

E. ANGELOPOULOS

Unitarisabilité des modules de Harish-Chandra et produits tensoriels de \mathfrak{k} -modules. le cas de $\mathfrak{S}\mathfrak{o}(p, q)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__4B_A1_0

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNITARISABILITE DES MODULES DE HARISH-CHANDRA ET PRODUITS

TENSORIELS DE \mathfrak{k} -MODULES. LE CAS DE $\mathfrak{So}(p,q)$

par E. ANGELOPOULOS

(Université de Dijon)

On décrit les principaux outils utilisés dans une approche algébrique du problème de la détermination du dual unitaire d'une algèbre de Lie semi-simple (ou réductive) réelle ; l'étude des propriétés des objets introduits ici conduit à des résultats (encore partiels) pour le cas de $\mathfrak{So}(p,q)$.

1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive réelle, \mathfrak{k} sa sous-algèbre compacte maximale, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$ les algèbres enveloppantes, $Z(\mathfrak{g})$ et $Z(\mathfrak{k})$ les centres, $C^{\mathfrak{k}}$ le commutant de \mathfrak{k} dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan, $\hat{\mathfrak{k}}$ le dual unitaire de \mathfrak{k} (on identifiera un élément de $\hat{\mathfrak{k}}$ et son poids dominant).

Soit $\mathcal{E} = \sum_i \mathbb{C} e_i$ (somme algébrique, I dénombrable) un \mathfrak{g} -module simple muni d'une forme sesquilinéaire non dégénérée \mathfrak{g} -invariante : $(X\phi|\psi) + (\phi|X\psi) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. On dira que \mathcal{E} est un module de Harish-Chandra unitarisable ssi la f.s. est définie positive

$$(o) \quad (\phi|\phi) > 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{E} - \{0\}$$

(définition qui évacue toute considération non algébrique). On a la condition équivalente :

PROPOSITION 0. - \mathcal{E} est métrisable, ssi toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de la forme X^*X ($X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$) est (représentée par) une application linéaire positive de \mathcal{E} dans \mathcal{E} .

REMARQUE. On peut se restreindre à $X \in \mathfrak{g}$ (alors $X^* = -X$).

2. Soit $\mathcal{E} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathfrak{k}}} \mathcal{E}_{\lambda}$ la réduction sur $\hat{\mathfrak{k}}$ de \mathcal{E} , la composante isotypique \mathcal{E}_{λ} étant isomorphe à $\mathcal{M}_{\lambda} \otimes V_{\lambda}$, \mathcal{M}_{λ} multiplicité, V_{λ} représentant de λ . On notera $R_{\mathfrak{g} \mathcal{E}}(\lambda)$, ou $R_{\mathfrak{g}}(\lambda)$, le rang de λ (c.à.d. $\mathcal{M}_{\lambda} \neq \{0\}$). L'étude de la positivité de la f.s. se ramène à

PROPOSITION 1. - \mathcal{E} est unitarisable ssi tout élément de E est une application linéaire positive de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , avec, indifféremment :

a) $E = \{X^*X ; X \in \mathfrak{p}\}$,

b) $E = \{X^*zX ; X \in \mathfrak{p} , z \in Z(\hat{\mathfrak{k}}) , z \geq 0\}$.

En considérant \mathfrak{p} comme un $\hat{\mathfrak{k}}$ -module unitaire grâce à la forme de Killing, introduisons une base $\{X_n\}$ orthonormée ; on peut affirmer :

PROPOSITION 2. - Soit, $\forall \lambda \in \hat{\mathfrak{g}}$, Z_{λ}^+ le sous-ensemble de $Z(\hat{\mathfrak{k}})$ représenté par des a.l. positives sur le $\hat{\mathfrak{k}}$ -module $\mathfrak{p} \otimes V_{\lambda}$. Supposons que tout facteur simple de $\mathfrak{p} \otimes V_{\lambda}$ est de multiplicité 1. (Hypothèse pas trop restrictive en pratique et techniquement agréable). Alors \mathcal{E} est métrisable, ssi $\forall \lambda \in R_{\mathfrak{g} \mathcal{E}}(\lambda)$ $\forall z \in Z_{\lambda}^+$, l'élément $\sum_{\mathfrak{h}} (-X_{\mathfrak{h}} z X_{\mathfrak{h}})$ est une application linéaire positive de \mathcal{M}_{λ} sur \mathcal{M}_{λ} .

