

JEAN BRACONNIER

2 - Calcul différentiel

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 1C
« Eléments d'algèbre différentielle graduée », , p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982__1C_A2_0

© Université de Lyon, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

2. CALCUL DIFFERENTIEL

(2.1) DERIVATIONS.

(2.1.1) Soit ε un facteur de commutation sur un groupe abélien Δ et soit A une K -algèbre Δ -graduée. On dit que $c \in \text{Endgr}_K(A)$ homogène est une ε -*dérivation* ou simplement une *dérivation* si on a

$$c(xx') = c(x)x' + \varepsilon(|c|, |x|) xc(x')$$

pour $x \in A$ homogène et $x' \in A$.

On dit que $c \in \text{Endgr}_K(A)$ est une dérivation si ses composants homogènes sont des dérivations au sens précédent. Les dérivations de A forment un sous- K -module gradué de $\text{Endgr}_K(A)$, noté $\text{Der}_K(A)$ ou $\text{Der}(A)$.

Supposons A associative et unifère. Pour que $c \in \text{Endgr}_K(A)$ soit une dérivation, il faut et il suffit que

$$[c, x] = c(x) \text{id}_A \quad (x \in A).$$

Si $x \in A$, $\text{ad}(x)$ est une dérivation, si $c, c' \in \text{Der}(A)$, $[c, c']$ est une dérivation et on a

$$[\text{ad}(x), c] = \text{ad}(c(x)).$$

Enfin $\text{Der}(A)$ est un sous- A module gradué de $\text{Endgr}_K(A)$ (pour la loi définie par $(xu)(x') = xu(x')$).

(2.1.2) Soit A une K -algèbre Δ -graduée et ε -commutative. Et soit E un A -module; on généralise la définition précédente comme il suit : on dit que $c \in \text{Homgr}_K(A, E)$ est une *dérivation* si

$$c(x x') = c(x)x' + \varepsilon(|x|, |x'|)c(x')x$$

pour $x, x' \in A$ homogènes

(c'est-à-dire, lorsque c est homogène, si $c(x, x') = c(x)x' + \varepsilon(|c|, |x|)xc(x')$).

$\text{Ker}(c)$ est alors une sous-algèbre graduée de A.

Si l'on identifie le A-module Δ -gradué $\text{Homgr}_A(\tilde{A}, \tilde{E})$ à E par $u \mapsto u(1)$, on voit que, pour que $c \in \text{Homgr}_K(A, E)$ soit une dérivation, il faut et il suffit que

$$[c, x] = c(x).$$

On note $\text{Der}_K(A, E)$ ou $\text{Der}(A, E)$ l'ensemble des dérivations de A dans E ; $\text{Der}_K(A, E)$ est un sous-A-module gradué de $\text{Homgr}_K(A, E)$.

Soient F un A-module Δ -gradué, $u \in \text{Homgr}_A(E, F)$ et $c \in \text{Der}_K(E, F)$; on a $u.c \in \text{Der}_K(A, F)$.

(2.1.3). Soient A et E comme en (2.1.2). Soit E_A le K-module $A \times E$, Δ -gradué par $|(x, y)| = |x|$ si $x \in A$ est homogène et $y \in E$ (cela revient à considérer E comme gradué trivialement) ; on définit une structure de K-algèbre Δ -graduée sur E_A en posant $(x, y)(x', y') = (xx', yx' + \varepsilon(|x|, |x'|)y'x)$. On vérifie facilement que E_A est une K-algèbre Δ -graduée associative, unifère (d'élément unité $(1, 0)$) et ε -commutative. La projection $p : (x, y) \mapsto x$ est un morphisme d'algèbres graduées, dit *augmentation* de E_A .

PROPOSITION. - Soit $c \in \text{Homgr}_K(A, E)$. Pour que $c \in \text{Der}_K(E)$, il faut et il suffit que $x \mapsto (x, c(x))$ soit un K-morphisme (d'algèbres).

(2.1.4) Soit A une K-algèbre Δ -graduée et ε -commutative.

$A \overset{\varepsilon}{\otimes} A$ est une K-algèbre graduée et ε -commutative (cf. (1.1.2)) $x \mapsto x \otimes 1$ est une K-morphisme s de A dans $A \overset{\varepsilon}{\otimes} A$ qui est évidemment injectif ; on identifie A à son image ; $A \overset{\varepsilon}{\otimes} A$ est ainsi un A-module (à gauche) ; si $x, x', x'' \in A$, on a $x(x' \otimes x'') = (x \otimes 1)(x' \otimes x'') = xx' \otimes x''$.

