PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN BRACONNIER

4 - Algèbres de Poisson graduées

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 1C
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___1C_A4_0>

4 - ALGEBRES DE POISSON GRADUEES

E désigne un facteur de commutation sur un groupe abélien Δ.

(4.1) CROCHETS DE POISSON GRADUES.

Dans ce paragraphe, on désigne par A une K-algèbre, $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduées ε-commutative.

(4.1.1). Soit $F \in \mathrm{Der}(A)^2_o$. Pour tout $x \in A$, on a donc $j(x)F \in \mathrm{Der}(A) = \mathrm{Homgr}_A(\Omega(A)^{\sim}, \tilde{A})$ et $j(x)F$ est de degré $|x|$ si x est homogène. Pour $\alpha \in \Omega(A)$, soit $h_F(\alpha) \in \mathrm{Endgr}_K(A)$ défini par

$$h_F(\alpha)^{\sim}(x) = < j(x)F, \alpha> \quad (x \in A).$$

On a donc

$$h_F(\alpha)(x) = \varepsilon(|\alpha|, |x|) < j(x)F, \alpha>$$

si x et α sont homogènes. Et on vérifie que $\alpha \mapsto h_F(\alpha)(x)$ est A-linéaire.

LEMME. - *On a* $h_F(\alpha) \in \mathrm{Der}(A)$.

En effet, soient $x, x', y \in A$ homogènes. On a

$$\begin{aligned} j(xx')F(y) &= F(xx' \wedge y) \\ &= \varepsilon(|x'|, |y|)F(x \wedge y)x' + xF(x' \wedge y) \\ &= \varepsilon(|x|, |x'|)x'F(x \wedge y) + xF(x' \wedge y). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} h_F(dy)(xx') &= \varepsilon(|y|, |x|+|x'|) < \varepsilon(|x|, |x'|)x'j(x)F + x\, j(x')F, dy > \\ &= \varepsilon(|y|, |x|+|x'|)(\varepsilon(|x|, |x'|)x'F(x \wedge y) + xF(x' \wedge y)) \\ &= h_F(dy)(x)\, x' + \varepsilon(|x|, |y|)x h_F(dy)(x') \ ; \end{aligned}$$

donc $h_F(dy) \in \mathrm{Der}(A)$. D'où le résultat.

Ainsi F définit un élément $h_F \in \mathrm{Homgr}_A(\Omega(A), \mathrm{Der}(A))_o$.

Et on a

(1) $$< h_F(dx), dx' > = - F(x \wedge x')$$

$(x, x' \in A)$.

PROPOSITION. - $F \mapsto h_F$ *est un isomorphisme de* K*-modules de* $\mathrm{Der}(A)^2_o$ *sur le sous-module de* $\mathrm{Homgr}_A(\Omega(A), \mathrm{Der}(A))_o = \mathrm{Der}(A, \mathrm{Der}(A))_o$ *formé des* h *tels que* $(\alpha, \alpha') \mapsto < h(\alpha), \alpha' >$ *soit une application* K*-bilinéaire,* ε *-alternée (de degré o) de* $\Omega(A) \times \Omega(A)$ *dans* A.

La formule (1) montre que $(\alpha,\alpha') \mapsto \langle h_F(\alpha),\alpha'\rangle$ est ε-alternée et que $F \mapsto h_F$ est injectif. Soit $h \in \mathrm{Homgr}_A(\Omega(A),\mathrm{Der}(A))$ tel que $(\alpha,\alpha')\mapsto \langle h(\alpha),\alpha'\rangle$ soit ε-alternée. Pour $x,x' \in A$, posons $F(x\wedge x') = -\langle h(dx),dx'\rangle$. Il est clair que $j(\pi)F \in \mathrm{Der}(A)$, donc que $F \in \mathrm{Der}(A)^2_o$. Et on a, si x, $x' \in A$, $\langle h_F(dx),dx'\rangle = -\langle h(dx),dx'\rangle$; donc $h = h_F$.

On dit que h_F est le *hamiltonien* de F.

(4.1.2) Soit $F \in \mathrm{Der}(A)^2$. On dit que A, muni de F est une algèbre de Poisson Δ-graduée si, pour tout $x \in A$, $j(x)F$ est une ε-dérivation de la K-algèbre Δ-graduée obtenue en munissant A du produit $(x,x') \mapsto F(x\wedge x')$, autrement dit si A est une K-algèbre de Lie Δ-graduée (rel. à ε) pour le crochet défini par

$$[x,x'] = F(x\wedge x').$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\varepsilon(|x_1|,|x_3|)F(x_1\wedge F(x_2\wedge x_3)) + \varepsilon(|x_2|,|x_1|)F(x_2\wedge F(x_3\wedge x_1)) + \varepsilon(|x_3|,|x_2|)F(x_3\wedge F(x_1\wedge x_2)) = 0$$

($x_1,x_2,x_3 \in A$ homogènes).

