_{n_q}} \right] r^{2\ell}
 \end{aligned}$$

où le coefficient du binôme $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est apparu par le fait qu'on a regroupé ensemble les coefficients a_m correspondant à $m \geq 1$.

Comme on peut mettre r en facteur dans le développement de x_r , on peut supposer $2\ell \geq n$. Par ailleurs les conditions $m_i \geq 1$ et $n_j \geq 1$ donnent $p \leq \ell$ et $q \leq \ell$, d'où

$$\frac{1}{n!} \int x_r^n dv = \sum_{2\ell \geq n} \sum_{\substack{p=1 \\ p \leq \ell}}^{n-1} \left[\sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = \ell \\ m_i \geq 1}} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_q = \ell \\ n_j \geq 1}} \frac{a_{m_1} \dots a_{m_p}}{p!} \frac{\overline{a_{n_1}} \dots \overline{a_{n_q}}}{q!} \right] r^{2\ell}$$

Posons alors pour simplifier

$$C(p, \ell) = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = \ell \\ m_i \geq 1}} a_{m_1} \dots a_{m_p} \quad 1 \leq p \leq \ell$$

de sorte que

$$(4) \quad \frac{1}{n!} \int x_r^n dv = \sum_{2\ell \geq n} \left[\sum_p C(p, \ell) \overline{C(n-p, \ell)} \right] r^{2\ell}.$$

En reportant dans (3) on a

$$\frac{1}{2} G(r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} (\beta_{\ell} - 1) |a_{\ell}|^2 r^{2\ell} + \sum_{\ell} \left[\sum_{n=3}^{2\ell} (-1)^n (n-3)! \sum_{p=1}^{n-1} C(p, \ell) \overline{C(n-p, \ell)} \right] r^{2\ell}.$$

Dans la deuxième somme on a $3 \leq n \leq 2\ell$, donc $\ell \geq 2$ et ainsi

$$\frac{1}{2} G(r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \theta_{\ell} r^{2\ell} \quad \text{avec}$$

$$\theta_{\ell} = (\beta_{\ell}-1) |a_{\ell}|^2 + \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{\substack{n > 3 \\ p+q = n \\ q > 1}} (n-3)! D(p, \ell) \overline{D(q, \ell)}$$

où $D(p, \ell) = (-1)^p C(p, \ell)$. Par ailleurs $C(1, \ell) = a_{\ell}$ et $D(1, \ell) = -a_{\ell}$, donc

$$\theta_{\ell} = \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{q=1}^{\ell} A_{p,q} D(p, \ell) \overline{D(q, \ell)}$$

avec

$$(5) \quad A_{p,q} = \begin{cases} \beta_{\ell}-1 & \text{si } p=q=1 \\ (p+q-3)! & \text{si } p+q > 3 \quad \text{et } p, q \leq \ell \end{cases}$$

Alors la condition $G(r) > 0$ sera vérifiée chaque fois que la matrice carrée $[A_{p,q}]$ est de type positif. Le problème est donc ramené à déterminer la plus petite valeurs possible de la constante $s = s(\ell) = \beta_{\ell}-1$ pour que ce soit vrai. Or la suite $m_n = n!$ est la suite des moments de la mesure $d\mu = e^{-t} dt$ sur $[0, \infty)$, et en revenant à (5) avec $\ell > 2$, on peut poser $\ell = m+1$, $p = i+1$, $q = j+1$ et écrire que la matrice $[a_{ij}]$, $0 \leq i, j \leq m$, est de type positif avec

$$(6) \quad \begin{cases} a_{00} = \beta_{m+1} - 1 \\ a_{ij} = m_{i+j-1} & i+j > 1 \end{cases}$$

où $m_k = \int t^k d\mu(t)$. Plutôt que d'utiliser la méthode des déterminants choisie par Weissler, on est en définitive ramené, en suivant GUENNOUN [1], au problème général que l'on va maintenant étudier.

2. UN PROBLEME D'EXTREMUM SUR LES MOMENTS DE STIELTJES.

Fixons une mesure positive μ sur $[0, \infty)$ ayant des moments de tous les ordres. En posant $m_k = \int t^k d\mu$, on sait que la matrice hermitienne infinie $[m_{i+j}]$ est de type positif, donc elle l'est aussi à tout ordre n , c'est-à-dire pour $0 \leq i, j \leq n$. Mais que peut-on dire de la matrice $A_n(s)$ définie par

$$\begin{cases} a_{00} = s \\ a_{ij} = m_{i+j-1} \quad \text{si } i, j \leq n \quad \text{et } i+j \geq 1 \end{cases}$$

pour $n \geq 0$ fixé, et plus précisément comment choisir $s = s(n)$ pour que $A_n(s)$ soit de type positif? En introduisant le polynôme

$$P = \sum_{i=0}^n u_i X^i \quad \text{on voit que la somme } S = \sum_{i,j} a_{ij} u_i \bar{u}_j \quad \text{s'écrit}$$

$$S = s |P(0)|^2 + \sum_{i+j \geq 1} \int u_i \bar{u}_j t^{i+j-1} d\mu(t)$$

soit encore

$$S = s |P(0)|^2 + \int \frac{|P(t)|^2 - |P(0)|^2}{t} d\mu(t).$$

Pour que l'on ait $S \geq 0$ pour tout polynôme $P \in \mathcal{P}_n = \mathbb{C}_n[X]$, il suffit que ce soit vrai avec $P(0) = 1$ (car c'est évident si $P(0) = 0$). Le problème se règle donc en paramétrant P sous la forme $P = 1 - XQ$ avec $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ et en considérant la fonction F , définie sur $\mathcal{P}_{n-1}$ par

$$F(Q) = \int (Q + \bar{Q} - XQ\bar{Q}) d\mu$$

et le résultat s'obtient avec $s \geq M_n$ où M_n est donnée par

$$(7) \quad M_n = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{n-1}} F(Q).$$