Soit $m : A \overset{\varepsilon}{\otimes} A \rightarrow A$ le K-morphisme défini par $m(x \otimes y) = xy$. On note I l'idéal $\text{Ker}(m)$. \hat{s} est une section de m, de telle sorte que $A \overset{\varepsilon}{\otimes} A = A \hat{\otimes} I$.

I, considéré comme A-module, est engendré par les $1 \otimes x - x \otimes 1$ ($x \in A$). En effet, on a évidemment $1 \otimes x - x \otimes 1 \in I$; et si $\sum_i x_i \otimes x'_i \in A$, on a $\sum_i x_i x'_i = 0$, donc $\sum_i x_i \otimes x'_i = \sum_i x_i (1 \otimes x'_i - x'_i \otimes 1)$. $\Omega_K(A) = I/I^2$ est un idéal gradué de l'algèbre Δ -graduée $(A \overset{\varepsilon}{\otimes} A)/I^2$; on écrit encore $\Omega(A)$ au lieu de $\Omega_K(A)$. Si $x \in A$, on note $dx \in \Omega(A)$ la classe de $1 \otimes x - x \otimes 1$ modulo I^2 . $\Omega(A)$, comme A-module à gauche, est engendré par $d(A)$

PROPOSITION. - $d : A \rightarrow \Omega(A)$ est une dérivation de degré 0.

En effet, si $x, x' \in A$ sont homogènes, on a $A \otimes xx' - xx' \otimes 1 - (1 \otimes X - x \otimes 1)(1 \otimes x' - x' \otimes 1) = 1 \otimes xx' - \varepsilon(|x|, |x'|)x'x \otimes 1 - 1 \otimes xx' + \varepsilon(|x|, |x'|)x' \otimes x + x \otimes x' - xx' \otimes 1 = \varepsilon(|x|, |x'|)x'(1 \otimes x - x \otimes 1) + x(1 \otimes x' - x' \otimes 1)$. Donc $d(xx') = \varepsilon(|x|, |x'|)x'(dx) + x(dx')$.

(2.1.5) Soit A comme ci-dessus.

PROPOSITION. - Pour tout A-module Δ -gradué E, $u \mapsto u.d$ est un isomorphisme de A-modules de $\text{Homgr}_A(\widetilde{\Omega(A)}, \widetilde{E})$ sur $\text{Der}(A, E)$.

Soit $u \in \text{Homgr}_K(\widetilde{\Omega}(A), \widetilde{E})$. Il est clair que $u.d \in \text{Der}(A, F)$.

Soit $c \in \text{Der}(A, E)$. Soit $v : A \overset{\varepsilon}{\otimes} A \rightarrow E$ l'application K -bilineaire définie

par $v(x \otimes x') = \varepsilon(|x|, |x'|) c(x')$. Soient $x \otimes x', y \otimes y' \in I$; on a

$v((x \otimes x')(y \otimes y')) = 0$; de plus $v((x \otimes x')x'') =$

$= \varepsilon(|x'|, |x''|) v(xx'' \otimes x') = \varepsilon(|x|, |x'|) c(x)xx'' = v(x \otimes x')x''$ si $x, x', x'' \in A$

sont homogènes. Il existe donc $u \in \text{Homgr}_A(\widetilde{\Omega}(A), \widetilde{E})$ tel que $u(dx) = v(1 \otimes x - x \otimes 1) c(x)$. Et u est unique, puisque I est engendré, comme A -module, par $d(A)$.

Le reste est clair.

On identifiera $\text{Homgr}_A(\widetilde{\Omega}(A), \widetilde{E})$ à $\text{Der}(A, E)$ au moyen de l'isomorphisme précédent.

Soient $u : A \rightarrow B$ un morphisme de K -algèbres Δ -graduées et ε -commutatives ; il existe une unique application A -linéaire $\Omega(u) : \Omega(A) \rightarrow \Omega(B)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & B \\
 d \downarrow & & \downarrow d \\
 \Omega(A) & \xrightarrow{\Omega(u)} & \Omega(B)
 \end{array}$$

soit commutatif.

(2.1.6) Soit A comme précédemment.

LEMME. - Soient E un A -module Δ -gradué, $c : A \rightarrow E$ une dérivation de degré 0 et $c' \in \text{Homgr}_K(E, \Lambda_A^2(E))$ homogène de degré 0 tels que

$$c'(xy) = c(x)\wedge y + xc'(y) \quad \text{pour } x \in A, y \in E \text{ homogènes. Il}$$

existe alors une dérivation unique de l'algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée $\Lambda_A(E)$ prolongeant c et c' et son degré est $(1, 0)$.