On a alors $j(x)F = \mathrm{ad}(x)$ et $h_F(dx) = -\mathrm{ad}(x)$ pour tout $x \in A$. On notera que, pour tout $x \in A$, on a $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Der}(A) \cap \mathfrak{Der}(A)$.

(4.1.3). Soit H une K-algèbre Δ-graduée, associative, unifère et filtrée, de manière croissante et exhaustive, par $(H_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, où H_p est un sous-K-module Δ-gradué de H.

Soit ε un facteur de commutation sur Δ et H^ε l'algèbre de Lie Δ-graduée rel. à ε obtenue en munissant le K-module H de $[\ ,\ ]_\varepsilon$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, soit gr^p l'application K-linéaire, Δ-graduée canonique $H_p \to H_p/H_{p-1}$, $\mathrm{gr}(H)^p = H_p/H_{p-1}$ et soit $\mathrm{gr}(H) = \bigoplus_p \mathrm{gr}(H)^p$; gr(H) est une K-algèbre $\mathbb{Z}$-graduée, associative et unifère. Supposons que cette algèbre soit ε-commutative, c'est-à-dire que l'on ait $[y,y']_\varepsilon \in H^{p+p'-1}$ si $y \in H^p$ et $y' \in H^{p'}$; posons alors $[\mathrm{gr}^p(y),\mathrm{gr}^{p'}(y')] = \mathrm{gr}^{p+p'-1}([y,y']_\varepsilon)$.

PROPOSITION. - gr(H), *muni de* $[\ ,\ ]$, *est une* K-*algèbre de Poisson* Δ-*graduée (rel. à* ε*).*

C'est immédiat, puisque $ad(y)_\varepsilon \in Der_\varepsilon(H)$ pour tout $y \in H$.

EXEMPLES. - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie Δ-graduée (rel. à ε), $gr(U(\mathfrak{g}))$ est ε-commutative (3.2.3). Soit A une algèbre Δ-graduée et ε-commutative ; Symb(A) est ε-commutative (2.2.3).

(4.1.4). Soient A et B des algèbres de Poisson Δ-graduées, relativement à ε; on dit que $u : A \to B$ est un *morphisme d'algèbres de Poisson* de A dans B si u est un morphisme de K-algèbres Δ-graduées associatives et un morphisme de K-algèbre de Lie graduées.

Soit F (resp. G) l'élément de $Der(A)^2_o$ (resp. $Der(B)^2_o$) définissant la structure de A (resp. B). Pour qu'un morphisme $u : A \to B$ de K-algèbres Δ-graduées associatives soit un morphisme d'algèbres de Poisson, il faut et il suffit que u vérifie l'une des conditions suivantes :

(i) $u(F(x \wedge x')) = G(u(x) \wedge u(x')$ $\quad (x,x' \in A)$

(ii) $u(\langle h_F(\alpha),\alpha'\rangle) = \langle h_G(\Omega(u)\alpha)\Omega(u)\alpha'\rangle$ $\quad \alpha,\alpha' \in \Omega(A))$.

On dit que $J \subset A$ est un *idéal de Poisson* si J est un idéal gradué de l'algèbre associative A et un idéal de l'algèbre de Lie A; s'il en est ainsi A/J est, canoniquement, une K-algèbre de Poisson.

Soit $u : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Poisson ; Ker(u) est un idéal de Poisson de A et Im(u) une sous-algèbre graduée de Poisson de B, isomorphe à A/Ker(u).

(4.1.5) Soit A une algèbre de Poisson, Δ-graduée (relativement à ε). Soit E un A-module et π une représentation de l'algèbre de Lie Δ-graduée A dans E. On dit que (E,π) est un A-*module de Poisson* si, on a, pour $x,x' \in E$ homogènes et $y \in E$,

(i) $\quad \pi(xx')y = x\pi(x')y + \varepsilon(|x|,|x'|)\, x'\pi(x)y,$

(ii) $\quad \pi(x)(x'y) = [x,x']\, y + \varepsilon(|x|,|x'|)\, x'\, \pi(x)y.$

(i) signifie que $x \mapsto \pi(x)y$ est une dérivation de A dans E;

(ii) est alors équivalent à

$$ad(x')_\varepsilon(\pi(x)) = [x',x]\, id_E.$$

A, muni de la représentation ad (de l'algèbre de Lie A), est un A-module de Poisson.

