JEAN BRACONNIER

2 - Calcul différentiel

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 1C
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___1C_A2_0>

2. CALCUL DIFFERENTIEL

(2.1) DERIVATIONS.

(2.1.1) Soit ε un facteur de commutation sur un groupe abélien Δ et soit A une K-algèbre Δ-graduée. On dit que $c \in \mathrm{Endgr}_K(A)$ homogène est une ε *-dérivation* ou simplement une *dérivation* si on a

$$c(xx') = c(x)x' + \varepsilon(|c|,|x|)\, xc(x')$$

pour $x \in A$ homogène et $x' \in A$.

On dit que $c \in \mathrm{Endgr}_K(A)$ est une dérivation si ses composants homogènes sont des dérivations au sens précédent. Les dérivations de A forment un sous-K-module gradué de $\mathrm{Endgr}_K(A)$, noté $\mathrm{Der}_K(A)$ ou $\mathrm{Der}(A)$.

Supposons A associative et unifère. Pour que $c \in \mathrm{Endgr}_K(A)$ soit une dérivation, il faut et il suffit que

$$[c,x] = c(x)\, \mathrm{id}_A \quad (x \in A).$$

Si $x \in A$, $\mathrm{ad}(x)$ est une dérivation, si $c,c' \in \mathrm{Der}(A)$, $[c,c']$ est une dérivation et on a

$$[\mathrm{ad}(x),c] = \mathrm{ad}(c(x)).$$

Enfin $\mathrm{Der}(A)$ est un sous-A module gradué de $\mathrm{Endgr}_K(A)$ (pour la loi définie par $(xu)(x') = xu(x')$).

(2.1.2) Soit A une K-algèbre Δ-graduée et ε-commutative. Et soit E un A-module; on généralise la définition précédente comme il suit : on dit que $c \in \mathrm{Homgr}_K(A,E)$ est une *dérivation* si

$$c(x\, x') = c(x)x' + \varepsilon(|x|,|x'|)c(x')x$$

pour $x, x' \in A$ homogènes

(c'est-à-dire, lorsque c est homogène, si $c(x,x') = c(x)x' + \varepsilon(|c|,|x|)\, xc(x'))$. Ker(c) est alors une sous-algèbre graduée de A.

Si l'on identifie le A-module Δ-gradué $\mathrm{Homgr}_A(\tilde{A},\tilde{E})$ à E par $u \mapsto u(1)$, on voit que, pour que $c \in \mathrm{Homgr}_K(A,E)$ soit une dérivation, il faut et il suffit que

$$[c,x] = c(x).$$

On note $\mathrm{Der}_K(A,E)$ ou $\mathrm{Der}(A,E)$ l'ensemble des dérivations de A dans E ; $\mathrm{Der}_K(A,E)$ est un sous-A-module gradué de $\mathrm{Homgr}_K(A,E)$.

Soient F un A-module Δ-gradué, $u \in \mathrm{Homgr}_A(E,F)$ et $c \in \mathrm{Der}_K(E,F)$; on a $u.c \in \mathrm{Der}_K(A,F)$.

(2.1.3). Soient A et E comme en (2.1.2). Soit E_A le K-module $A \times E$, Δ-gradué par $|(x,y)| = |x|$ si $x \in A$ est homogène et $y \in E$ (cela revient à considérer E comme gradué trivialement) ; on définit une structure de K-algèbre Δ-graduée sur E_A en posant $(x,y)(x',y') = (xx', yx' + \varepsilon(|x|,|x'|)y'x)$. On vérifie facilement que E_A est une K-algèbre Δ-graduée associative, unifère (d'élément unité (1,0)) et ε-commutative. La projection $p : (x,y) \mapsto x$ est un morphisme d'algèbres graduées, dit *augmentation* de E_A.

PROPOSITION. - *Soit* $c \in \mathrm{Homgr}_K(A,E)$. *Pour que* $c \in \mathrm{Der}_K(E)$, *il faut et il suffit que* $x \mapsto (x,c(x))$ *soit un* K-*morphisme (d'algèbres).*

(2.1.4) Soit A une K-algèbre Δ-graduée et ε-commutative. $A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A$ est une K-algèbre graduée et ε-commutative (cf. (1.1.2)) $x \mapsto x \otimes 1$ est une K-morphisme s de A dans $A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A$ qui est évidemment injectif ; on identifie A à son image ; $A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A$ est ainsi un A-module (à gauche) ; si $x, x', x'' \in A$, on a $x(x' \otimes x'') = (x \otimes 1)(x' \otimes x'') = xx' \otimes x''$.