Il est facile de voir qu'on peut supposer Q réel, donc supposer

$\mathcal{P}_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors sur $\mathcal{P}_{n-1}$ la fonction F est concave et de classe C^∞ , et sa différentielle dF_Q est l'application linéaire $T \rightarrow 2 \int (1-XQ)Td\mu$. Il est aussi facile de voir que

$$F(Q+T) - F(Q) = dF_Q(T) - \int XT^2 d\mu$$

de sorte que tout polynôme $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ vérifiant $dF_Q = 0$ réalise le maximum M_n de F . Pour un tel polynôme Q on a $\int (1-XQ)Qd\mu = 0$ et $F(Q) = \int Qd\mu$. Par ailleurs $dF_Q = 0$ signifie que $(1-XQ)$ est orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}$ dans l'espace $L^2(\mu)$. Il s'agit donc de chercher un polynôme $P_n = 1-XQ \in \mathcal{P}_n$ tel que $P_n(0) = 1$, qui soit orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}$.

Supposons maintenant μ à support infini. Il existe alors un système de polynômes orthogonaux dans $L^2(\mu)$, soit (P_n) avec $d^\circ P_n = n$, que l'on peut normaliser par la condition $P_n(0) = 1$, car on sait que les zéros de P_n sont contenus dans l'intervalle $]0, +\infty)$. Ainsi $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ est déterminé de façon unique par $1-XQ = P_n$, d'où le premier résultat :

THEOREME 1. - Soit μ une mesure positive, à support infini contenu dans $[0, \infty)$, ayant des moments de tous les ordres. Alors les constantes M_n sont données par

$$M_n = \int \frac{1-P_n(t)}{t} d\mu(t)$$

où (P_n) est la suite orthogonale dans $L^2(\mu)$ des polynômes de degré n , normalisée par la condition $P_n(0) = 1$.

Remarque 1. - La suite M_n est évidemment croissante comme il résulte de (7). Elle est même strictement croissante, car si $M_n = M_{n+1}$ alors, avec $P_n = 1 - XQ$, on a pour α réel quelconque

$$F(Q + \alpha X^n) = F(Q) + 2 \int (1 - XQ) \alpha X^n d\mu - \alpha^2 \int X^{2n+1} d\mu$$

et la fonction $\alpha \rightarrow 2\alpha \int P_n X^n d\mu - \alpha^2 m_{2n+1}$ est négative, ce qui implique $\int P_n X^n d\mu = 0$, donc P_n est orthogonal à $\mathcal{P}_n$, ce qui est absurde. On a donc lorsque $\text{supp } \mu$ est infini

$$(8) \quad 0 = M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_n < M_{n+1} < \dots$$

Remarque 2. - On a toujours l'inégalité

$$(9) \quad M_n < \int \frac{d\mu(t)}{t} < +\infty$$

car si $s = \int \frac{d\mu(t)}{t} < +\infty$, on introduit la mesure bornée $d\nu = \frac{1}{t} d\mu$ et la matrice $A_n(s)$ est construite à partir des moments de ν donc est de type positif, de sorte que $M_n \leq s$.

Remarque 3. - Si la mesure μ est à support fini de cardinal $p > 1$, on fait la même théorie en orthogonalisant jusqu'au degré $(p-1)$. On a alors

$$(10) \quad 0 = M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_{p-1} < M_p < +\infty$$

et $M_n = M_p$ pour $n \geq p$, car tout polynôme $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ est μ -presque

partout égal à un polynôme $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_{p-1}$. De plus on a

$$(11) \quad M_p = \int \frac{d\mu(t)}{t}$$

car la condition $(1-XQ) \perp \mathcal{P}_{p-1}$ implique $P_p = 1-XQ = 0$ puisque

$$\mathcal{P}_{p-1} = L^2(\mu), \text{ donc } M_p = \int Q d\mu = \int \frac{d\mu(t)}{t}.$$

Cas d'indétermination du problème de Stieltjes. - La mesure μ étant supposée fixée, à support infini contenu dans $[0, \infty)$, il lui correspond un problème des moments de Stieltjes consistant à rechercher toutes les mesures ν , à support contenu dans $[0, \infty)$ ayant les mêmes moments que μ . On sait que l'ensemble V_μ de ces mesures ν est structuré en convexe compact et que le cas d'indétermination est celui où l'on a $V_\mu \neq \{\mu\}$. Pour chaque $\nu \in V_\mu$ les polynômes P_n sont évidemment les mêmes, et aussi les constantes M_n , de sorte que d'après (9) on a

$$(12) \quad \lim M_n = \sup M_n \leq \inf_{\nu \in V_\mu} \int \frac{d\nu(t)}{t}.$$

En fait on a :

THEOREME 2. - Pour toute mesure μ on a l'égalité

$$\lim M_n = \inf_{\nu \in V_\mu} \int \frac{d\nu(t)}{t}.$$

Preuve. - C'est vrai si μ est à support fini d'après la remarque 3.

