PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. GUICHARDET

Extensions de plusieurs représentations des groupes produits semi-directs

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A12_0>

EXTENSIONS DE PLUSIEURS REPRESENTATIONS DES GROUPES PRODUITS SEMI-DIRECTS

par A. GUICHARDET

(Ecole Polytechnique)

§ 1. DONNEES ET POSITION DU PROBLEME.

On se donne un groupe de Lie G, produit semi-direct d'un sous-groupe distingué B, isomorphe à un groupe $\mathbb{R}^\nu$, par un sous-groupe A ; on écrit $G = B \ltimes A$ et on note ses éléments $g = (b,a)$, avec la loi de composition

$$(b,a).(b',a') = (b+a.b',aa')$$

où $(a,b) \mapsto a.b$ désigne l'action de A dans B ;

on note B^* l'espace vectoriel dual de B avec la dualité $<b,x>$ pour $b \in B$, $x \in B^*$, et l'action duale de A : $(a,x) \mapsto a.x$.

Rappelons la construction des représentations unitaires irréductibles de G suivant Mackey : on se donne un point $x_o \in B^*$, on note $\mathscr{X} = A.x_o$ son orbite sous A, S son stabilisateur dans A, $(\mathbb{E},\sigma)$ une représentation unitaire irréductible de S, $(\mathbb{E},\rho)$ la représentation de $B \ltimes S$ telle que

$$\rho(b,s) = e^{i<b,x_o>} \sigma(s) ;$$

enfin (F,π) la représentation de G induite au sens unitaire par $(\mathbb{E},\rho)$.

Les représentations considérées ici seront un peu différentes :

$(\mathbb{E},\sigma)$ sera une représentation C^∞ de S, irréductible, dans un espace localement convexe complet E ;

$(\mathbb{E},\rho)$ sera définie comme ci-dessus ;

(F,π) sera induite au sens C^∞ par $(\mathbb{E},\rho)$, i.e.

$$F = \{\phi \in C^{\infty}(A,E) \mid \phi(as) = \sigma(s)^{-1}.\phi(a)\}$$
$$(\pi(b,a).\phi)(a') = e^{i<b,a'.u_o>}.\phi(a^{-1}a') .$$

Donnons-nous maintenant u_o comme ci-dessus (d'où $\mathfrak{x}$ et S) et un nombre fini de S-modules $(\mathbb{E}_1,\sigma_1),\ldots,(\mathbb{E}_n,\sigma_n)$ comme plus haut ; il en résulte des G-modules $(\mathbb{F}_1,\pi_1),\ldots,(\mathbb{F}_n,\pi_n)$. On cherche à décrire les "extensions de $(F_1,\ldots,F_n)$", notion qui est définie comme suit.

<u>DEFINITION</u>. - *Considérons un groupe de Lie G et des G-modules C^{∞} $F_1,\ldots,F_n$; un G-module $C^{\infty}F$ est une extension de $(F_1,\ldots,F_n)$ s'il contient des sous-G-modules fermés*

$$0 = V_o \subset V_1 \subset\ldots\subset V_n = F$$

vérifiant

(i) $V_i/V_{i-1} \sim F_i$;

(ii) V_i *admet un supplémentaire topologique dans* V_{i+1} , *autrement dit* F *est, en tant qu' E.V.T. la somme directe* $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$.

On note $\mathrm{Ext}(G,(F_1,\ldots,F_n))$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) G-modules C^{∞} qui sont des extensions de $(F_1,\ldots,F_n)$; et $\mathrm{Ext}_i(G(F_1,\ldots,F_n))$ le sous-ensemble des G-modules indécomposables.

<u>REMARQUE 1</u>. Lorsque n=2, un G-module F est une extension de (F_1,F_2) s'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F_2 \longrightarrow 0$$

qui est scindée en tant que suite exacte d'E.V.T. , i.e. v admet une section linéaire continue ; on dit habituellement qu'une telle suite exacte est une "extension de F_2 par F_1" ; on note $\mathrm{Ext}^1_G(F_2,F_1)$ le quotient de l'ensemble de suites exactes par une certaine relation d'aquivalence, qui entraîne l'équivalence des G-modules F ; de sorte que $\mathrm{Ext}(G(F_1,F_2))$ est un quotient de $\mathrm{Ext}^1_G(F_2,F_1)$.