COROLLAIRE. - Soit $\bigoplus_{\mu \in \Omega} V_{\mu} = \mathfrak{p} \otimes V_{\lambda}$ la décomposition du produit tensoriel en modules simples, et soit $\forall_{\mu \in \Omega}$, $z_{\mu\lambda} \in Z(\hat{\mathfrak{k}})$ tel que $z_{\mu\lambda} V_{\mu} \neq \{0\}$, $z_{\mu\lambda} V_{\mu'} = \{0\}$ pour $\mu' \in \Omega$, $\mu' \neq \mu$. Alors \mathcal{E} est unitarisable ssi tous les $\sum_{\mathfrak{h}} (-X_{\mathfrak{h}} z_{\mu\lambda}^* z_{\mu\lambda} X_{\mathfrak{h}})$ sont des a.l. positives.

3. Pour réaliser la réduction du produit tensoriel on introduit les polynômes caractéristiques de \mathfrak{k} .

DEFINITION. - Soit W le groupe de Weyl de \mathfrak{k} , \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan $H \in \mathfrak{h}$
 $\bar{H} = \{H' \in \mathfrak{h} ; \exists w, H' = Hw\} = \{H_1, \dots, H_n\}$ et, $\forall \lambda \in \mathfrak{h}, \lambda_i = \lambda(H_i)$;
 Soit $P(t) = \prod_1^n (t - \lambda_i - \delta_i)$, avec $\delta \in \mathfrak{h}'$. L'image réciproque $C(t)$ de $P(t)$
 dans $Z(\mathfrak{k})[t]$ par l'isomorphisme de Harish-Chandra sera appelée un polynôme
 caractéristique (à une variable, relatif à \bar{H}, δ) de \mathfrak{k} .

Par des choix appropriés de δ , de \bar{H} , et de la variable t , on peut construire des éléments $z^{\mu\lambda}$ du corollaire.

4. En utilisant des formules du type

$$(1) \quad \sum_h X_h C(t) X_h = \sum_{h,\ell} X_h X_\ell T_{\ell;h}^{(t)} \quad \text{avec } T_{\ell;h}^{(t)} \in \mathcal{U}(\mathfrak{k}),$$

$$(2) \quad \sum_{\ell,h} [X_h, X_\ell] T_{\ell;h}^{(t)} \in Z(\mathfrak{k}),$$

on aboutit à des relations linéaires entre des éléments de $C^{\mathfrak{k}}$ (plus exactement leurs images dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{M}_\lambda)$). Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, q)$ la connaissance de ces relations permet une caractérisation complète des \mathfrak{g} -modules unitarisables pour $q = 1$ (où l'on retrouve les résultats de Thieleker, [1]) et $q = 2$, déjà amorcée dans [2] ; pour $q > h$ il semble nécessaire de considérer des produits tensoriels de \mathfrak{k} -modules de la forme $\mathfrak{p}^{\wedge k} \otimes V_\lambda$. Bien que l'étude des propriétés des éléments de $C^{\mathfrak{k}}$ correspondants ne soit pas encore suffisamment approfondie, on peut espérer aboutir à des résultats du type suivant :

a) Il existe une relation d'ordre partiel sur $\hat{\mathfrak{k}}$, suffisamment fine, telle que, lorsque $(\phi | \phi) > 0$ pour $0 \neq \phi \in \mathcal{E}_\lambda$ et λ minimal dans $R_{\mathfrak{g}} \mathcal{E}(\lambda)$, alors \mathcal{E} est unirarisable ;

b) Les racines du polynôme caractéristique de \mathfrak{g} (défini à l'aide de celui de la forme jumelle compacte de \mathfrak{g}) se trouvent dans une partie algébrique de $\mathbb{C}^{\text{rang}(\mathfrak{g})}$ entièrement déterminée par la donnée des λ minimaux.

REFERENCES.

- [1] E. THIELEKER, Trans. Amer. Math. Soc. 179, 1973, p. 465.
199, 1974, p. 327.
230, 1977, p. 1.
- [2] E. ANGELOPOULOS, C. R. Acad. Sc. Paris, I, 192, 1981, p. 469.