Soit B l'algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative $\Lambda_A(E) \otimes_{\Lambda_A(E)} = \Lambda_A(E) \times \Lambda_A(E)$, munie du produit $(z, u)(z', u') = (z \wedge z', u \wedge z' + (-1)\deg(z)\deg(z')\varepsilon(|z|, |z'|)u' \wedge z)$.

Soit $u_0 : A \rightarrow B$ défini par $u_0(x) = (x, c(x))$; u_0 est un morphisme de K -algèbre Δ -graduée; par u_0 , B est une A -algèbre. Soit $u_1 : \Lambda_A(E) \rightarrow B$ défini par $u_1(y) = (y, c'(y))$; u_1 est une application A -linéaire de E dans B . On a, si $y, y' \in E$ sont homogènes,

$$\begin{aligned} u_1(y)u_1(y') &= (y \wedge y', c'(y) \wedge c'(y') + \varepsilon(|y|, |y'|)c'(y') \wedge c'(y)) \\ &= (y \wedge y', 0) = -\varepsilon(|y|, |y'|)u_1(y')u_1(y). \end{aligned}$$

Donc (1.1.9), u_1 se prolonge, de manière unique, en un morphisme de A -algèbres $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduées $u : \Lambda_A(E) \rightarrow B$. Si $p : B \rightarrow \Lambda_A(E)$ est l'augmentation de B , $p \circ u$ et $\text{id}_{\Lambda_A(E)}$ coïncident dans A et E , donc dans $\Lambda_K(E)$ donc $u(z) = (z, c''(z))$, où $c'' \in \text{Der}(\Lambda_A(E))$

(2.1.3). c'' prolonge c et c' et \dots . c'' est évidemment de degré $(1, 0)$.

PROPOSITION. - Il existe une dérivation unique, encore notée d , de l'algèbre $\Delta \times \mathbb{Z}$ -graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative $\Lambda_A(\Omega(A))$, de degré $(1, 0)$, prolongeant $d : A \rightarrow \Omega(A)$ et telle que $d^2 = 0$.

Soit $u : A \otimes_K A \rightarrow \Lambda_A^2(\Omega(A))$ l'application K -linéaire définie par

$u(x \otimes x') = dx \wedge dx'$ ($x, x' \in A$). Pour $x, x', x'' \in A$ homogènes, on a

$$\begin{aligned} u((x' \otimes x'')(1 \otimes x - x \otimes 1)) &= u(x' \otimes x''x - \varepsilon(|x|, |x''|)x'x \otimes x'') \\ &= dx'' \wedge ((dx')x + x''dx) - \varepsilon(|x|, |x''|)(dx')x + x'dx \wedge dx'' \\ &= d(x'x'') \wedge dx. \end{aligned}$$

D'où, si $x \in A$ et $z \in A \otimes_K A$, $u(z(1 \otimes x - x \otimes 1)) = dz \wedge dx$.

Ceci montre que $u(I^2) = 0$; donc par passage au quotient, u définit une application K -linéaire $d' : \Omega(A) \rightarrow \Lambda_A^2(\Omega(A))$ de degré 0. En prenant

$z = x' \otimes 1$ ($x'' \in A$), on a $d'(x'dx) = dx' \wedge dx$; d'où $d'.d = 0$; en remplaçant x' par $x'x''$, on a $d(x'x''dx) = dx' \wedge x''dx + x'dx' \wedge dx = dx' \wedge (x'dx) + x'd'(x''dx)$;

donc $d'(x'\omega) = dx \wedge \omega + x'd'\omega$ si $\omega \in \Omega(A)$. D'après le lemme, il existe une dérivation encore notée d , de degré (0,1) de $\Lambda_A(\Omega(A))$ prolongeant d et d' . et on a $d^2 = 0$, puisque $\Lambda_A(\Omega(A))$ est, comme A -algèbre, engendrée par $d(A)$.

Enfin, d est unique, car, si $x, x_1, \dots, x_p \in A$, on a

$$d(x dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) = dx \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p.$$

Ainsi $(\Lambda_A(\Omega(A)), d)$ est un complexe de K -modules Δ -gradués, dit *complexe de de Rham* de A sur K et $\text{Ker}(d)$ est une sous-algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée de $\Lambda_A(\Omega(A))$ et $\text{Im}(d)$ est un idéal gradué de $\text{Ker}(d)$. $H_{dR}(A) = \text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$ est une K -algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée et $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ -commutative, qu'on appelle l'*algèbre (de cohomologie) de de Rham* de A .

(2.1.7) Soit E un A -module Δ -gradué. Soit $\nabla^\circ : E \rightarrow \Omega(A) \otimes_A E$ une application

K -linéaire de degré 0 et telle que

$$\nabla^\circ(xy) = dx \otimes y + x \nabla^\circ(y) \quad (x \in A, y \in E).$$

On dit que ∇° est une *connexion* sur E .