Soit $m : A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A \to A$ le K-morphisme défini par $m(x \otimes y) = xy$. On note I l'idéal Ker(m). $\dot{s}$ est une section de m, de telle sorte que $A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A = A1 \oplus I$.

I, considéré comme A-module, est engendré par les $1 \otimes x - x \otimes 1$ $(x \in A)$. En effet, on a évidemment $1 \otimes x - x \otimes 1 \in I$; et si $\sum_i x_i \otimes x_i' \in A$, on a $\sum_i x_i x_i' = 0$, donc $\sum_i x_i \otimes x_i' = \sum_i x_i (1 \otimes x_i' - x_i' \otimes 1)$. $\Omega_K(A) = I/I^2$ est un idéal gradué de l'algèbre Δ-graduée $(A \underset{K}{\otimes} A)/I^2$; on écrit encore $\Omega(A)$ au lieu de $\Omega_K(A)$. Si $x \in A$, on note $dx \in \Omega(A)$ la classe de $1 \otimes x - x \otimes 1$ modulo I^2. $\Omega(A)$, *comme* A-*module à gauche, est engendré par* d(A)

PROPOSITION. - $d : A \to \Omega(A)$ *est une dérivation de degré* 0.

En effet, si $x, x' \in A$ sont homogènes, on a $A \otimes xx' - xx' \otimes 1 -$ $(1 \otimes X - x \otimes 1)(1 \otimes x' - x' \otimes 1) = 1 \otimes xx' - \varepsilon(|x|,|x'|)x'x \otimes 1 - 1 \otimes xx'$ $+ \varepsilon(|x|,|x'|).x' \otimes x + x \otimes x' - xx' \otimes 1 = \varepsilon(|x|,|x'|)x'(1 \otimes x - x \otimes 1)$ $+ x(1 \otimes x' - x' \otimes 1)$. Donc $d(xx') = \varepsilon(|x|,|x'|)x'(dx)+x(dx') = (dx)x'+x(dx')$.

(2.1.5) Soit A comme ci-dessus.

PROPOSITION. - *Pour tout* A-*module* Δ-*gradué* E, $u \mapsto u.d$ *est un isomorphisme de* A-*modules de* $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{\Omega(A)}, \check{E})$ *sur* Der (A,E).

Soit $u \in \mathrm{Homgr}_K(\widetilde{\Omega(A)},\tilde{E})$. Il est clair que $u.d \in \mathrm{Der}(A,F)$.

Soit $c \in \mathrm{Der}(A,E)$. Soit $v : A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A \to E$ l'application K-bilinéaire définie par $v(x \otimes x') = \varepsilon(|x|,|x'|)\, c(x')x$. Soient $x \otimes x', y \otimes y' \in I$; on a $v((x \otimes x')(y \otimes y')) = 0$; de plus $v((x \otimes x')x'') =$
$= \varepsilon(|x'|,|x''|)\, v(xx'' \otimes x') = \varepsilon(|x|,|x'|)\, c(x)xx'' = v(x \otimes x')x''$ si $x,x',x'' \in A$ sont homogènes. Il existe donc $u \in \mathrm{Homgr}_A(\widetilde{\Omega(A)},\tilde{E})$ tel que $u(dx) = v(1 \otimes x = x \otimes 1)$ $c(x)$. Et u est unique, puisque I est engendré, comme A-module, par $d(A)$.
Le reste est clair.

On identifiera $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{\Omega(A)},\tilde{E})$ à $\mathrm{Der}(A,E)$ au moyen de l'isomorphisme précédent.

Soient $u : A \to B$ un morphisme de K-algèbres Δ-graduées et ε-commutatives; il existe une unique application A-linéaire $\Omega(u) : \Omega(A) \to \Omega(B)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d"'] & B \arrow[d, "d"] \\ \Omega(A) \arrow[r, "\Omega(u)"'] & \Omega(B) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

(2.1.6) Soit A comme précédemment.

LEMME. - *Soient* E *un* A-*module* Δ-*gradué*, $c : A \to E$ *une dérivation de degré* 0 *et* $c' \in \mathrm{Homgr}_K(E, \Lambda^2_A(E))$ *homogène de degré* o *tels que*
$$c'(xy) = c(x)\wedge y + xc'(y) \qquad \textit{pour } x \in A,\ y \in E \textit{ homogènes.}$$
Il existe alors une dérivation unique de l'algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-*graduée* $\Lambda_A(E)$ *prolongeant* c *et* c' *et son degré est* (1,o).