C'est vrai aussi si $M = \lim M_n$ est infinie. Supposons donc $M < +\infty$.

Alors $M > M_n$ signifie que toutes les matrices $A_n(M)$ sont de type positif. Posons donc

$$m'_0 = M, \quad m'_n = m_{n-1} \quad \text{si } n > 1$$

de sorte que $m'_{i+j+1} = m_{i+j}$. Il suit de là que les deux matrices infinies $[m'_{i+j}]$ et $[m'_{i+j+1}]$ sont de type positif, ce qui implique d'après un critère classique ([4], p. 136) qu'il existe une mesure positive λ sur $[0, \infty)$ telle que $\int t^k d\lambda(t) = m'_k$ pour $k \geq 0$. Alors la mesure $d\nu = t.d\lambda$ est telle que $\int t^k d\nu = \int t^k d\mu = m_k$, donc $\nu \in V_\mu$ et $M = m'_0 = \int d\lambda = \int \frac{d\nu(t)}{t}$. $\square$

La preuve précédente montre même que la borne inférieure est atteinte. Il en résulte que l'ensemble convexe W_μ des mesures $\nu \in V_\mu$ telles que $M = \int \frac{d\nu(t)}{t}$ est non vide. On a même mieux, en rappelant qu'on appelle face d'un convexe compact K toute partie fermée non vide F telle que la condition $x, y \in K$ et $\frac{x+y}{2} \in F$ implique $[x, y] \subset F$:

PROPOSITION 1. - Pour toute mesure μ l'ensemble W_μ est une face convexe de V_μ .

Preuve. - Si $M = +\infty$ alors $W_\mu = V_\mu$, de sorte qu'on peut supposer $M < +\infty$. Montrons d'abord que W_μ est fermée. Si $\nu_i \rightarrow \nu$ dans V_μ avec $\nu_i \in W_\mu$, on a alors en posant $f_n(t) = \inf(n, \frac{1}{t})$, l'inégalité $M = \int \frac{d\nu_i}{t} \geq \int f_n d\nu_i$. Puisque $f_n \in C_0([0, \infty))$ on peut passer à la limite et obtenir $\int f_n d\nu \leq M$, puis $\int \frac{d\nu(t)}{t} \leq M$ avec la condition $f_n(t) \uparrow \frac{1}{t}$. Ainsi $\nu \in W_\mu$ avec (12) et W_μ est fermée. Pour voir que W_μ est une face, fixons $\lambda, \nu \in V_\mu$ telles que $\frac{1}{2}(\lambda + \nu) \in W_\mu$. On a alors

$$\int \frac{d\lambda}{t} + \int \frac{d\nu}{t} = 2M$$

ce qui, avec (12), donne aussitôt $\int \frac{d\lambda}{t} = \int \frac{d\nu}{t} = M$ et $\lambda, \nu \in W_\mu$, d'où $[\lambda, \nu] \subset W_\mu$ par convexité. $\square$

Lorsque le problème des moments de Stieltjes associé à μ est déterminé, c'est-à-dire lorsque $V_\mu = \{\mu\}$, on a évidemment $W_\mu = \{\mu\}$, d'où :

COROLLAIRE. - Lorsque le problème des moments de Stieltjes associé à la mesure μ est déterminé, on a

$$\lim M_n = \int \frac{d\mu(t)}{t} < +\infty.$$

Calcul explicite des M_n dans quelques cas concrets.

Exemple 1. Polynômes de Laguerre. On choisit pour μ la mesure $d\mu = t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ avec $\alpha > 0$. On obtient pour P_n les polynômes de Laguerre normalisés par la condition $L_n^\alpha(0) = 1$ soit

$$L_n^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)} \frac{x^k}{k!}$$

d'où

$$\begin{aligned} M_n^\alpha &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)} \int_0^\infty t^{k+\alpha-2} e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k+\alpha-1} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

On vérifie aisément l'égalité

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k+\alpha-1} = \int_0^1 t^{\alpha-2} [1-(1-t)^n] dt$$

et on distingue alors deux cas suivant que $\int \frac{d\mu}{t} < +\infty$, soit $\alpha > 1$,

ou $\int \frac{d\mu}{t} = +\infty$, soit $\alpha \leq 1$.

a) $\alpha > 1$. On a immédiatement par un calcul simple

$$(13) \quad M_n^\alpha = \Gamma(\alpha-1) \left[1 - \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \right] \quad n > 1$$

et $\lim M_n^\alpha = \Gamma(\alpha-1) = \int \frac{d\mu}{t}$, ce qui rejoint le corollaire puisque le problème des moments est ici déterminé.

b) $0 < \alpha < 1$. En écrivant

$$\int_0^1 t^{\alpha-2} [1-(1-t)^n] dt = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} (1-u)^{\alpha-1} du$$

on aboutit aisément à l'expression

$$M_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k! \Gamma(\alpha)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}$$

qui se précise, pour $\alpha=1$ (cas des polynômes de Laguerre classiques) en

$$(14) \quad M_n^1 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

En écrivant $\Gamma(\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$ dans (13), on peut jouer sur l'analyticité par rapport à la variable α pour voir que les deux membres de (13) restent égaux pour $\alpha < 1$. Ceci donne une autre expression de M_n^α pour $\alpha < 1$, selon,

$$(15) \quad M_n^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} - 1 \right]$$

permettant de voir que l'on a, quand $n \rightarrow +\infty$

$$M_n^\alpha \sim \frac{\Gamma^2(\alpha)}{1-\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Par ailleurs il est facile de vérifier que la suite (M_n^α) est concave pour tout $\alpha > 0$.