PROPOSITION. - Soit ∇° une connexion sur E . Il existe un unique K -endomorphisme ∇ du module $\mathbb{Z} \times \Delta$ -gradué $\Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E$ de degré (1,0), prolongeant ∇° et tel que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\nabla^\circ} & \Omega(A) \otimes_A E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E & \xrightarrow{\nabla} & \Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E \end{array}$$

$\nabla(\omega\alpha) = d\omega \cdot \alpha + (-1)^{\text{deg}(\omega)} \omega \cdot \nabla\alpha$. Pour $\omega \in \Lambda_A(\Omega(A))$ $\alpha \in \Lambda_A(\Omega(A))$ homogène et $\alpha \in \Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E$. ∇^2 est $\Lambda_A(\Omega(A))$ -linéaire. En particulier, $\nabla^2(\omega \otimes y) = \omega \nabla^2(y)$ pour $\omega \in \Lambda_A(\Omega(A))$ et $y \in E$.

a) Soit B la K -algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée $\Lambda_A(\Omega(A))$. Soit $u : B \times E \rightarrow B \otimes_A E$ l'application K -bilineaire définie par $u(\omega, y) = d\omega \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \cdot \nabla^\circ(y)$ ($\omega \in B$ homogène, $y \in E$) ; si $x \in A$, on a

$$\begin{aligned} u(\omega, y) &= (d\omega)x \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} (\omega \wedge dx) \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \cdot x \cdot \nabla^\circ(y) \\ &= (d\omega) \otimes xy + (-1)^{\deg(\omega)} \omega (dx \otimes y + x \nabla^\circ(y)) \\ &= u(\omega, xy). \end{aligned}$$

Il existe donc une application ∇ de $B \otimes_A E$ dans lui-même K -bilineaire de degré $(1,0)$ et telle que

$$\nabla(\omega \otimes y) = d\omega \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \nabla^\circ(y) \quad (\omega \in B, \text{ homogène}, y \in E)$$

et ∇ prolonge ∇° . Si $\omega, \omega' \in B$ sont homogènes et si $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \nabla(\omega \wedge \omega' \otimes y) &= (d\omega \wedge \omega') \otimes y + (-1)^{\deg(\omega)} (\omega \wedge d\omega') \otimes y + (-1)^{\deg(\omega) + \deg(\omega')} (\omega \wedge \omega') \nabla^\circ(y) \\ &= d\omega \cdot (\omega' \otimes y) + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \cdot \nabla(\omega' \otimes y). \end{aligned}$$

Donc $\nabla(\omega \cdot \alpha) = d\omega \cdot \alpha + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \nabla(\alpha)$ si $\alpha = \omega' \otimes y$, donc pour tout $\alpha \in B \otimes_A E$. Et l'unicité de ∇ est évidente.

b) Si $\alpha \in B \otimes_A E$ et $\omega \in B$ est homogène, on a

$$\begin{aligned} \nabla^2(\omega \cdot \alpha) &= \nabla(d\omega \cdot \alpha + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \cdot \nabla \alpha) \\ &= d^2 \omega \cdot \alpha + (-1)^{\deg(\omega)+1} d\omega \cdot \nabla \alpha + (-1)^{\deg(\omega)} d\omega \cdot \nabla \alpha + \omega \cdot \nabla^2 \alpha \\ &= \omega \cdot \nabla^2 \alpha, \end{aligned}$$

ce qui montre que ∇^2 est B -linéaire. Le reste s'en déduit immédiatement

On dit que $\nabla^2 \in \text{Endgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E)$ est la *courbure* de ∇ . Si $\nabla \nabla^\circ = 0$, on a $\nabla^2 = 0$ et $(\Lambda_A(\Omega(A)) \otimes_A E, \nabla)$ est un complexe de K -modules, appelé le *complexe de de Rham* de (E, ∇°) .

(2.2) OPERATEURS DIFFERENTIELS.

Dans ce qui suit, on désigne par A une K -~~algèbre~~ Δ -graduée et ε -commutative.

(2.2.1) Soient E et F des A -modules Δ -gradués. Soit n un entier ≥ 0 . On dit que $c \in \text{Homgr}_K(E, F)$ est un *opérateur différentiel d'ordre* $\leq n$ si l'on a

$$\text{ad}(x_0)\text{ad}(x_1)\dots\text{ad}(x_n)c = 0$$

quels que soient $x_0, \dots, x_n \in A$.

On note $\text{Dif}_n(E, F)$ le K -module Δ -gradué formé des opérateurs différentiels d'ordre $\leq n$ de E dans F . On a $\text{Dif}_0(E, F) = \text{Homgr}_A(E, F)$.