Soit B l'algèbre $\mathbf{Z} \times \Delta$-graduée et $\varepsilon_{\mathbf{Z}}$-commutative $\Lambda_A(E)_{\Lambda_A(E)} = \Lambda_A(E) \times \Lambda_A(E)$, munie du produit $(z,u)(z',u') = (z \wedge z',\ u \wedge z' + (-1)^{\deg(z)\deg(z')}\varepsilon(|z|,|z'|)u' \wedge z)$.

Soit $u_o : A \to B$ défini par $u_o(x) = (x, c(x))$; u_o est un morphisme de K-algèbre Δ-graduée ; par u_o, B est une A-*algèbre*. Soit $u_1 : \Lambda_A(E) \to B$ défini par $u_1(y) = (y, c'(y'))$; u_1 est une application A-linéaire de E dans B. On a, si $y, y' \in E$ sont homogènes,

$$\begin{aligned} u_1(y)u_1(y') &= (y \wedge y', c'(y) \wedge y' + \varepsilon(|y|,|y'|)c'(y') \wedge y) \\ &= (y \wedge y', o) = -\varepsilon(|y|,|y'|)u_1(y')u_1(y). \end{aligned}$$

Donc (1.1.9), u_1 se prolonge, de manière unique, en un morphisme de A-algèbres $\mathbf{Z} \times \Delta$-graduées $u : \Lambda_A(E) \to B$. Si $p : B \to \Lambda_A(E)$ est l'augmentation de B , p.u et $id_{\Lambda_A(E)}$ coïncident dans A et E, donc dans $\Lambda_K(E)$ donc $u(z) = (z, c''(z))$, où $c'' \in \mathrm{Der}(\Lambda_A(E))$ (2.1.3). c" prolonge c et c' et c" est évidemment de degré (1,o).

PROPOSITION. - *Il existe une dérivation unique, encore notée* d, *de l'algèbre* $\Delta \times \mathbf{Z}$*-graduée et* $\varepsilon_{\mathbf{Z}}$*-commutative* $\Lambda_A(\Omega(A))$, *de degré* (1,o) , *prolongeant* $d : A \to \Omega(A)$ *et telle que* $d^2 = o$.

Soit $u : A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A \to \Lambda^2_A(\Omega(A))$ l'application K-linéaire définie par $u(x \otimes x') = dx \wedge dx'$ $(x, x' \in A)$. Pour $x, x', x'' \in A$ homogènes, on a

$$\begin{aligned} u((x' \otimes x'')(1 \otimes x - x \otimes 1)) &= u(x' \otimes x''x - \varepsilon(|x|,|x''|)x'x \otimes x'') \\ &= dx'' \wedge ((dx'')x + x''dx) - \varepsilon(|x|,|x''|)(dx')x + x'dx) \wedge dx'' \\ &= d(x'x'') \wedge dx. \end{aligned}$$

D'où , si $x \in A$ et $z \in A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A$, $u(z(1 \otimes x - x \otimes 1)) = dm(z) \wedge dx$.

Ceci montre que $u(I^2) = 0$; donc par passage au quotient, u définit une application K-linéaire $d' : \Omega(A) \to \Lambda^2_A(\Omega(A))$ de degré 0. En prenant $z = x' \otimes 1$ ($x'' \in A$), on a $d'(x'dx) = dx' \wedge dx$; d'où $d'.d = o$; en remplaçant x' par $x'x''$, on a $d(x'x''dx) = dx' \wedge x''dx + x'dx'' \wedge dx = dx' \wedge (x'dx) + x'd'(x''dx)$; donc $d'(x'\omega) = dx \wedge \omega + x'd'\omega$ si $\omega \in \Omega(A)$. D'après le lemme, il existe une dérivation encore notée d, de degré (0,1) de $\Lambda_A(\Omega(A))$ prolongeant d et d'. et on a $d^2 = o$, puisque $\Lambda_A(\Omega(A))$ est, comme A-algèbre, engendrée par d(A). Enfin, d est unique, car, si $x, x_1, \dots, x_p \in A$, on a

$$d(x\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) = dx \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p .$$

Ainsi $(\Lambda_A(\Omega(A)), d)$ est un complexe de K-modules Δ-gradués, dit *complexe de de Rham* de A sur $\mathbb{K}$ et Ker(d) est une sous-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée de $\Lambda_A(\Omega(A))$ et Im (d) est un idéal gradué de Ker(d). $H_{dR}(A) = \mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d)$ est une K-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$-commutative, qu'on appelle l'*algèbre (de cohomologie) de de Rham* de A.