Exemple 2. Polynômes de Legendre. On prend pour μ la mesure $d\mu = dt$ sur $[0,1]$, de sorte que les polynômes P_n s'obtiennent à partir des polynômes de Legendre $\tilde{P}_n$ sur $[-1,+1]$ selon $P_n(t) = \tilde{P}_n(1-2t)$ avec $\tilde{P}_n(1) = 1$. D'où

$$M_n = \int_0^1 \frac{1-P_n(t)}{t} dt = \int_{-1}^+ \frac{1-\tilde{P}_n(x)}{1-x} dx.$$

Le calcul peut se faire avec la fonction génératrice

$$(1-2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x) t^n$$

et conduit à la formule

$$(16) \quad M_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad n \geq 1.$$

Exemple 3. Polynômes de Tchebycheff. - Ici μ est la mesure

$d\mu = [t(1-t)]^{-1/2} dt$ sur $[0,1]$ et les polynômes P_n sont liés aux polynômes de Tchebycheff T_n sur $[-1,+1]$ par $P_n(t) = T_n(1-2t)$ avec $T_n(1) = 1$. Avec $x = 1-2t = \cos \theta$, on a $T_n(x) = \cos n\theta = P_n(t)$. En remarquant que $t = \frac{1-\cos \theta}{2} = \sin^2 \frac{\theta}{2}$ et en posant $\varphi = \frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient

$$P_n(t) = \cos 2n\varphi \quad \text{avec } t = \sin^2 \varphi \text{ et } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

d'où

$$M_n = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2n\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi$$

soit enfin, par le noyau de Cesaro-Féjer

$$(17) \quad M_n = 2n\pi.$$

Exemple 4. Polynômes ultrasphériques. - On prend pour μ la mesure $d\mu = [t(1-t)]^{1/2} dt$ sur $[0,1]$. Avec $x=1-2t = \cos \theta$ et $\varphi = \frac{\theta}{2}$, on obtient $P_n(t) = U_n(x)$, où U_n est tel que

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)\sin \theta}$$

pour vérifier la condition $U_n(1) = 1$. Il suit facilement de là que

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \varphi \left[1 - \frac{\sin 2(n+1)\varphi}{(n+1)\sin 2\varphi} \right] d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{K_{n+1}}{n+1} \quad \text{avec} \quad K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2n\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Or $K_1 = \frac{\pi}{2}$ et un calcul immédiat montre que $K_{n+1} = K_n$ pour $n \geq 1$, donc en résumé

$$(18) \quad M_n = \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1}.$$

3. LES POLYNOMES DE JACOBI.

Les exemples 2, 3, 4 constituent des cas particuliers du cas général où μ est la mesure de Jacobi $d\mu = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$ sur $[0,1]$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, liée aux polynômes de Jacobi. Avec $x = 1-2t$, on obtient précisément les polynômes de Jacobi $J_n^{\alpha, \beta}(x)$, exprimés à partir de la fonction hypergéométrique

$$\begin{aligned} F(a, b, c, x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)b(b+1)\dots(b+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1) k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} x^k \end{aligned}$$

(avec la notation condensée $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$ si $k \geq 1$)
selon

$$(19) \quad J_n^{\alpha, \beta}(x) = F(-n, n+\alpha+\beta-1, \alpha, \frac{1-x}{2})$$

pour obtenir la condition $J_n^{\alpha, \beta}(1) = 1$. On aura donc en fait

$$(20) \quad P_n(t) = P_n^{\alpha, \beta}(t) = F(-n, n+\theta-1, \alpha, t)$$

avec $\theta = \alpha + \beta$, ce qui donne la formule condensée

$$(21) \quad M_n = M_n^{\alpha, \beta} = \int_0^1 \frac{1-F(-n, n+\theta-1, \alpha, t)}{t} d\mu(t).$$

On fait maintenant quelques transformations permettant une meilleure
approche de M_n . Par développement on a

$$\begin{aligned} -M_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\alpha)_k k!} \int_0^1 t^{k+\alpha-2} (1-t)^{\beta-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\alpha)_k k!} \frac{\Gamma(\alpha+k-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta+k-1)} \quad \theta = \alpha + \beta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} \frac{\theta+k-1}{\alpha+k-1} \end{aligned}$$

avec $(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha+k-1) = \Gamma(\alpha)(\alpha)_k$ et la même formule avec θ . D'où

$$-M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} \left[1 + \frac{\beta}{\alpha+k-1} \right].$$

Or on sait, avec [2], p. 239-240, comme conséquence de la théorie
des fonctions hypergéométriques contiguës, que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} = F(-n, n+\theta-1, \theta, 1) = 0$$

ce qui permet d'écrire

$$(22) \quad M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \left[1 - \beta \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} \frac{1}{\alpha+k-1} \right].$$

On introduit alors la fonction $G_\theta(t)$

$$(23) \quad G_\theta(t) = - \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} t^{k-1} = \frac{1-F(-n, n+\theta-1, \theta, t)}{t}$$

qui vérifie $G_\theta(1) = 1$, et qui permet d'exprimer M_n sous la forme

$$(24) \quad M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \left[1 + \beta \int_0^1 G_\theta(t) t^{\alpha-1} dt \right]$$

l'avantage de cette formulation étant qu'elle sépare assez bien les influences respectives de α , β et $\theta = \alpha + \beta$.