Soient (E,π) et (E',π') des A-modules de Poisson ; un *morphisme* de E dans E' est une application $u : E \to E'$, A-linéaire, graduée de degré 0 et telle que

$$u\,\pi(x) = \pi'(x)u \qquad (x \in A).$$

(4.2) COHOMOLOGIE DES ALGEBRES DE POISSON.

On désigne par A une algèbre de Poisson Δ-graduée, relativement à ε , définie par $F \in \mathrm{Der}(A)^2_0$, et par (E,π) un A-module de Poisson. On considère A, muni de ad, comme un A-module de Poisson.

(4.2.1) Comme A est une algèbre de Lie, on a le complexe $(C(A),\partial)$ et, de même, comme π est une représentation de l'algèbre de Lie A dans E, on a le complexe $(C(A,E),\partial)$. Si $x \in A$, on a $\partial x = -\mathrm{ad}(x)$; si h_F est le hamiltonien de F, on a $h_F(dx) = \partial x$ (dans $\mathrm{Der}(A) \subset C(A)^\circ$).

PROPOSITION. - *On a* $\partial F = 0$.

En effet, si $x_1,x_2,x_3 \in A$ sont homogènes, on a

$(\partial F)(x_1\wedge x_2\wedge x_3) = \phi(|x_1|,|x_3|)(\varepsilon(|x_1|,|x_3|)F(x_1\wedge F(x_2\wedge x_3)) + \varepsilon(|x_2|,|x_1|)F(x_2\wedge F(x_3\wedge x_1))$
$+\varepsilon(|x_3|,|x_n|)F(x_3\wedge F(x_1\wedge x_2)) - \varepsilon(|x_1|,|x_3|)(\varepsilon(|x_1|,|x_3|)F(F(x_1\wedge x_2)\wedge x_3)$
$+ \varepsilon(|x_3|,|x_2|)F(F(x_3\wedge x_1)\wedge x_2) + \varepsilon(|x_3|,|x_1|)F(F(x_2\wedge x_3)\wedge x_1)) = 0.$

(4.2.2) PROPOSITION. - *Pour* $x,x' \in A$, *on a, dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}^{\varepsilon_{\mathbb{Z}}}(C(A,E))$,

$$[j(x),\mathrm{ad}(x')_\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = 0 ,$$
$$[\vartheta(x),\mathrm{ad}(x')_\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{Z}}} = \mathrm{ad}([x,x'])_\varepsilon .$$

On peut supposer x,x' et c homogènes. Soient $x_1,\dots,x_p \in A$ homogènes on a

$(j(x)\mathrm{ad}(x')c)(x_1\wedge\dots\wedge x_{p-1}) = \varepsilon(|x|,|c|+|x'|)(x'c(x\wedge x_1\wedge\dots\wedge x_p) - \varepsilon(|x'|,|c|)c(x'x\wedge x_1\wedge\dots\wedge x_p))$
$= \varepsilon(|x|,|x'|)(\varepsilon(|c|,|x|)x'c(x\wedge x_1\wedge\dots\wedge x_p) - \varepsilon(|c|,|x|+|x'|)c(x\wedge x'x_1\wedge\dots\wedge x_p))$
$= \varepsilon(|x|,|x'|)(\mathrm{ad}(x')_\varepsilon\, j(x)c)(x_1\wedge\dots\wedge x_p)$;

d'où la première formule.

Et on a

$$(\vartheta(x).\,ad(x')_{\varepsilon}c)(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)$$
$$= [x,x'](x_1\wedge\ldots\wedge x_p)+\varepsilon(|x|,|x'|)x'\pi(x)c(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)$$
$$- \varepsilon(|c|+|x'|,|x|)\sum_1 \varepsilon(|x_i|,|x_1|+\ldots+|x_{i-1}|)x'c(x_1\wedge\ldots\wedge[x,x_i]\wedge\ldots\wedge x_p)$$
$$- \varepsilon(|c|,|x'|)\,\pi(x)c(x'x_1\wedge\ldots\wedge x_p)$$
$$+ \varepsilon(|x|,|x'|)\varepsilon(|c|,|x|+|x'|)\sum_i \varepsilon(|x_i|,|x_i|+\ldots+|x_{i-1}|)\;c(x'x_1\wedge\ldots\wedge[x,x_i]\wedge\ldots\wedge x_p)$$
$$= \varepsilon(|x|,|x'|)\;x'(\vartheta(x)c)(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)$$
$$- \varepsilon(|c|,|x'|)\;(\vartheta(x)c)(x'x_1\wedge\ldots\wedge x_p)$$
$$+ [x,x']c(x_1\wedge\ldots\wedge x_p) - \varepsilon(|c|,|x|+|x'|)c([x,x']x_1\wedge\ldots\wedge x_p)\;;$$

d'où la seconde formule.

(4.2.3) $C(A) = \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(A),A)$ est une K-algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée pour le produit $\wedge$. Et $C(A,E) = \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(A),E)$ est un $C(A)$-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué pour le produit $\wedge$.

PROPOSITION. - *Pour* $x\in A$, $c\in C(A)$ *homogènes*, $c'\in C(A,E)$, *on a*

$$j(x)(c\curlywedge c') = (j(x)c)\curlywedge c' + (-1)^{\deg(c)}\varepsilon(|x|,|c|)\;c\curlywedge(j(x)c'),$$
$$\vartheta(x)(c\curlywedge c') = (\vartheta(x)c)\curlywedge c' + \varepsilon(|x|,|c|)\;c\curlywedge(\vartheta(x)c'),$$
$$\partial(c\curlywedge c') = (\partial c)\curlywedge c' + (-1)^{\deg(c)}c\curlywedge(\partial c'),$$
$$ad(x)_{\varepsilon}(c\curlywedge c') = (ad(x)_{\varepsilon}c)\curlywedge c' + \varepsilon(|x|,|c|)c\curlywedge(ad(x)_{\varepsilon}c').$$

La première formule est conséquence de (1.9.2) ; la deuxième résulte d'un calcul de routine. Enfin, si $x,x_1\in A$ et $y\in E$ sont homogènes, on a

$$\partial(xy)(x_1) = \varepsilon(|x|+|y|,|x_1|)\;\pi(x_1)(xy)$$
$$= \varepsilon(|x|+|y|,|x_1|)([x_1,x]y + \varepsilon(|x|,|x_1|)x\;\pi(x_1)y)$$
$$= -\varepsilon(|y|,|x_1|)\;ad(x)(x_1)y + \varepsilon(|y_1|,|x_1|)\;x\;\pi(x_1)y$$
$$= (\partial x)\curlywedge y + x(\partial y).$$

On raisonne alors par récurrence sur deg(c) et deg(c'), en utilisant $[\partial,j(x)]_{\varepsilon_Z} = \vartheta(x)$, pour démontrer la troisième formule. Et la dernière se vérifie par un calcul de routine, à partir des définitions.

En particulier, si $x\in A$ et $c\in C(A,E)$, on a

$$\partial(xc) = -ad(x)\curlywedge c + x\;\partial c.$$

∂ est donc $Z(A)$-linéaire.

(4.2.4) Ainsi ∂ est une dérivation de degré (1,0) de C(A) ; donc $\curlywedge$ induit sur $\mathfrak{h}(A)$ un produit, encore noté $\curlywedge$, et $\mathfrak{h}(A)$, muni de ce produit, est une K-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative. De même, $\curlywedge$ induit une application K-bilinéaire de degré (0,0) de $\mathfrak{h}(A) \times \mathfrak{h}(A,E)$ dans $\mathfrak{h}(A,E)$, notée $\curlywedge$, et, muni de la loi ainsi définie, $\mathfrak{h}(A,E)$ est un $\mathfrak{h}(A)$-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué.

(4.2.5) On note ϕ_E l'endomorphisme gradué de degré (2,0) de C(A,E) défini par $\phi_E(c) = F \curlywedge c$. On a $\partial(F \curlywedge C) = F \curlywedge \partial c$ pour tout $c \in C(A,E)$. C'est-à-dire $\partial \phi_E = \phi_E$. Donc ϕ_E induit un K-endomorphisme $\mathfrak{h}(\phi_E)$ gradué de degré (2,0) de $\mathfrak{h}(A,E)$.

PROPOSITION. - *Pour que* $\mathfrak{h}(\phi_A) = 0$, *il faut et il suffit que la classe de* F *dans* $\mathfrak{h}^2(A)$ *soit* 0. *On a alors* $\mathfrak{h}(\phi_E) = 0$.

C'est suffisant ; soit $c \in \mathrm{Endgr}_K(A)$ tel que $F = \partial c$; pour tout $c' \in \mathrm{Ker}(\partial)$, on a $\partial(c \curlywedge c') = F \wedge c' = \phi_E(c')$, donc $\bar{\phi}_E = 0$.

C'est nécessaire ; soit $\phi_A^\circ : Z(A) \to \mathfrak{h}^2(A)$ la restriction de ϕ_A. Comme $\phi_A^\circ(1) = F$ et que $1 \in Z(A)$, la classe de F dans $\mathfrak{h}^2(A)$ est 0.

(4.2.5) $\mathfrak{h}(A)$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée, relativement à $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$, et π définit une représentation $\mathfrak{h}(\pi)$ de $\mathfrak{h}(A)$ dans le module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué $\mathfrak{h}(A,E)$ (cf. (3.3.5)). On vérifie que $\mathfrak{h}(A)$, muni de $\curlywedge$ et de [,] (défini en (3.3.5)) est une algèbre de Poisson et que le $\mathfrak{h}(A)$-module $\mathfrak{h}(A,E)$ (pour $\curlywedge$), muni de $\mathfrak{h}(\pi)$ est un $\mathfrak{h}(A)$-module de Poisson.

(4.3) COHOMOLOGIE DES MULTIDERIVATIONS D'UNE ALGEBRE DE POISSON.

Les notations sont celles de (4.2).

(4.3.1) On note D(A,E) le sous-K-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^\sim, \tilde{E}) = \oplus\, \mathrm{Der}(A,E)^p$ de C(A,E) ; et on pose D(A,A) = D(A). D(A) est une sous-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée de C(A) et D(A,E) est une D(A)-module $\mathbb{Z} \times \Delta$-gradué.

PROPOSITION. - *Soit* $c \in D(A,E)$; *on a* $j(x) \in D(A,E)$, $\vartheta(x) \in D(A,E)$ *pour* $x \in A$, *et* $\partial c \in D(A,E)$.

Il est clair que $j(x)c \in D(A,E)$ pour tout $x \in A$.

LEMME. - *Si* $x \in A$ *et* $c \in \mathrm{Der}(A,E)$, *on a* $\theta(x)c \in \mathrm{Der}(A,E)$.

On peut supposer x homogène. Si $x' \in A$, on a

$(\vartheta(x)c)(x') = \pi(x)c(x') - \varepsilon(|c|,|x|)\, c([x,x'])$.

Si $x',x'' \in A$ sont homogènes, on a

$$\begin{aligned}(\vartheta(x)c)(x'x'') &= \varepsilon(|c|+|x'|,|x''|)([x,x'']c(x') + \varepsilon(|x|,|x''|)x''\pi(x)c(x'))\\
&\quad + \varepsilon(|c|,|x'|)([x,x']c(x'') + \varepsilon(|x|,|x'|)\, x'\pi(x)c(x''))\\
&\quad - \varepsilon(|x|,|c|)(c([x,x'])x''+ \varepsilon(|c|,|x|+|x'|)\,[x,x']c(x''))\\
&\quad - \varepsilon(|x|,|c|+|x'|)(c(x')\,[x,x''] + \varepsilon(|c|,|x'|)\, x'c([x,x'']))\\
&= (\pi(x)c(x'))x'' - \varepsilon(|c|,|x|)c([x,x'])x'' + \varepsilon(|c|+|x|,|x'|)x'\pi(x)c(x'')\\
&\quad - \varepsilon(|c|+|x|,|x'|)\,\varepsilon(|c|,|x|)\, x'c([x,x''])\\
&= (\vartheta(x)c(x'))x'' + \varepsilon(|c|+|x|,|x'|)\, x'(\vartheta(x)c(x'')).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Soit $c \in \mathrm{Der}(A,E)^p$; et soient $x_1,\dots,x_{p-1} \in A$ homogènes ; si $x' \in A$, posons $c'(x') = c(x_1\wedge\dots\wedge x_{p-1}\wedge x')$
et

$$c''(x') = -\varepsilon(|c|,|x|)\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}\varepsilon(|x_i|,|x_1|+\dots+|x_{i-1}|)\,c([x,x_i]\wedge\dots\check{x}_i\dots\wedge x_{p-1}\wedge x');$$

on a c', $c'' \in \mathrm{Der}(A,E)$ et

$$\vartheta(x)c(x_1\wedge\dots\wedge x_{p-1}\wedge x') = (\vartheta(x)c')\,(x') + c''(x') \;;$$

d'après le lemme, $\vartheta(x)c'+c'' \in \mathrm{Der}(A,E)$. On a donc $j(x_1\wedge\dots\wedge x_{p-1})\vartheta(x)c \in \mathrm{Der}(A,A)$ et $\vartheta(x)c \in \mathrm{Der}(A,E)^p$.

Enfin si $x,x' \in A$ et $y \in E$ sont homogènes, on a $\partial y(x) = \pi(x)y$; donc $\partial y \in \mathrm{Der}(A,E)$. Soit $c \in \mathrm{Der}(A,E)^p$; comme $j(x)(\partial c) = \vartheta(x)c - \partial(j(x)c)$, on voit par récurrence sur p, que $\partial(j(x)c) \in \mathrm{Der}(A,E)^p$ et ce qui précède montre que $j(x)(\partial c) \in \mathrm{Der}(A,E)^p$; donc $\partial c \in \mathrm{Der}(A,E)^{p+1}$.

(4.3.2) Ainsi $(D(A),\partial)$ et $(D(A,E),\partial)$ sont des complexes de K-modules Δ-gradués dont on note, respectivement, $\mathcal{H}(A)$ et $\mathcal{H}(A,E)$ les K-modules $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradués de cohomologie. Et, comme $\partial(c\wedge c') = \partial c\wedge c'+(-1)^{\deg(c)}c\wedge\partial c'$, le produit $\wedge$ induit sur $\mathcal{H}(A)$ un produit et une application $\mathcal{H}(A)\times\mathcal{H}(A,E)\to\mathcal{H}(A,E)$, encore noté $\wedge$. $\mathcal{H}(A)$ est alors une K-algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative et $\mathcal{H}(A,E)$ un $\mathcal{H}(A)$-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué.

(4.3.3) On a $\mathcal{H}^{\circ}(A,E) = E^{A}$ (module des éléments invariants par π de E).

(E) est l'ensemble des dérivations $x \mapsto \widetilde{\pi(x)}y$ et $\partial(A) = \mathrm{ad}(A)$.
En particulier, $\mathcal{H}^{1}(A) = (\mathrm{Der}(A) \cap \mathcal{V}\mathrm{er}(A))/\mathrm{ad}(A)$.

Et on a la suite exacte de cohomologie

$$0 \to Z(A) \to Z(A) \to 0 \to (\mathrm{Der}(A) \cap \mathcal{V}\mathrm{er}(A))/\mathrm{ad}(A) \to \mathcal{D}\mathrm{er}(A)/\mathrm{ad}(A)$$
$$\to H^{1}(C(A)/D(A)) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^{2}(A) \to h^{2}(A) \to \dots$$

(resp. $0 \to E^{A} \to E^{A} \to 0 \to \mathcal{H}^{1}(A,E) \to h^{1}(A,E) \to H^{1}(C(A,E)/D(A,E)) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^{2}(A,E) \to \dots$),

où δ est l'application K-linéaire de liaison relative à la suite exacte de complexes

$$0 \to D(A) \to C(A) \to C(A)/D(A) \to 0$$

(resp. $0 \to D(A,E) \to C(A,E) \to C(A,E)/D(A,E) \to 0$).

De plus, $c \mapsto F \llcorner c$ est un endomorphisme ϕ_E de degré (2, 0) du K-module D(A,E), tel que $\partial\phi_E = \phi_E\partial$. ϕ_E induit donc un endomorphisme $\mathcal{H}(\phi_E)$ de degré (2,0) de $\mathcal{H}(A,E)$. Pour que $\mathcal{H}(\phi_A) = 0$, il faut et il suffit que la classe de F dans $\mathcal{H}^{2}(A)$ soit 0.

(4.3.4). Soit $\alpha \in \Phi(A)^{p}$; et soit $h(\alpha)$ l'application K-linéaire graduée de $\Lambda^{p}_{K}(A)$ dans A définie par

$$\widetilde{h(\alpha)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p)} = \langle \mathrm{ad}(x_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{ad}((x_p), \alpha\rangle \quad (x_i \in A).$$

Pour $x, x' \in A$ homogènes, on a

$$\mathrm{ad}(xx') = x(\mathrm{ad}(x')x'') + \varepsilon(|x|,|x'|)x'(\mathrm{ad}(x)x'')$$

si $x'' \in A$. Il en résulte que $h(\alpha) \in \mathrm{Der}(A)^{p}$. D'où une application A-linéaire

h de degré (0,0), de $\phi(A)$ dans D(A).

Si $\phi : \Omega(A) \to \Phi(A)^{1}$ est l'application canonique $\alpha \mapsto (X \to \langle X\alpha\rangle)$, on a évidemment $h|_{\phi(A)^{1}} \cdot \phi = h_F$.

PROPOSITION. - *On a, pour tout* $\alpha \in \Phi(A)$, *on a* $h(d\alpha) = \partial(h\alpha)$.

C'est un calcul de routine.

Ainsi h est un morphisme du complexe $(\phi(A),d)$ dans le complexe $(D(A),\partial)$; d'où une application K-linéaire $\bar{h}$ graduée de degré (0,0) de $H(\phi(A))$ dans $\mathcal{H}(A)$.

On vérifie d'autre part que h est un morphisme de K-algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduées de $\phi(A)$ dans D(A) ; donc $\bar{h}$ est un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduées de $H(\phi(A))$ dans $\mathcal{H}(A)$.

(4.4) COHOMOLOGIES DIFFERENTIELLES D'UNE ALGEBRE DE POISSON.

Les notations sont celles de (4.2) et (4.3).

(4.4.1) Soit n un entier > 1. On note $D_n(A,E)$ le module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué $\bigoplus_p \mathrm{Dif}_n(A,E)^p$ et on pose $D_n(A,D) = D_n(A)$. $D_n(A)$ est une sous-algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée de C(A) (pour le produit $\curlywedge$) et $D_n(A,E)$ est un $D_n(A)$-module (pour $\curlywedge$) $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué.

PROPOSITION. - *Soit* $c \in D_n(A,E)$. *On a* $j(x)c \in D_n(A,E)$, $\vartheta(x)c \in D_n(A,E)$ $(x \in A)$ *et* $\partial c \in D_n(A,E)$.

Soient $x, x_o, \ldots, x_n \in A$, homogènes. D'après (42.2) on a $\mathrm{ad}(x_o)_\varepsilon \ldots \mathrm{ad}(x_n)_\varepsilon j(x) = \varepsilon(|x|, |x_o|+\ldots+|x_n|) j(x)\ \mathrm{ad}(x_o)_\varepsilon \ldots \mathrm{ad}(x_n)_\varepsilon$ et $\mathrm{ad}(x_o)_\varepsilon \ldots \mathrm{ad}(x_n)_\varepsilon \vartheta(x) =$
$$\varepsilon(|x|\ ,\ |x_0|+\ldots+|x_n|)\ \vartheta(x)\ \mathrm{ad}(x_o)_\varepsilon \ldots \mathrm{ad}(x_n)_\varepsilon$$
$+ \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ad}(y_o)_\varepsilon \ldots \mathrm{ad}(y_n)_\varepsilon$, où $y_o, \ldots, y_n \in A$. Ceci montre que $j(x)c \in D_n(A,E)$ et $\vartheta(x)c \in D_n(A,E)$. Si $y \in E$, on a $\partial y \in \mathrm{Der}(A,E) \subset \mathrm{Dif}_n(A,E)$; la formule $j(x)\partial = \vartheta(x) - \partial j(x)$ montre, par récurrence sur p, que, si $c \in \mathrm{Dif}_n(A,E)^p$, on a $\partial c \in \mathrm{Dif}_n(A,E)^{p+1}$.

(4.4.2) Ainsi, $(D_n(A), \partial)$ et $(D_n(A,E), \partial)$ sont des complexes de K-modules Δ-gradués dont on note, respectivement, $\mathcal{H}_n(A)$ et $\mathcal{H}_n(A,E)$ les K-modules $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradués de cohomologie. Le produit $\curlywedge$ induit sur $\mathcal{H}_n(A)$ un produit et une application $\mathcal{H}_n(A)\times\mathcal{H}_n(A,E) \to \mathcal{H}_n(A,E)$, encore notés $\curlywedge$. $\mathcal{H}_n(A)$ est une algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative et $\mathcal{H}_n(A,E)$ un $\mathcal{H}_n(A)$-module $\mathbb{Z}\times\Delta$-gradué. L'injection canonique $D_n(A,E) \to D_{n+1}(A,E)$ induit une application K-linéaire de degré (o,o) de $\mathcal{H}_n(A,E)$ dans $\mathcal{H}_{n+1}(A,E)$. Et, de même, l'injection $D_n(A) \to D_{n+1}(A)$ induit un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduées de $\mathcal{H}_n(A)$ dans $\mathcal{H}_{n+1}(A)$.

(4.4.3) Notons encore ∂ la restriction de ∂ à D(A,E) et, pour préciser, ∂_1 la restriction de ∂ a $D_1(A,E)$. Notons ϕ l'endomorphisme $C \mapsto F\curlywedge c$ degré (o,2) du K-module D(A,E) et ϕ_1 l'endomorphisme $c \mapsto F\curlywedge c$ du K-module $D_1(A,E)$.

On a la suite scindée, définie en (2.3.3),

$$0 \to D(A,E) \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} D_1(A,E) \underset{\tau}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} D(A,E) \to 0.$$

Et il est clair que

$$\begin{cases} \phi_1 \cdot \iota = \iota \cdot \phi & , \quad \phi_1 \tau = \tau \cdot \phi \; ; \\ \phi \cdot \rho = \rho \cdot \phi_1 & , \quad \phi \cdot \pi = \pi \cdot \phi_1 \; . \end{cases}$$

Comme $\partial_1 \iota = \iota \partial$, ι induit une application K-linéaire graduée $\bar{\iota}$ de degré (o,o) de $\mathcal{H}(A,E)$ dans $\mathcal{H}_1(A,E)$.

D'autre part, si $c \in D_1(A,E)$, on a $\partial_1(F \wedge c) = \partial F \curlywedge c + F \curlywedge \partial_1 c = F \curlywedge \partial_1 c$; donc $\partial_1 \cdot \phi_1 = \phi_1 \cdot \partial_1$. Donc ϕ_1 induit un endomorphisme $\bar{\phi}_1$ de degré (2,0) de $\mathcal{H}_1(A,E)$.

PROPOSITION. - *On a* $\iota \phi = \partial_1 \tau + \tau \partial$.

En effet, dans $D_1(A)$, on a $\partial_1(id_A) = F$ et, si $c \in D(A,E)$, on a $\tau(c) = id_A \curlywedge c$; d'où $\partial_1 \tau(c) = F \curlywedge c - id_A \curlywedge \partial c = i\phi(c) - \tau\partial(c)$.

COROLLAIRE. - *On a :*

$$\begin{aligned} \tau \partial_1 &= - \partial \pi, \\ \phi \partial_1 &= \partial \phi + \phi \pi, \\ \partial_1 &= -\tau \partial \pi + \iota(\partial \rho + \phi \pi). \end{aligned}$$

Soit $c \in D_1(A,E)$; on a $c = \tau\, \pi(c) + i\rho(c)$; donc $\partial_1 c = \partial_1 \tau\pi(c) + \partial_1 i\rho(c) = i\phi\pi(c) - \tau\partial\pi(c) + \iota\partial\rho(c)$; d'où la troisième formule. La seconde formule est alors immédiate. Mais alors on a $\pi\partial_1(c) = -\pi\tau\, \partial\pi(c) = - \partial\pi(c)$; d'où la première formule .

Par suite, π induit une application K-linéaire $\bar{\pi}$ de degré (o,o) de $\mathcal{H}_1(A,E)$ dans $\mathcal{H}(A,E)$.

(4.4.4) PROPOSITION. - *On a le diagramme exact*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(A,E) \arrow[rr, "\bar{\iota}"] & & \mathcal{H}_1(A,E) \arrow[dl, "\bar{\pi}"] \\ & \mathcal{H}(A,E) \arrow[ul, "\bar{\phi}"] & \end{tikzcd}$$

En effet de la suite exacte

$$0 \longrightarrow D(A,E) \xrightarrow{\iota} D_1(A,E) \xrightarrow{\pi} D(A,E) \longrightarrow 0 \quad ,$$

on déduit la suite exacte de cohomologie

$$\longrightarrow \mathcal{H}(A,E) \xrightarrow{\bar{\iota}} \mathcal{H}_1(A,E) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathcal{H}(A,E) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}(A,E) \longrightarrow \cdots$$

où δ est l'application linéaire de connexion ; la définition de δ montre que, si γ est la classe de cohomologie de $C \in D(A,E)$, $\delta(\gamma)$ est la classe de cohomologie de $\rho\delta_1\tau(c) = \rho i\phi(c) - \tau\partial c = \phi(c)$; autrement dit, on a $\delta = \bar{\phi}$.

COROLLAIRE 1. - *On a la suite exacte*

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow \mathcal{H}^1(A,E) & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{H}_1^1(A,E) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & E^A \\
 & & & & \downarrow \bar{\phi} \\
\mathcal{H}^1(A,E) & \xleftarrow{\bar{\pi}} & \mathcal{H}_1^2(A,E) & \xleftarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{H}^2(A,E) \\
\bar{\phi} \downarrow & & & & \\
\mathcal{H}^3(A,E) & \longrightarrow & \mathcal{H}^3(A,E) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2(A,E) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & \cdots & \longleftarrow & \mathcal{H}^4(A,E)
\end{array} .$$

COROLLAIRE 2. - *Si la classe de cohomologie de* F *est nulle, on a la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}(A,E) \xrightarrow{\bar{\iota}} \mathcal{H}_1(A,E) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathcal{H}(A,E) \longrightarrow 0.$$