(2.1.7) Soit E un A-module Δ-gradué. Soit $\nabla^\circ : E \to \Omega(A) \otimes_A E$ une application K-linéaire de degré 0 et telle que

$$\nabla^\circ(xy) = dx \otimes y + x\ \nabla^\circ(y) \qquad (x \in A, y \in E).$$

On dit que ∇° est une *connexion* sur E.

PROPOSITION. - *Soit* ∇° *une connexion sur* E. *Il existe un unique* K*-endomorphisme* ∇ *du module* $\mathbb{Z} \times \Delta$*-gradué* $\Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E$ *de degré* (1,0)*, prolongeant* ∇° *et tel que*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\nabla^\circ"] \arrow[d] & \Omega(A) \otimes_A E \arrow[d] \\ \Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E \arrow[r, "\nabla"] & \Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E \end{tikzcd}$$

$\nabla(\omega\alpha) = d\omega.\alpha + (-1)^{\deg(\omega)}\omega.\nabla\alpha$. *Pour* $\omega\ \Lambda_A(\Omega(A))$ $\alpha \in \Lambda_A(\Omega(A))$ *homogène et* $\alpha \in \Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E$). ∇^2 *est* $\Lambda_A(\Omega(A))$*-linéaire. En particulier,* $\nabla^2(\omega \otimes y) = \omega\, \nabla^2(y)$ *pour* $\omega \in \nabla_A(\Omega(A))$ *et* $y \in E$.

a) Soit B la K-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$-graduée $\Lambda_A(\Omega(A))$. Soit $u : B \times E \to B \otimes_A E$ l'application K-bilinéaire définie par $u(\omega,y) = d\omega \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} \omega.\nabla^\circ(y)$ ($\omega \in B$ homogène, $y \in E$) ; si $x \in A$, on a

$$u(\omega ,y) = (d\omega)x \otimes y+ (-1)^{\deg(\omega)}(\omega\wedge dx) \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} \omega\, x.\nabla^\circ(y)$$

$$= (d\omega) \otimes xy + (-1)^{\deg(\omega)} \omega\, (dx \otimes y + x\, \nabla^\circ(y))$$

$$= u(\omega,xy).$$

Il existe donc une application ∇ de $B \otimes_A E$ dans lui-même K-bilinéaire de degré (1,0) et telle que

$$\nabla(\omega \otimes y) = d\omega \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} \omega\nabla^\circ(y) \quad (\omega \in B, \text{ homogène, } y \in E)$$

et ∇ prolonge ∇°. Si ω, $\omega' \in B$ sont homogènes et si $y \in E$, on a

$$\nabla(\omega \wedge \omega' \otimes y) = (d\omega \wedge \omega') \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)}(\omega \wedge d\omega') \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)+\deg(\omega')} (\omega \wedge \omega')\ \nabla^\circ(y)$$

$$= d\omega\ .(\omega' \otimes y) + (-1)^{\deg(\omega)}\omega.\ \nabla(\omega' \otimes y).$$

Donc $\nabla(\omega.\alpha)=d\omega.\alpha+ (-1)^{\deg(\omega)} \omega\nabla(\alpha)$ si $\alpha = \omega' \otimes y$, donc pour tout $\alpha \in B \otimes_A E$. Et l'unicité de ∇ est évidente.

b) Si $\alpha \in B \otimes_A E$ et $\omega \in B$ est homogène, on a

$$\nabla^2(\omega.\alpha) = \nabla(d\omega.\alpha + (-1)^{\deg(\omega)}\omega.\nabla\alpha)$$

$$= d^2\omega.\alpha + (-1)^{\deg(\omega)+1} d\omega.\nabla\alpha + (-1)^{\deg(\omega)}d\omega.\nabla\alpha + \omega\, .\nabla^2\alpha$$

$$= \omega.\ \nabla^2\alpha\ ,$$

ce qui montre que ∇^2 est B-linéaire. Le reste s'en déduit immédiatement

On dit que $\nabla^2 \in \mathrm{Endgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A) \otimes_A E)$ est la *courbure* de ∇. Si $\nabla\nabla^\circ = o$, on a $\nabla^2 = o$ et $(\Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E,\nabla)$ est un complexe de K-modules, appelé le *complexe de de Rham de* (E,∇°).

(2.2) OPERATEURS DIFFERENTIELS.

Dans ce qui suit, on désigne par A une *K-algèbre Δ-graduée et ε-commutative.*

(2.2.1) Soient E et F des A-modules Δ-gradués. Soit n un entier ≥ 0. On dit que $c \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$ est un *opérateur différentiel d'ordre $\leq$ n* si l'on a

$$ad(x_o)ad(x_1)\ldots ad(x_n)c = 0$$

quels que soient $x_o,\ldots,x_n \in A$.