Maintenant il est facile de vérifier, par développement, que l'on a

$$\begin{aligned} G_\theta(t) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_{k+1} (n+\theta-1)_{k+1}}{(\theta)_{k+1} k!} \frac{t^k}{k+1} \\ &= \frac{n(n+\theta-1)}{\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n+1)_k (n+\theta)_k}{(\theta+1)_k k!} \frac{t^k}{k+1} \end{aligned}$$

de sorte que G_θ vérifie l'équation différentielle

$$(25) \quad [tG_\theta(t)]' = \frac{n(n+\theta-1)}{\theta} F(-n+1, n+\theta, \theta+1, t).$$

De là on tire par intégration par parties, compte tenu que $G_\theta(1) = 1$, la relation

$$(26) \quad \frac{n(n+\theta-1)}{\theta} \int_0^1 F(-n+1, n+\theta, \theta+1, t) t^{\alpha-1} dt = 1 - (\alpha-1) \int_0^1 G_\theta(t) t^{\alpha-1} dt$$

ce qui donne une nouvelle expression de M_n , valable pour $\alpha \neq 1$

$$(27) \quad M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha-1)\Gamma(\theta)} \left[\theta-1 - \frac{\beta n(n+\theta-1)}{\theta} \int_0^1 F(-n+1, n+\theta, \theta+1, t) t^{\alpha-1} dt \right].$$

L'expression de M_n va alors s'obtenir avec le lemme suivant :

LEMME. - Pour $\alpha > 0$ et $\theta > 0$ on a l'égalité

$$(28) \quad \int_0^1 F(-n, n+\theta, \theta, t) t^{\alpha-1} dt = \frac{n!}{(\alpha)_{n+1}} \frac{(\theta-\alpha)_n}{(\theta)_n}.$$

Preuve. - Un calcul élémentaire pour $n = 0, 1, 2$ donne la forme présumée de l'intégrale, de sorte que nous démontrerons l'égalité en identifiant les deux termes. Considérons l'intégrale comme une fonction $H(\alpha)$, θ étant lu comme un paramètre. Par développement on a

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\theta)_k}{(\theta)_k k!} \frac{1}{k+\alpha}$$

ce qui fournit la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $H(\alpha)$. Maintenant si P est un polynôme de degré au plus égal à n , on peut aussi décomposer la fonction rationnelle

$$K(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{(\alpha)_{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{k+\alpha}$$

et calculer aisément les coefficients A_k par

$$A_k = \frac{(-1)^k P(-k)}{k! (n-k)!}.$$

En appliquant ceci au polynôme $P(\alpha) = \frac{n!}{(\theta)_n} (\theta - \alpha)_n$ on obtient l'égalité

$$A_k = \frac{n!}{(\theta)_n} \frac{(-1)^k (\theta + k)_n}{k! (n-k)!}$$

et on vérifie immédiatement que A_k s'écrit aussi

$$A_k = \frac{(-n)_k (n+\theta)_k}{(\theta)_k k!}$$

ce qui fournit bien l'égalité $K(\alpha) = H(\alpha)$. $\square$

En revenant à (27), il suffit d'utiliser le lemme en changeant n en $n-1$ et θ en $\theta+1$ pour obtenir la valeur de M_n pour $\alpha \neq 1$. Ainsi

THEOREME 2. - Pour $\alpha \neq 1$ les constantes $M_n^{\alpha, \beta}$ de Jacobi sont données, avec $\theta = \alpha + \beta$, par

$$(29) \quad M_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha-1)\Gamma(\theta)} \left[\theta-1 - \frac{(\beta)_n}{(\alpha)_n} \frac{n! (n+\theta-1)}{(\theta)_n} \right]$$

et pour $\theta \neq 1$, par la forme simplifiée

$$(30) \quad M_n^{\alpha, \beta} = \frac{\theta-1}{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \left[1 - \frac{(\beta)_n}{(\alpha)_n} \frac{n!}{(\theta-1)_n} \right].$$

Remarque 4. - Le problème des moments de Jacobi étant évidemment déterminé, on doit retrouver les résultats prouvés en 2. En effet, pour $\alpha > 1$ (donc $\theta > 1$) on a

$$M_n \rightarrow \frac{\theta-1}{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} = \int \frac{d\mu(t)}{t}$$

et pour $\alpha < 1$

$$M_n \sim \frac{\Gamma^2(\alpha)}{1-\alpha} n^{2(1-\alpha)} \rightarrow \int \frac{d\mu(t)}{t} = +\infty$$

comme conséquence de l'équivalence

$$\frac{(n+\theta-1)n!\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\theta)} \sim \Gamma(\alpha)n^{2(1-\alpha)}.$$

Le cas des polynômes ultrasphériques généraux, correspondant à $\beta=\alpha$, se règle aussitôt.