REMARQUE 2. On a considéré un seul point x_o (ou, mieux, une seule orbite $\boldsymbol{x}$) parce que, dans le cas contraire, on démontre que $\mathrm{Ext}_i(G,(F_1,\dots,F_n))$ est vide.

§ 2. ENONCE DES RESULTATS.

On note $T = T_{x_o}(\boldsymbol{x})$ le sous-espace vectoriel de B^* parallèle au sous-espace tangent à $\boldsymbol{x}$ en x_o ; N le sous-espace vectoriel de B orthogonal T ; pour $j = 1,\dots,n$, $(\mathbb{E}_j,\tau_j)$ le $N \ltimes S$-module, restriction de $B \ltimes S$-module $(\mathbb{E}_j,b_j)$, c'est-à-dire

$$\tau_j(n,s) = e^{i\langle n,x_o\rangle}.\sigma_j(s).$$

THEOREME 1 . - *On suppose que* T *admet un sous-espace supplémentaire* S*-invariant dans* B^* *; par dualité,* N *admet un supplémentaire* S*-invariant dans* B *; donc il existe un projecteur* S*-invariant* ρ *de* B *sur* N*. Partons d'un* $N\ltimes S$*-module*

$$(\mathbb{E},\tau) \in \mathrm{Ext}(N \times S,((\mathbb{E}_1,\tau_1),\dots,(\mathbb{E}_n,\tau_n))) \ ;$$

relevons-le en un $B \times S$*-module* $(\mathbb{E},\rho)$ *comme suit :*

$$\rho(b,s) = e^{i\langle b-\rho(b),u_o\rangle}.\tau(\rho(b),s).$$

induisons (au sens C^∞*) le* $B \ltimes S$*-module* $(\mathbb{E},\rho)$ *en un* G*-module* $(\mathbb{F},\pi)$

Alors $(\mathbb{F},\pi) \in \mathrm{Ext}(G,((\mathbb{F}_1,\pi_1),\dots,(\mathbb{F}_n,\pi_n)))$,

de sorte qu'on obtient une application

$$\mathrm{Ext}(N \ltimes S,((\mathbb{E}_1,\tau_1),\dots,(\mathbb{E}_n,\tau_n))) \to \mathrm{Ext}(G,((\mathbb{F}_1,\pi_1),\dots,(\mathbb{F}_n,\pi_n))).$$

Cette application est bijective et conserve l'indécomposabilité dans les deux sens

Le principe de la démonstration est exposé dans [2] ; elle repose sur divers résultats cohomologiques de [1] et [4] .

COROLLAIRE. - *Toute extension des C-modules* $((\mathbb{F}_1,\pi_1),\ldots,(\mathbb{F}_n,\pi_n))$ *est induite au sens* C^∞ *par une extension des* $B\times S$-*modules* $((\mathbb{E}_1,\rho_1),\ldots,(\mathbb{E}_n,\rho_n))$; *en particulier elle admet un système d'imprimitarité basé sur* $\mathfrak{X}$.

§ 3. EXEMPLES.

Exemple 1. (Groupe affine de $\mathbb{R}$ ou des ax+b). Ici $A = \mathbb{R}_+^*$, $B = \mathbb{R}$ et $a_\circ b = ab$; prenons $x_o \neq o$; alors $T = B\$$, S et N dont triviaux, tous les (F_j,π_j) sont identiques à l'un d'eux soit $(\mathbb{F}_1,\pi_1)$, et toute extension de $((\mathbb{F}_1,\pi_1),\ldots,(\mathbb{F}_1,\pi_1))$ n-fois est somme directe $(\mathbb{F}_1,\pi_1)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{F}_1,\pi_1)$.

Exemple 2 . (Groupe euclidien). Ici $A = So(m)$, $B = \mathbb{R}^m$; on prend x_o $x_o = (o,\ldots,o,1) \in B^* = \mathbb{R}^m$; $\mathfrak{X}$ est la sphère S^{m-1}, T admet un supplémentaire S-invariant ; N est l'esnemble des $b = (o,\ldots,o,b_m)$, isomorphe à $\mathbb{R}$ avec action triviale de S, donc $N \ltimes S = N\times S$; $Ext_i(N\times S,((\mathbb{E}_1,\tau_1)\ldots(\mathbb{E}_n,\tau_n)))$ est vide si les σ_j ne sont pas toutes identiques ; si elles le sont, $Ext_i(N\ltimes S,((\mathbb{E}_1,\tau_1),\ldots,(\mathbb{E}_1,\tau_1)))$ est réduit à un élément, donc $Ext_i(G,((\mathbb{F}_1,\pi_1),\ldots,(\mathbb{F}_1,\pi_1)))$ est réduit à un élément $(\mathbb{F},\pi)$, qu'on peut décrire comme suit sous forme infinitésimale : on note encore π_1 la différentiable de π_1 , (Y,X) un élément quelconque de $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}$, algèbre de Lie de G ; un élément de F_1 est une section d'un certain fibré de base ; un élément de F est un n-uple de telles sections, soit $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$;

on a

$$(\pi(Y,X).\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix})(x) = \begin{pmatrix} (\pi_1(Y,X).f_1)(x) + \langle Y,x\rangle.f_2(x) \\ (\pi_1(Y,X).f_2)(x) + \langle Y,x\rangle.f_3(x) \\ \vdots \\ (\pi_1(Y,X).f_n)(x) \end{pmatrix} ;$$

ou encore, sous forme matricielle

$$\pi(Y,X) = \begin{pmatrix} \pi_1(Y,X) & \langle Y,.\rangle & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & \pi_1(Y,X) & \langle Y,.\rangle & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \pi_1(Y,X) & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & \pi_1(Y,X) \end{pmatrix}$$

où $\langle Y,.\rangle$ désigne l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto \langle Y,x\rangle$.

Exemple 3 . (Groupe de Poincaré). Pour les orbites qui sont les nappes d'hyperboloïdes à deux nappes ou les hyperboloïdes à une nappe, le théorème 1 s'applique parce que S est semi-simple, et les résultats sont très semblables à ceux de l'exemple 2. Par contre pour les orbites coniques, T n'a pas de supplémentaire S-invariant ; il existe des extensions de $(\mathbb{F}_1,\ldots,\mathbb{F}_n)$ qui ne sont pas induites à partir de $B \ltimes S$; par exemple prenant $n = 2$ et $(\mathbb{F}_1,\pi_1) = (\mathbb{F}_2,\pi_2)$ = représentation d'hélicité nulle, on obtient des extensions représentées par les matrices

$$\pi(Y,X) = \begin{pmatrix} \pi_1(Y,X) & \phi(Y,X) \\ 0 & \pi_1(Y,X) \end{pmatrix}$$

où ϕ (Y,X) est un opérateur différentiel, et non plus un opérateur de multiplication comme à l'exemple 2. On trouvera d'autres résultats concernant cet exemple dans [3], qui a d'ailleurs largement motivé le présent travail.

Exemple 4. (Groupe de Heisengerg). Ici $A = \mathbb{R}$, $\mathbb{B} = R^2$, avec l'action de A sur B définie par

$$a.(b_1,b_2) = (b_1+ab_2,b_2) \ ;$$

Le théorème 1 s'applique ; en réalité, il est plus naturel de remplacer la représentation induite au sens C^∞ (qui opère dans $C^\infty(\mathbb{R})$) par la représentation analogue opérant dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puisque cette dernière est la représentation différentiable associée à la représentation induite unitaire. Les résultats restent en tout point semblables à ceux des exemples précédents. Ajoutons, que pour des groupes nilpotents plus généraux la situation est infiniment plus compliquée ...

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. GUICHARDET, *Extensions des représentations induites des produits semi-directs*. J. für reine angew. Math., t. 310, 1979, p. 7-32.

[2] A. GUICHARDET, *Sur les extensions de plusieurs représentations d'un groupe* (Preprint, Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, 1982).

[3] G. RIDEAU, Cours donné à LOUVAIN en 1980 sur les *extensions des représentations du groupe de Poincaré.*

[4] F. DUCLOUX, *Sur les n-extensions des représentations induites les produits semi-directs* , Thèse de 3e cycle, Paris-Sud, 1980).

****