On note $\mathrm{Dif}_n(E,F)$ le K-module Δ-gradué formé des opérateurs différentiels d'ordre $\leq$ n de E dans F. On a $\mathrm{Dif}_o(E,F) = \mathrm{Homgr}_A(E,F)$.

Pour que $c \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$ appartienne à $\mathrm{Dif}_{n+1}(E,F)$, il faut et il suffit que pour tout $x \in A$, $ad(x)c \in \mathrm{Dif}_n(E,F)$ ou que $ad(x_1)\ldots ad(x_n)c\ \mathrm{Dif}_n(E,F)$ pour $x_1,\ldots,x_n \in A$.

Si $x,x' \in A$ sont homogènes et, si $c \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$, on a $ad(x)(x'c) = \varepsilon(|x|,|x'|)x'\ ad(x)c$; ceci montre que $\mathrm{Dif}_n(E,F)$ est un sous-A-module de $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$ (pour la loi (2) définie en (1.1.5)). Pour que $c \in \mathrm{Homgr}_K(E,F)$ soit un opérateur différentiel d'ordre $\leq$ n, il faut et il suffit qu'il en soit de même de ses composantes homogènes ; ainsi, $\mathrm{Dif}_n(E,F)$ est un sous-module Δ-gradué de $\mathrm{Homgr}_K(E,F)$.

On a $\mathrm{Dif}_n(E,F) \subset \mathrm{Dif}_{n'}(E,F)$ si $n < n'$. On note Dif(E,F) le A-module Δ-gradué $\bigcup_n \mathrm{Dif}_n(E,F)$, filtré par les $\mathrm{Dif}_n(E,F)$.

(2.2.2) Soit E un A-module. Si $c \in \mathrm{Dif}(A,E)$, on dit que $\pi(c) = c(1)$ est le *terme constant* de c ; on définit une application A-linéaire de A-modules gradués $\pi : \mathrm{Dif}(A,E) \to E$. $\pi : \mathrm{Dif}_o(A,E) = \mathrm{Homgr}_A(A,E) \to E$ est un isomorphisme de A-modules, dont le réciproque est $\tau : y \mapsto (x \mapsto yx)$).

PROPOSITION. - *La suite de A-modules*

$$0 \to \mathrm{Der}(A,E) \hookrightarrow \mathrm{Dif}_1(A,E) \underset{\tau}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} E \to 1$$

est scindée.

On vérifie facilement que si $c \in \mathrm{Der}(A,E)$, on a $c \in \mathrm{Dif}_1(A,E)$ et $c(1) = 0$. Soit $c \in \mathrm{Dif}_1(A,E)$, si $x,x' \in A$ sont homogènes, on a

$$\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(x')c(1) = xx'c(1) - \varepsilon(|c|,|x'|)x\, c(x') - \varepsilon(|c|+|x'|,|x|)\, x'c(x)$$
$$+\varepsilon(|c|,|x|+|x'|)c(xx') = 0$$

Si $c(1) = 0$, on a $c(xx') = c(x)x' + \varepsilon(|x|+|x'|)c(x')x$; donc $c \in \mathrm{Dif}(A,E)$. Le reste est clair.

(2.2.3) On note encore $\mathrm{Dif}_n(A)$ (resp. $\mathrm{Dif}(A)$) le A-module $\mathrm{Dif}_n(A,A)$ (resp. $\mathrm{Dif}(A,A)$).

PROPOSITION. - *Soit* n *et* n' *des entiers* $\geqslant 0$ *et* $c \in \mathrm{Dif}_n(A)$, $c \in \mathrm{Dif}_{n'}(A)$. *On a* $c.c' \in \mathrm{Dif}_{n+n'}(A)$ *et* $[c,c'] \in \mathrm{Dif}_{n+n'-1}(A)$.

Soit $I = \{0,1,..,p\}$ et $x_o,\dots,x_p \in A$; pour $H \subset I$, on pose $\mathrm{ad}(x_H) = \mathrm{ad}(x_{i_1})\dots\mathrm{ad}(x_{i_k})$ si $H = \{i_1,\dots,i_k\}$ avec $i_1 < \dots < i_k$ et $H' = I-H$.

On voit alors facilement que si $c,c' \in \mathrm{Endgr}_K(A)$, on a $\mathrm{ad}(x_o)\dots\mathrm{ad}(x_p)(c\cdot c') =$ $\sum_{H \subset I} \varepsilon_H\, \mathrm{ad}(x_H)c.\mathrm{ad}(x_{H'})c'$ et que $\mathrm{ad}(x_o)\dots\mathrm{ad}(x_p)[c,c'] =$ $\sum_{H \subset I} \varepsilon'_H[\mathrm{ad}(x_H)c,\mathrm{ad}(x_{H'})c']$, où $\varepsilon_H = \pm 1$ et $\varepsilon'_H = \pm 1$.