THEOREME 3. - Pour $\alpha \neq 1$ les constantes $M_n^{\alpha,\alpha}$ ultrasphériques sont données par

$$(31) \quad M_n^{\alpha,\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha)^2}{(\alpha-1)\Gamma(2\alpha)} \left[2\alpha-1 - \frac{n!}{(2\alpha)_{n-1}} \right].$$

A titre de vérification on retrouve $M_n = 2n\pi$ pour le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ des polynômes de Tchebycheff et $M_n = \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1}$ pour le cas $\alpha = \frac{3}{2}$ traité directement, en accord avec (17) et (18).

Le cas limite $\alpha=1$. - La valeur $\alpha=1$ est évidemment particulière puisque c'est la valeur qui sépare les deux conditions $\int \frac{d\mu}{t} < +\infty$ et $\int \frac{d\mu}{t} = +\infty$. Le calcul de $M_n^{1,\beta}$ se fait alors par passage à la limite, compte tenu que l'expression (24) garantit la continuité par rapport à α . En partant de (29) on a

$$M_n^{\alpha,\beta} = \Gamma(\alpha) \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{(\theta-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} - \frac{(n+\theta-1)\Gamma(n+\beta)n!\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\theta)} \right]$$

$$= \Gamma(\alpha) \frac{R(\alpha)}{\alpha-1} \quad \text{avec } R(1) = 0.$$

On a donc $M_n^{1,\beta} = R'(1)$ en dérivant par rapport à α . Le calcul donne sans difficulté

$$R'(1) = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{n+\beta} + \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma'(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} - \frac{\Gamma'(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}$$

et compte tenu que la fonction $\Phi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ vérifie l'équation fonctionnelle $\Phi(x+1) - \Phi(x) = \frac{1}{x}$, on obtient :

THEOREME 4. - Pour le cas limite $\alpha=1$ les constantes de Jacobi sont données par

$$(32) \quad M_n^{1,\beta} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \dots + \frac{1}{\beta+n-1}.$$

Pour $\beta=1$, qui est le cas des polynômes de Legendre, on retrouve la valeur (16). Pour le cas $\beta=3$ on a, de façon plus condensée

$$(33) \quad M_n^{1,3} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{3}{2} + \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

Remarque 5. - On sait que les polynômes de Laguerre peuvent s'obtenir comme cas limite des polynômes de Jacobi. Ainsi en introduisant la mesure $dv_k = t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{k}\right)^{k-1} dt$ sur l'intervalle $[0,k]$, on voit facilement que

$$M_n(v_k) = k^{\alpha-1} M_n^{\alpha,k}$$

et que $M_n(v_k)$ tend, quand $k \rightarrow \infty$, vers les constantes de Laguerre M_n^α calculées en (13), (14) et (15). On donne ainsi une vérification de

la formule (15), qui avait été obtenue par prolongement analytique.

Remarque 6. - Convexité et concavité. Par quelques calculs on peut voir que la différence seconde $\Delta_2(M_n^{\alpha,\beta}) = M_n + M_{n+2} - 2M_{n+1}$ est du signe opposé à celui du trinôme $An^2 + 2Bn + C$ avec

$$A = 2(2\alpha - 1)$$

$$B = (2\alpha - 1)(\theta + 1) \quad \theta = \alpha + \beta$$

$$C = \alpha\theta(\theta + 1) - 2\beta$$

trinôme dont le discriminant Δ se calcule aisément

$$\Delta = (2\alpha - 1)(\alpha - \beta + 1)(\theta - 1).$$

Il suit de là que, si $\Delta \leq 0$, le signe du trinôme est celui de $2\alpha - 1$. Si $\Delta > 0$, les deux racines $n_1 \leq n_2$ sont telles que $n_1 < 0$, de sorte que la suite $\Delta_2(M_n)$ ne garde un signe constant que si $n_2 \leq 0$. La condition $n_2 \leq 0$ n'est autre que $AC > 0$, et cette dernière condition incorpore la condition $\Delta \leq 0$. Ainsi lorsque $AC > 0$, la suite $(M_n^{\alpha,\beta})$ est concave si $2\alpha > 1$, et convexe si $2\alpha < 1$. Lorsque $AC < 0$ la suite $(M_n^{\alpha,\beta})$ n'est ni concave, ni convexe. Le cas limite $C=0$ introduit la cubique Γ d'équation

$$(34) \quad \alpha\beta^2 + (2\alpha^2 + \alpha - 2)\beta + \alpha^2(\alpha + 1) = 0$$

qui coupe la droite $D = \{\alpha = \frac{1}{2}\}$ aux points $\beta = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$. Avec Γ et D on construit une division du quadrant $\{\alpha > 0, \beta > 0\}$ en cinq régions, dont une est région de concavité (contenue dans le demi-plan $\alpha > \frac{1}{2}$), une autre est région de convexité (contenue dans la bande

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$), et les trois dernières sont régions de non-concavité et non-convexité.