Pour que $c \in \text{Homgr}_K(E, F)$ appartienne à $\text{Dif}_{n+1}(E, F)$, il faut et il suffit que pour tout $x \in A$, $\text{ad}(x)c \in \text{Dif}_n(E, F)$ ou que $\text{ad}(x_1)\dots\text{ad}(x_n)c \in \text{Dif}_n(E, F)$ pour $x_1, \dots, x_n \in A$.

Si $x, x' \in A$ sont homogènes et, si $c \in \text{Homgr}_K(E, F)$, on a $\text{ad}(x)(x'c) = \varepsilon(|x|, |x'|)x' \text{ad}(x)c$; ceci montre que $\text{Dif}_n(E, F)$ est un sous- A -module de $\text{Homgr}_K(E, F)$ (pour la loi (2) définie en (1.1.5)). Pour que $c \in \text{Homgr}_K(E, F)$ soit un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de ses composantes homogènes; ainsi, $\text{Dif}_n(E, F)$ est un sous-module Δ -gradué de $\text{Homgr}_K(E, F)$.

On a $\text{Dif}_n(E, F) \subset \text{Dif}_{n'}(E, F)$ si $n < n'$. On note $\text{Dif}(E, F)$ le A -module Δ -gradué $\bigcup_n \text{Dif}_n(E, F)$, filtré par les $\text{Dif}_n(E, F)$.

(2.2.2) Soit E un A -module. Si $c \in \text{Dif}(A, E)$, on dit que $\Pi(c) = c(1)$ est le *terme constant* de c ; on définit une application A -linéaire de A -modules gradués $\pi : \text{Dif}(A, E) \rightarrow E$. $\pi : \text{Dif}_0(A, E) = \text{Homgr}_A(A, E) \rightarrow E$ est un isomorphisme de A -modules, dont le réciproque est $\tau : y \mapsto (x \mapsto yx)$.

PROPOSITION. - *La suite de A-modules*

$$0 \rightarrow \text{Der}(A,E) \hookrightarrow \text{Dif}_1(A,E) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{\tau} \end{array} E \rightarrow 1$$

est scindée.

On vérifie facilement que si $c \in \text{Der}(A,E)$, on a $c \in \text{Dif}_1(A,E)$ et $c(1) = 0$.
 Soit $c \in \text{Dif}_1(A,E)$, si $x, x' \in A$ sont homogènes, on a

$$\begin{aligned} \text{ad}(x)\text{ad}(x')c(1) &= xx'c(1) - \varepsilon(|c|, |x'|)x c(x') - \varepsilon(|c|+|x'|, |x|) x'c(x) \\ &\quad + \varepsilon(|c|, |x|+|x'|)c(xx') = 0 \end{aligned}$$

Si $c(1) = 0$, on a $c(xx') = c(x)x' + \varepsilon(|x|+|x'|)c(x')x$; donc $c \in \text{Dif}(A,E)$.
 Le reste est clair.

(2.2.3) On note encore $\text{Dif}_n(A)$ (resp. $\text{Dif}(A)$) le A -module $\text{Dif}_n(A,A)$ (resp. $\text{Dif}(A,A)$).

PROPOSITION. - *Soit n et n' des entiers ≥ 0 et $c \in \text{Dif}_n(A)$, $c' \in \text{Dif}_{n'}(A)$.
 On a $c, c' \in \text{Dif}_{n+n'}(A)$ et $[c, c'] \in \text{Dif}_{n+n'-1}(A)$.*

Soit $I = \{0, 1, \dots, p\}$ et $x_0, \dots, x_p \in A$; pour $H \subset I$, on pose
 $\text{ad}(x_H) = \text{ad}(x_{i_1}) \dots \text{ad}(x_{i_k})$ si $H = \{i_1, \dots, i_k\}$ avec $i_1 < \dots < i_k$ et $H' = I - H$.

On voit alors facilement que si $c, c' \in \text{Endgr}_K(A)$, on a $\text{ad}(x_0) \dots \text{ad}(x_p)(c \cdot c') =$

$$\sum_{H \subset I} \varepsilon_H \text{ad}(x_H)c \cdot \text{ad}(x_{H'})c' \quad \text{et que} \quad \text{ad}(x_0) \dots \text{ad}(x_p)[c, c'] =$$

$$\sum_{H \subset I} \varepsilon'_H [\text{ad}(x_H)c, \text{ad}(x_{H'})c'], \quad \text{où } \varepsilon_H = \pm 1 \text{ et } \varepsilon'_H = \pm 1.$$

Prenons $p = n+n'$; si $\text{Card}(H) \geq n+1$, on a $\text{ad}(x_H)c = 0$; si $\text{Card}(H) \leq n$; on a $\text{Card}(H') \geq n'+1$, donc $\text{ad}(x_{H'})c' = 0$; donc $\text{ad}(x_0) \dots \text{ad}(x_{n+n'}) (c \cdot c') = 0$.

Prenons maintenant $p = n+n'-1$; si $\text{Card}(H) \geq n+1$, $\text{ad}(x_H)c = 0$ et, si $\text{Card}(H) \leq n-1$, on a $\text{Card}(H') \geq n'+1$, donc $\text{ad}(x_{H'})c' = 0$;

d'où $\text{ad}(x_0) \dots \text{ad}(x_{n+n-1})[c, c'] = \sum_{\text{Card}(H)=n} \varepsilon'_H [\text{ad}(x_H)c \text{ ad}(x_{CH})c']$.

Mais, si $\text{Card}(H) = n$, $\text{ad}(x_H)c$ et $\text{ad}(x_H)c'$ sont des opérateurs différentiels de degré 0, donc de la forme $x \text{id}_A$ et $x' \text{id}_A$ et on a alors

$$[x \text{id}_A, x' \text{id}_A] = [x, x'] \text{id}_A = 0.$$

En particulier, si $c \in \text{Dif}_1(A)$, on a $[c, c'] \in \text{Dif}_n(A)$ pour tout $c' \in \text{Dif}_n(A)$.

Ainsi, $\text{Dif}(A)$, muni de $(u, v) \mapsto u.v$, est donc une K -algèbre Δ -graduée et filtrée ; la K -algèbre $\text{gr}(\text{Dif}(A)) =$

$\bigoplus_{n>0} \text{Dif}_n(A)/\text{Dif}_{n-1}(A) = A \oplus \text{Der}(A) \oplus (\text{Dif}_2(A)/\text{Dif}_1(A)) \oplus \dots$ est appelée

l'algèbre des symboles de A et notée $\text{Symb}(A)$. En vertu de ce qui précède, $\text{Symb}(A)$ est une K -algèbre $\mathbb{Z} \times A$ graduée, ε -commutative.

(2.2.4) Soit n un entier > 0 ; on utilise les notations de (2.1.4). Pour $x \in A$ soit $\delta_n x$ la classe de $1 \otimes x$ dans la K -algèbre (Δ -graduée et ε -commutative) $P_n(A) = A \otimes_K A/I^{n+1}$. Si $\varepsilon_n = \delta_n(1)$, on a $P_n(A) = A\varepsilon_n \oplus (I/I^{n+1})$,. Pour $x \in A$, soit $d_n(x) \in I/I^{n+1}$ la classe de $1 \otimes x - x \otimes 1$; on a $\delta_n(x) = x\varepsilon_n + d_n(x)$ et I/I^{n+1} , comme A -module à gauche, est engendré par $d_n(A)$.

PROPOSITION . - $\delta_n : A^n \rightarrow P_n(A)$ est un opérateur différentiel d'ordre < 0 et de degré 0.

Soit α l'application $x \mapsto 1 \otimes x$. Si $x_0, x_1 \in A$, $(\text{ad}(x_0)\alpha)(x) = x_0 \otimes x - 1 \otimes x_0 x = x_0 \otimes x - 1 \otimes x_0 x \in I$ et $\text{ad}(x_0)\text{ad}(x_1)\alpha(x) = -(1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)(\text{ad}(x_0)\alpha(x))$; d'où, par récurrence sur n , $\text{ad}(x_0) \dots \text{ad}(x_n)\alpha(x) \in I^{n+1}$.

(2.2.5) PROPOSITION. - Pour tout A-module Δ -gradué, $u \mapsto u \cdot \delta_n$ est un isomorphisme de A-modules de $\text{Homgr}_A(P_n(A), \tilde{E})$ sur $\text{Dif}_n(A, E)$.

Comme $u \in \text{Dif}_n(A, E)$, il est clair que $u \cdot \delta_n \in \text{Dif}_n(A, E)$. Soit $c \in \text{Dif}_n(A, E)$.

Soit $v : A \otimes_K A \rightarrow E$ l'application K-bilinéaire définie par $v(x \otimes x') = \varepsilon(|x|, |x'|) c(x')x$: on vérifie que v est nulle dans I^{n+1} et que $v(zx) = v(z)x$ pour tous $z \in A \otimes_K A$ et $x \in A$. Il existe donc $u \in \text{Homgr}_A(P_n(A), \tilde{E})$ tel que $u(\delta_n(x)) = c(x)$ pour tout $x \in A$ et u est évidemment unique.

On identifiera $\text{Homgr}_A(P_n(A), \tilde{E})$ à $\text{Dif}_n(A, E)$ au moyen de l'isomorphisme précédent.

Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de K-algèbres Δ -graduées et ε -commutatives ; pour tout $n \geq 0$, il existe une unique application A-linéaire $P_n(u) : P_n(A) \rightarrow P_n(B)$ telle que la diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & B \\
 \delta_n \downarrow & & \downarrow \delta_n \\
 P_n(A) & \xrightarrow{P_n(u)} & P_n(B)
 \end{array}$$

soit commutatif.

(2.2.6) Soit E un A-module. La suite scindée

$$0 \longrightarrow \text{Der}(A, E) \xrightleftharpoons[\rho]{\iota} \text{Dif}_1(A, E) \xrightleftharpoons[\tau]{\pi} E \longrightarrow 0$$

(cf. (2.2.2)) s'identifie à la suite scindée

$$0 \longrightarrow \text{Homgr}_A(\Omega(A), E) \xrightleftharpoons[\rho]{\iota} \text{Homgr}_A(P(A), E) \xrightleftharpoons[\tau]{\pi} E \longrightarrow 0,$$

où les applications A-linéaires ι, ρ, π et τ sont, cette fois, définies par

$$\begin{array}{ll}
 \iota(c)(\delta_1 x) = c(dx) & , \quad \rho(c)dx = c(dx), \\
 \pi(c) = c(\delta_1 1) & , \quad \tau(y)(\delta_1 x) = yx \quad (x \in A, y \in E).
 \end{array}$$

(2.3) MULTIDERIVATIONS ET OPERATEURS MULTIDIFFERENTIELS.

On désigne toujours par A une K -algèbre Δ -graduée et ε -commutative.

(2.3.1) Soit E un A -module Δ -gradué. Soit p un entier ≥ 0 et $c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A), E)$. On dit que c est une *multidérivation* (ε -alternée) si $j(z)c \in \text{Der}(A, E)$ pour tout $z \in \Lambda_K^{p-1}(A)$; lorsque c est homogène, cette condition s'écrit

$$c(x_1 \wedge \dots \wedge x_p, x'_p) = c(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) x'_p + \varepsilon(|c| + |x_1| + \dots + |x_{p-1}|, |x_p|) x_p c(x_1 \wedge \dots \wedge x'_p).$$

$(x_1, \dots, x_p, x'_p \in A \text{ homogènes}).$

Les multidérivations de A^p dans E forment un sous- A -module Δ -gradué de $\text{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A), E)$ (pour la loi définie par $(xc)(z) = xc(z)$), noté $\text{Der}(A, E)^p$.

Et on dit que $c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A), E)$ est une *multidérivation* si chaque composant homogène de c , de degré p , appartient à $\text{Der}(A, E)^p$.

L'élément $d^p \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^p(A), \Lambda_A^p(\Omega(A)))$ défini par $d^p(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ est une multidérivation de degré $0 \in \Delta$.

PROPOSITION. - $u \mapsto u \cdot d^p$ est un isomorphisme de A -modules Δ -gradués de $\text{Homgr}_A(\Lambda_A^p(\Omega(A)), \tilde{E})$ sur $\text{Der}(A, E)^p$.

Que $u \mapsto u \cdot d^p$ soit une application A -linéaire de $\text{Homgr}_A(\Lambda_A^p(\Omega(A)), \tilde{E})$ dans $\text{Der}(A, E)^p$ est évident ; et cette application est injective car $\Lambda_A^p(\Omega_A(E))$ est engendré, comme A -module, par les $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ ($x_i \in A$). Et la définition des multidérivations montre que, si $c \in \text{Der}(A, E)^p$, $c(x_1 \wedge \dots \wedge x_p)$ ne dépend que de (dx_1, \dots, dx_p) ($x_i \in A$).

On identifie $\text{Der}(A, E)^p$ à $\text{Homgr}_A(\Lambda_A^p(\Omega(A)), \tilde{E})$ au moyen de l'isomorphisme précédent et, par suite, $\bigoplus_p \text{Der}(A, E)^p$ à $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A)), \tilde{E})$.

$\text{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim}, \tilde{A})$ s'identifie à une sous-algèbre graduée de l'algèbre $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(\Omega(A)), A)$ $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée (munie de λ). Et, de même $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^{\sim}, \tilde{E})$ s'identifie à un sous- $\text{Homgr}_A(\Omega(A)^{\sim}, \tilde{A})$ -module de $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(\Omega(A)), E)$ (pour la loi λ).

(2.3.2) Les notations sont celles de (2.3.1). Soit x un entier > 0 . Soit $c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^P(A), E)$; on dit que c est un *opérateur multidifférentiel* (ϵ -alterné) d'ordre $< n$ si $j(z)c \in \text{Dif}_n(A, E)$ pour tout $z \in \Lambda_K^{P-1}(A)$. Ces opérateurs forment un sous A -module Δ -gradué de $\text{Homgr}_K(\Lambda_K^P(A), E)$ noté $\text{Dif}_n(A, E)^P$. Et on dit que $c \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K(A), E)$ est un *opérateur multidifférentiel d'ordre $\leq n$* si chacun des composants homogènes de c , de degré p , est un élément de $\text{Dif}_n(A, E)^P$.

L'élément $\delta_n^P \in \text{Homgr}_K(\Lambda_K^P(A), \Lambda_A^P(P_n(A)))$ défini par

$\delta_n^P(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \delta_n x_1 \wedge \dots \wedge \delta_n x_p$ est un opérateur multidifférentiel d'ordre $\leq n$.

$u \mapsto u \cdot \delta_p$ est un isomorphisme de A -modules Δ -gradués de $\text{Homgr}_A(\Lambda_A^P(P_n(A))^{\sim}, \tilde{E})$ sur $\text{Dif}_n(A, E)^P$. D'où un isomorphisme de $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim}, \tilde{E})$ sur $\bigoplus_P \text{Dif}_n(A, E)^P$, ce qui permet d'identifier ces A -modules.

Enfin, la K -algèbre $\mathbb{Z} \times \Delta$ -graduée alternée $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim}, \tilde{A})$ (munie de λ) s'identifie à une sous-algèbre graduée de $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(P_n(A)), A)$ (pour λ) et $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim}, \tilde{E})$ à un sous- $\text{Homgr}_A(\Lambda_A(P_n(A))^{\sim}, \tilde{A})$ -module de $\text{Homgr}_K(\Lambda_K(P_n(A)), E)$.

(2.3.3) On conserve les notations de (2.3.1). Pour $p \in \mathbb{N}$, on a la suite scindée d'applications A -linéaires de modules $\mathbb{Z} \times \Delta$ gradués, de degrés 0.

$$0 \rightarrow \text{Homgr}_A(\Lambda_A^P(\Omega_A(A))^{\sim}, \tilde{E}) \xrightarrow[\rho]{\iota} \text{Homgr}_A(\Lambda_A^P(P_n(A))^{\sim}, \tilde{E}) \xrightarrow[\tau]{\pi} \text{Homgr}_A(\Lambda_A^{P-1}(\Omega(A))^{\sim}, \tilde{E}) \rightarrow 0,$$

où ι , ρ , π et τ sont définies par

$$\begin{aligned} \iota(c) (\delta_1 x_1 \wedge \dots \wedge \delta_1 x_p) &= c(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) , \\ \rho(c) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) &= c(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) , \\ \pi(c) &= j(\varepsilon)c , \\ \tau(c) &= \text{id}_A \wedge c \end{aligned}$$

(où id_A est considéré comme un élément de $\text{Dif}_1(A) = \text{Homgr}_A(P_1(A)^\sim, \tilde{A})$; on notera que l'on a

$$(\text{id}_A \wedge c)(\delta_1 x_1 \wedge \dots \wedge \delta_1 x_p) = \sum_i (-1)^{i-1} \varepsilon(|x_i|, |x_{i+1}| + \dots + |x_p|) c(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge \dots \wedge dx_p)$$

pour $c \in \text{Homgr}_A(\Lambda_A^{p-1}(\Omega(A))^\sim, \tilde{E})$.

Pour $p = 1$, cette suite exacte coïncide avec celle de (2.2.2). D'où la suite scindée

$$0 \rightarrow \text{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^\sim, \tilde{E}) \xleftarrow[\rho]{\iota} \text{Homgr}_A(\Lambda_A(P_A(A))^\sim, \tilde{E}) \xleftarrow[\tau]{\pi} \text{Homgr}_A(\Lambda_A(\Omega(A))^\sim, \tilde{E}) \rightarrow 0 .$$

Et on a

$$\begin{aligned} \iota(c \wedge c') &= \iota(c) \wedge \iota(c') , \\ \tau(c \wedge c') &= c \wedge \tau(c') , \end{aligned}$$

si c est une multidérivation à valeurs dans A et c' une multidérivation à valeurs dans E , et

$$\begin{aligned} \pi(c \wedge c') &= \pi(c) \wedge c' + (-1)^{\text{deg}(c)} c \wedge \pi(c') , \\ \rho(c \wedge c') &= \rho(c) \wedge \rho(c') , \end{aligned}$$

si c est un opérateur multidifférentiel à valeurs dans A et c' un opérateur multidifférentiel à valeurs dans E . Ces formules résultent facilement des définitions.