Prenons $p = n+n'$; si $\mathrm{Card}(H) \geqslant n+1$, on a $\mathrm{ad}(x_H)c = 0$; si $\mathrm{Card}(H) \leqslant n$; on a $\mathrm{Card}(H') \geqslant n'+1$, donc $\mathrm{ad}(x_{H'})c' = 0$; donc $\mathrm{ad}(x_o)\dots\mathrm{ad}(x_{n+n'})(c.c') = 0$.

Prenons maintenant $p = n+n'-1$; si $\mathrm{Card}(H) \geqslant n+1$, $\mathrm{ad}(x_H)c = 0$ et, si $\mathrm{Card}(H) \leqslant n-1$, on a $\mathrm{Card}(H) \geqslant n'+1$, donc $\mathrm{ad}(x_{H'})c' = 0$;

d'où $ad(x_o)\ldots ad(x_{n+n-1})[c,c'] = \sum_{Card(H)=n} \varepsilon'_H[ad(x_H)c\ ad(x_{CH})c']$.

Mais, si Card(H) = n, $ad(x_H)c$ et $ad(x_{H'})c'$ sont des opérateurs différentiels de degré 0, donc de la forme $x id_A$ et $x' id_A$ et on a alors

$[x id_A , x' id_A] = [x,x']\ id_A = 0$.

En particulier, si $c \in Dif_1(A)$, on a $[c,c'] \in Dif_n(A)$ pour tout $c' \in Dif_n(A)$.

Ainsi, Dif(A), muni de $(u,v) \mapsto u.v$, est donc une K-algèbre Δ-graduée et filtrée ; la K-algèbre gr(Dif(A)) =

$\bigoplus_{n>0} Dif_n(A)/Dif_{n-1}(A) = A \oplus Der(A) \oplus (Dif_2(A)/Dif_1(A)) \oplus \ldots$ est appelée *l'algèbre des symboles* de A et notée Symb(A). En vertu de ce qui précède, Symb(A). En vertu de ce qui précède, Symb(A) est une K-algèbre $\mathbb{Z} \times A$ *graduée, ε -commutative.*

(2.2.4) Soit n un entier > 0 ; on utilise les notations de (2.1.4). Pour $x \in A$ soit $\delta_n x$ la classe de $1 \otimes x$ dans la K-algèbre (Δ-graduée et ε-commutative) $P_n(A) = A \otimes_K A/I^{n+1}$. Si $\varepsilon_n = \delta_n(1)$, on a $P_n(A) = A\varepsilon_n \oplus (I/I^{n+1})$,. Pour $x \in A$, soit $d_n(x) \in I/I^{n+1}$ la classe de $1 \otimes x - x \otimes 1$; on a $\delta_n(x) = x\varepsilon_n + d_n(x)$ et I/I^{n+1}, comme A-module à gauche, est engendré par $d_n(A)$.

PROPOSITION . - $\delta_n : A^n \to P_n(A)$ *est un opérateur différentiel d'ordre* <0 *et de degré* 0.

Soit α l'application $x \mapsto 1 \otimes x$. Si $x_o, x_1 \in A, (ad(x_o)\alpha)(x) = x_o \otimes x - 1 \otimes x_o x$ $= x_o \otimes x - 1 \otimes x_o x \in I$ et $ad(x_o)ad(x_1)\alpha(x) = -(1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)(ad(x_o)\alpha(x))$; d'où, par récurrence sur n, $ad(x_o)\ldots ad(x_n)\alpha(x) \in I^{n+1}$.

(2.2.5) PROPOSITION. - *Pour tout* A-*module* Δ-*gradué* , $u \mapsto u.\delta_n$ *est un isomorphisme de* A-*modules de* $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{P_n(A)},\widetilde{E})$ *sur* $\mathrm{Dif}_n(A,E)$.

Comme $u \in \mathrm{Dif}_n(A,E)$, il est clair que $u.\delta_n \in \mathrm{Dif}_n(A,E)$. Soit $c \in \mathrm{Dif}_n(A,E)$. Soit $v : A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A \to E$ l'application K-bilinéaire définie par $v(x \otimes x') =$ $v(x \otimes x') = \varepsilon(|x|,|x'|)\, c(x')x$: on vérifie que v est nulle dans I^{n+1} et que $v(zx) = v(z)x$ pour tous $z \in A \overset{\varepsilon}{\underset{K}{\otimes}} A$ et $x \in A$. Il existe donc $u \in \mathrm{Homgr}_A(\widetilde{P_n(A)},\widetilde{E})$ tel que $u(\delta_n(x)) = c(x)$ pour tout $x \in A$ et u est évidemment unique.

On *identifiera* $\mathrm{Homgr}_A(\widetilde{P_n(A)},\widetilde{E})$ *à* $\mathrm{Dif}_n(A,E)$ au moyen de l'isomorphisme précédent.

Soit $u : A \to B$ un morphisme de K-algèbres Δ-graduées et ε-commutatives ; pour tout $n \geqslant 0$, il existe une unique application A-linéaire $P_n(u) : P_n(A) \to P_n(B)$ telle que la diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\delta_n"'] & B \arrow[d, "\delta_n"] \\
P_n(A) \arrow[r, "P_n(u)"'] & P_n(B)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

(2.2.6) Soit E un A-module. La suite scindée

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(A,E) \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Dif}_1(A,E) \underset{\tau}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} E \longrightarrow 0$$

(cf. (2.2.2)) s'identifie à la suite scindée

$$0 \longrightarrow \mathrm{Homgr}_A(\Omega(A),E) \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Homgr}_A(P\ (A),E) \underset{\tau}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} E \longrightarrow 0 \quad ,$$

où les applications A-linéaires ι, ρ, π et τ sont, cette fois, définies par

$$\iota(c)(\delta_1 x) = c(dx) \qquad , \qquad \rho(c)dx = c(dx),$$
$$\pi(c) = c(\delta_1 1) \qquad , \qquad \tau(y)(\delta_1 x) = yx \quad (x \in A,\ y \in E).$$

(2.3) MULTIDERIVATIONS ET OPERATEURS MULTIDIFFERENTIELS.

On désigne toujours par A une K-algèbre Δ-graduée et ε-commutative.

(2.3.1) Soit E un A-module Δ-gradué. Soit p un entier ≥ 0 et $c \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A),E)$. On dit que c est une *multidérivation (ε-alternée)* si $j(z)c \in \mathrm{Der}(A,E)$ pour tout $z \in \Lambda_K^{p-1}(A)$; lorsque c est homogène, cette condition s'écrit

$$c(x_1\wedge\ldots\wedge x_p x'_p) = c(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)x'_p + \varepsilon(|c|+|x_1|+\ldots+|x_{p-1}|,|x_p|)\ x_p c(x_1\wedge\ldots\wedge x'_p).$$

$(x_1,\ldots,x_p,x'_p \in A$ homogènes).

Les multidérivations de A^p dans E forment un sous-A-module Δ-gradué de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A),E)$ (pour la loi définie par $(xc)(z) = xc(z)$), noté $\mathrm{Der}(A,E)^p$.

Et on dit que $c \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(A),E)$ est une *multidérivation* si chaque composant homogène de c, de degré p, appartient à $\mathrm{Der}(A,E)^p$.

L'élément $d^p \in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A),\ \Lambda_A^p(\Omega(A))$ défini par $d^p(x_1\wedge\ldots\wedge x_p) = dx_1\wedge\ldots\wedge dx_p$ est une multidérivation de degré $o \in \Delta$.

PROPOSITION. - $u \mapsto u.d^p$ *est un isomorphisme de* A-*modules* Δ-*gradués de* $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^p(\Omega(A))\check{},\tilde{E})$ *sur* $\mathrm{Der}(A,E)^p$.

Que $u \mapsto u.d^p$ soit une application A-linéaire de $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^p(\Omega(A))\check{},\tilde{E})$ dans $\mathrm{Der}(A,E)^p$ est évident ; et cette application est injective car $\Lambda_A^p(\Omega_A(E))$ est engendré, comme A-module, par les $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_p$ $(x_i \in A)$. Et la définition des multidérivations montre que, si $c \in \mathrm{Der}(A,E)^p$, $c(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)$ ne dépend que de $(dx_1,\ldots,dx_p)$ $(x_i \in A)$.

On identifie $\mathrm{Der}(A,E)^p$ à $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^p(\Omega(A))\tilde{},\tilde{E})$ au moyen de l'isomorphisme précédent et, par suite, $\bigoplus_p \mathrm{Der}(A,E)^p$ à $\mathrm{Homgr}_A\ (\Lambda_A(\Omega(A))\tilde{},\tilde{E})$.

$\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim},\tilde{A})$ s'identifie à une sous-algèbre graduée de l'algèbre $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(\Omega(A)),A)$ $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée (munie de $\curlywedge$). Et, de même $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim},\tilde{E})$ s'identifie à un sous-$\mathrm{Homgr}_A(\Omega(A)^{\sim},\tilde{A})$-module de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(\Omega(A)),E)$ (pour la loi $\curlywedge$).

(2.3.2) Les notations sont celles de (2.3.1). Soit x un entier > 0. Soit $c\in \mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A),E)$; on dit que c est un *opérateur multidifférentiel* (ε-*alterné*) *d'ordre* $<n$ si $j(z)c\ \in\ \mathrm{Dif}_n(A,E)$ pour tout $z\in\Lambda_K^{p-1}(A))$. Ces opérateurs forment un sous A-module Δ-gradué de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A),E)$ noté $\mathrm{Dif}_n(A,E)^p$. Et on dit que $c\in\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(A),E)$ est un *opérateur multidifférentiel d'ordre* $\leqslant n$ si chacun des composants homogènes de c, de degré p, est un élément de $\mathrm{Dif}_n(A,E)^p$.

L'élément $\delta_n{}^p\in\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A),\Lambda_A^p(P_n(A))$ défini par

$\delta_n^p(x_1\wedge\ldots\wedge x_p)=\delta_n x_1\wedge\ldots\wedge\delta_n x_p$ est un opérateur multidifférentiel d'ordre $\leqslant n$. $u\mapsto u.\delta_p$ est un isomorphisme de A-modules Δ-gradués de $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^p(P_n(A))^{\sim},\tilde{E})$ sur $\mathrm{Dif}_n(A,E)^p$. D'où un isomorphisme de $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim},\tilde{E})$ sur $\bigoplus_p \mathrm{Dif}_n(A,E)^p$, ce qui permet d'identifier ces A-modules.

Enfin, la K-algèbre $\mathbb{Z}\times\Delta$-graduée alternée $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim},\tilde{A})$ (munie de $\curlywedge$) s'identifie à une sous-algèbre graduée de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(P_n(A)),A)$ (pour $\curlywedge$) et $\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim},\tilde{E})$ à un sous-$\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim},\tilde{A})$-module de $\mathrm{Homgr}_K(\Lambda_K(P_n(A)),E)$.

(2.3.3) On conserve les notations de (2.3.1). Pour $p\in\mathbb{N}$, on a la suite scindée d'applications A-linéaires de modules $\mathbb{Z}\times\Delta$ gradués, de degrés 0.

$$0\to\mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^p(\Omega_A(A))^{\sim},\tilde{E})\ \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}}\ \mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^p(P_\wedge(A))^{\sim},\tilde{E})\ \underset{\tau}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}}\ \mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^{p-1}(\Omega(A))^{\sim},\tilde{E})\to 0\ ,$$

où ι, ρ , π et τ sont définies par

$$\iota(c)\ (\delta_1 x_1 \wedge \ldots \wedge \delta_1 x_p) = c(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p)\ ,$$

$$\rho(c)\ (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) \quad = c(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p)\ ,$$

$$\pi(c) = j(\varepsilon)c,$$

$$\tau(c) = id_A \curlywedge c$$

(où id_A est considéré comme un élément de $\mathrm{Dif}_1(A) = \mathrm{Homgr}_A(P_1(A)^{\sim}, \widetilde{A})$; on notera que l'on a

$$(id_A \curlywedge c)(\delta_1 x_1 \wedge \ldots \wedge \delta_1 x_p) = \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |x_{i+1}| + \ldots + |x_p|)\, c\, (dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_p)$$

pour $c \in \mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A^{p-1}(\Omega(A))^{\sim}, \widetilde{E}))$.

Pour $p = 1$, cette suite exacte coïncide avec celle de (2.2.2). D'où la suite scindée

$$0 \to \mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim}, \widetilde{E}) \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(P_A(A))^{\sim}, \widetilde{E}) \underset{\tau}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim}, \widetilde{E}) \to 0\ .$$

Et on a

$$\iota(c \curlywedge c) = \iota(c) \wedge \iota(c')\ ,$$

$$\tau(c \curlywedge c') = c \curlywedge \tau(c')\ ,$$

si c est une multidérivation à valeurs dans A et c' une multidérivation à valeurs dans E, et

$$\pi(c \curlywedge c') = \pi(c) \curlywedge c' + (-1)^{\deg(c)}\ c \curlywedge \pi(c'),$$

$$\rho(c \curlywedge c') = \rho(c) \curlywedge \rho(c'),$$

si c est un opérateur multidifférentiel à valeurs dans A et c' un opérateur multidifférentiel à valeurs dans E. Ces formules résultent facilement des définitions.