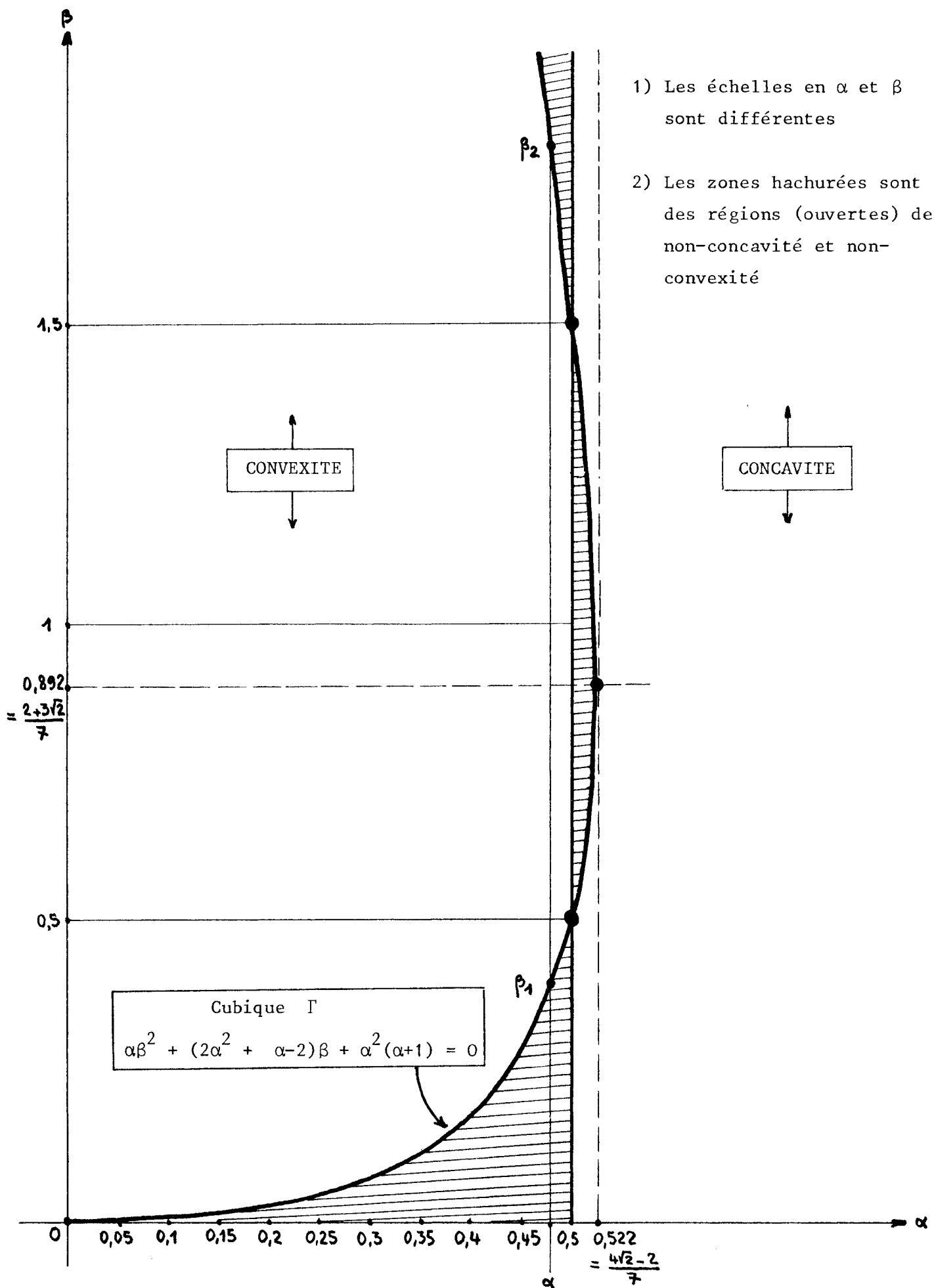
L'examen de la cubique Γ montre que l'on a le tableau

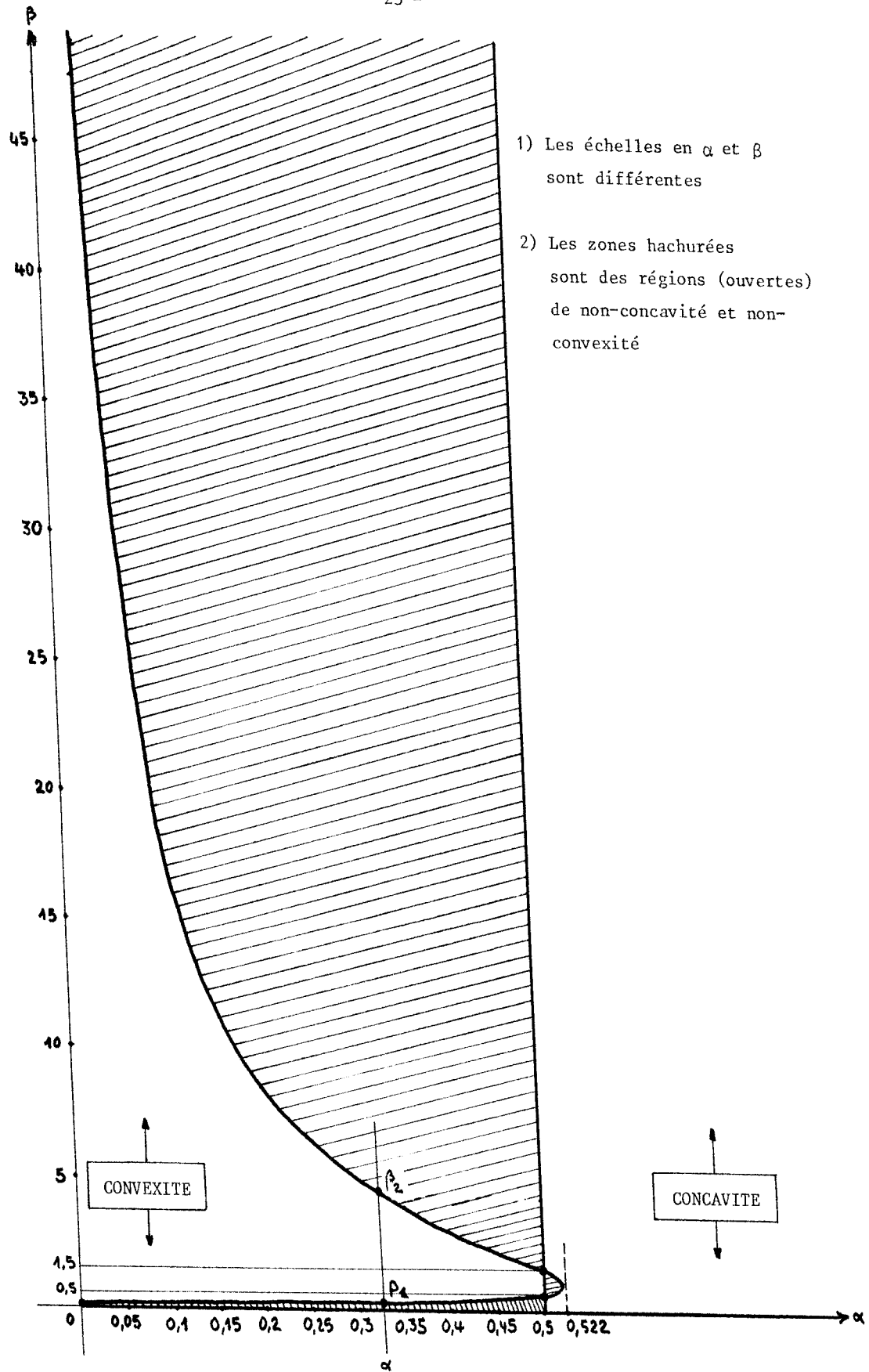
$\alpha > 0$	$\beta > 0$	$M_n^{\alpha, \beta}$
$\alpha > \frac{4\sqrt{2}-2}{7}$	quelconque	concave
$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{4\sqrt{2}-2}{7}$	$\beta \notin]\beta_1, \beta_2[$ $\beta \in]\beta_1, \beta_2[$	concave ni concave, ni convexe
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\beta \notin]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ $\beta \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	concave convexe
$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ $\beta \notin [\beta_1, \beta_2]$	convexe ni concave, ni convexe

avec

$$\beta_1 = \frac{1}{2\alpha} \left[(2-\alpha - 2\alpha^2) - (4-4\alpha - 7\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\alpha} \left[(2-\alpha - 2\alpha^2) + (4-4\alpha - 7\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$





Le cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$ est intéressant car il fait apparaître l'ensemble des deux points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ comme zone de contact entre la région de convexité et celle de concavité. Pour ces deux points on a donc nécessairement une expression de M_n linéaire en n . De fait avec (17) et (30) on vérifie

$$M_n^{1/2, 1/2} = M_n^{1/2, 3/2} = 2n\pi.$$

En résumé l'intérêt de la remarque tient surtout au fait qu'on donne ici des exemples concrets où la suite (M_n) n'est ni convexe ni concave. C'est le cas du point $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{12}$. Par ailleurs on remarquera aussi que la suite $(M_n^{\alpha, \beta})$ est toujours concave lorsque $\alpha > \frac{4\sqrt{2}-2}{7} = 0,522\dots$, en particulier lorsqu'elle est bornée ($\alpha > 1$).

4. RETOUR AU PROBLEME DE WEISSLER.

La méthode de majoration des constantes (β_n) de Weissler par utilisation des constantes M_n a déjà été utilisée par GUENNOUN [1], p. 79-81, qui, suivant de très près les calculs de Weissler basés sur la formule multinomiale, obtient $\beta_{n+1} = 1 + M_n$, $n \geq 1$, où les M_n sont associées aux polynômes classiques de Laguerre.

Avec le calcul que nous avons mené en 1., et qui est plus direct et plus compréhensible que celui basé sur la formule multinomiale, les valeurs $\beta_{n+1} = 1 + M_n$ obtenues sont aussi associées à la mesure de Laguerre classique. On améliore ainsi légèrement, d'un point de vue technique, la preuve de l'inégalité de Weissler telle qu'elle est donnée à la fois dans [3] et [1], sans pour autant améliorer la valeur des constantes β_n .

Le progrès n'est évidemment pas considérable et les meilleures constantes ne sont sans doute pas obtenues. Toutefois l'étude a permis de poser et de résoudre à peu près complètement un problème d'extrémum tronqué à l'ordre n , intéressant en lui-même dans la théorie des moments de Stieltjes.

*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. GUENNOUN, *Inégalités logarithmiques de Gross-Sobolev et hypercontractivité*, Thèse 3ème cycle, Université LYON 1 (1980), 90 pages.
- [2] G. VALIRON, *Equations fonctionnelles*, Masson, Paris, (1950).
- [3] F.B. WEISSLER, *Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle*, J. Funct. Anal., 37, (1980), 218-234.
- [4] D.V. WIDDER, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, (1946).

Institut de Technologie de
KUNMING (REPUBLIQUE POPULAIRE
DE CHINE)

Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle
U.E.R. de Mathématiques
UNIVERSITE CLAUDE-BERNARD-LYON 1
43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX