

JEAN MAYER

Un nouveau type de preuve mathématique : le théorème des quatre couleurs. I - Exposé préliminaire

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4, p. 67-80

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_67_0

© Université de Lyon, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Un nouveau type de preuve mathématique :

le théorème des quatre couleurs.

I - Exposé préliminaire

par

Jean MAYER

Université Paul Valéry, MONTPELLIER.

- : -

Le problème des quatre couleurs vient d'être résolu par K. Appel et W. Haken, de l'Université d'Urbana (Illinois), un peu moins d'un siècle après les premières tentatives de démonstration. Cette preuve d'une conjecture qui a défié les efforts de nombreux mathématiciens, et non des moindres, ne constitue pas seulement un événement notable pour le monde scientifique. Elle illustre l'avènement d'un nouveau type de preuve mathématique.

En effet, c'est la première fois, à notre connaissance, qu'un théorème impliquant par sa nature un nombre infini de cas se trouve ramené à une étude combinatoire finie, mais d'une ampleur telle que la preuve a nécessité plusieurs centaines d'heures d'ordinateur et que, même a posteriori, une vie d'homme ne suffirait pas à la rendre explicite. A moins qu'une preuve plus courte et de nature entièrement différente ne soit imaginée un jour, le logicien est donc obligé d'ajouter foi à l'oracle rendu par la machine : oracle contrôlable, et d'ailleurs dûment contrôlé par des programmes variés, ce qui ne laisse pas de place au doute. Mais le fait demeure : l'édifice logique exigé pour la solution du problème est trop vaste pour tenir dans une démonstration de type usuel ou dans l'esprit d'un

seul homme. Sept cents pages de raisonnements combinatoires illustrés par dix mille diagrammes environ, trois mille pages de sorties d'ordinateur, un nombre de décisions logiques de l'ordre de dix milliards, voilà le bilan suggestif de la tâche entreprise et couronnée de succès voici trois mois à peine.

Position du problème :

Ce qui ajoute à la singularité du fait, c'est la simplicité paradoxale de l'énoncé : d'un point de vue naïf, il s'agit de colorier avec le moins de couleurs possible n'importe quelle carte des départements d'un pays (réel ou imaginaire) tracée sur le plan, de telle sorte que deux départements voisins soient toujours de couleurs différentes.

Il faut ajouter deux précisions : premièrement, chaque département est d'un seul tenant (les deux Palatinats ne formeraient pas un département) ; mais il peut comporter des enclaves (les Pyrénées-Orientales, malgré l'enclave de Llívia, forment un département connexe) ; deuxièmement, on entend par départements voisins ceux qui ont une ligne frontière en commun. Il est évident qu'un point peut être commun à un nombre illimité de départements ; mais on n'emploiera pas pour chacun une couleur différente. Dans ces conditions, toute carte peut être coloriée avec quatre couleurs au plus.

Il s'agit là d'une propriété spécifique du plan, due au fait que toute courbe fermée simple qu'on y trace détermine deux domaines séparés, l'intérieur et l'extérieur de la courbe, un point intérieur ne pouvant être joint à un point extérieur sans que la ligne de jonction coupe la courbe (théorème de Jordan). Sur le tore, par exemple, on peut tracer une carte exigeant sept couleurs.

Dualisation :

Le problème se ramène à la théorie des graphes de la façon suivante : si l'on marque par un point le chef-lieu de chaque département et si l'on joint

les chefs-lieux de chaque paire de départements voisins par une ligne ou arête, on construit un graphe appelé graphe dual de la carte. Il est facile de voir (et l'on démontre rigoureusement) que ce graphe dual est planaire topologique, c'est-à-dire que ses arêtes ne se croisent pas. Les couleurs seront affectées, cette fois, aux chefs-lieux, donc aux sommets du graphe, et deux sommets reliés par une arête devront être de couleurs différentes. La nature même du problème exclut la présence de boucles (arêtes dont les deux extrémités sont confondues) dans le graphe. La correspondance entre le coloriage des départements et celui des chefs-lieux étant évidente, le problème des quatre couleurs peut-être formulé comme suit:

Tout graphe planaire est coloriable avec quatre couleurs au plus.

On dit aussi : Tout graphe planaire est 4-coloriable.)

Triangulation :

C'est le mérite de l'avocat anglais A.B. Kempe d'avoir conçu la méthode qui devait finalement triompher du problème. En 1879, il donna une "preuve" erronée du théorème des quatre couleurs, preuve que P.J. Headwood réfuta onze ans plus tard. Mais les idées de Kempe, assistées de puissants moyens de calcul dont on ne pouvait disposer à son époque, ont permis d'atteindre le but, au prix d'un immense détour.

Rappelons que Kempe et ses successeurs raisonnaient sur des cartes de régions, c'est-à-dire sur le coloriage des faces d'un graphe. Nous abandonnerons ce point de vue pour exposer ses idées dans le langage du problème dual, en considérant le coloriage des sommets.

Observons que le cas général se ramène aisément à celui des graphes triangulés : tout graphe planaire sans boucles peut, par addition d'arêtes (diagonales), être transformé en un graphe dont toutes les faces sont des triangles. Si cette triangulation admet un coloriage des sommets avec quatre couleurs, il

en sera de même du graphe original (la suppression d'arêtes n'impose évidemment aucune contrainte nouvelle concernant les couleurs des sommets).

Appelons S le nombre des sommets du graphe triangulé, A le nombre des arêtes, F celui des faces. Une formule célèbre, dite formule d'Euler (bien que déjà connue de Descartes), relie ces nombres :

$$S - A + F = 2.$$

Appelons p_n le nombre de sommets de degré n . Nous avons :

$$S = \sum_n p_n ;$$

$$\sum_n np_n = 2E \text{ (par le dénombrement des extrémités des arêtes ;)}$$

$$2A = 3F \text{ (puisque chaque arête est sur la frontière de deux faces}$$

et que chaque face est incidente à trois arêtes, le graphe étant triangulé).

La formule d'Euler devient alors :

$$\sum_n p_n - \frac{1}{6} \sum_n np_n = 2,$$

$$\text{ou encore } \sum_n (6-n)p_n = 12. \quad (\text{A.B. Kempe})$$

Le second membre de l'égalité étant positif, le premier doit l'être aussi, ce qui suppose l'existence de sommets de degré < 6 ; appelons v_i un sommet de degré i ; l'existence de v_0 ou v_1 est impossible dans une triangulation. D'où le

Théorème : une triangulation du plan contient nécessairement un v_2 , un v_3 un v_4 ou un v_5 .

Kempe atteignit, par ce raisonnement, la notion, fondamentale dans ce problème, d'ensemble inévitable de configurations.

Les configurations :

Il faut à présent définir ce que sont les configurations réductibles dont la théorie, commencée par Kempe, généralisée par G.D. Birkhoff, a été exposée dans un langage précis par H. Heesch.

On appelle configuration un circuit du graphe avec son intérieur, celui-ci comprenant au moins un sommet. Le circuit est appelé circuit séparateur de la configuration. Par exemple, un v_4 entouré de son circuit C_4 ou un triangle de v_5 qu'entoure un circuit C_6 sont des configurations.

L'attaque du problème sera la suivante : supposons que la conjecture des quatre couleurs soit fausse ; il existe alors des graphes exigeant cinq couleurs, et parmi eux des graphes comportant un nombre minimum de sommets. Nous les nommerons graphes minimaux planaires 5-chromatiques ou, par abréviation, graphes minimaux.

Une configuration réductible est une configuration dont la présence dans une triangulation T est incompatible avec la minimalité de T . Si l'on peut démontrer que toute triangulation contient une configuration réductible, on prouvera qu'il n'existe pas de triangulations minimales, ni par conséquent de graphes planaires 5-chromatiques.

En conclusion, la preuve du théorème des quatre couleurs consiste à produire un ensemble inévitable de configurations réductibles.

Les réductions de Kempe :

Kempe a cru pouvoir démontrer que les configurations de l'ensemble inévitable qu'il avait mis en évidence étaient toutes réductibles. L'étude de son raisonnement nous fournira l'exemple d'un premier type de réduction, appelé par Heesch D-réduction.

Dans une triangulation minimale T , considérons le sous-graphe constitué par le circuit séparateur de la configuration F et l'extérieur de ce circuit. Ce sous-graphe a moins de sommets que T : il admet donc un coloriage en quatre couleurs, lequel à son tour induit un coloriage du circuit séparateur. Si tous les coloriages possibles du circuit séparateur peuvent être étendus à la confi-

guration F, T est coloriable en quatre couleurs et n'est pas minimale, contrairement à l'hypothèse.

On montre facilement que v_2 et v_3 sont réductibles : les circuits séparateurs, respectivement C_2 et C_3 , n'utilisent pas toutes les couleurs disponibles ; il reste donc une couleur disponible pour le sommet intérieur.

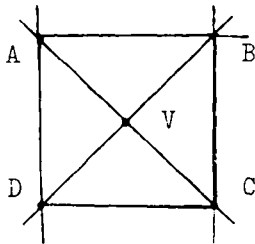


Figure 1.

Pour v_4 (Fig. 1), l'extension du coloriage est immédiate si le circuit ABCD n'utilise que 2 ou 3 couleurs : on dit que ces coloriages sont directs. Mais si $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4$ (le signe = indique ici l'affectation d'une couleur à un sommet), le coloriage de V n'est pas directement possible.

Kempe résolut ce cas à l'aide de l'argument suivant :

Considérons, dans le coloriage de $T - V$, le sous-graphe constitué des sommets de couleur 1 ou 3 et des arêtes joignant un sommet de couleur 1 à un sommet de couleur 3 : ce sous-graphe sera appelé G_{13} .

On définira de même le sous-graphe G_{24} , correspondant à l'autre paire de couleurs

Si, dans G_{13} , A n'est pas relié à C par une chaîne d'arêtes, nous échangerons les couleurs 1 et 3 dans la partie de G_{13} qui contient C. Il est clair que nous aurons à nouveau un coloriage correct de $T - V$. Le circuit ABCD, au lieu des couleurs 1234, aura les couleurs 1214 : la couleur 3 sera disponible pour colorier V. Si au contraire A et C sont reliés par une chaîne d'arêtes dans G_{13} , alors, en raison de la planarité, B ne sera pas relié à D dans le sous-graphe G_{24} , et l'on pourra échanger les couleurs 2 et 4 dans la composante de G_{24} qui contient D, par exemple : le circuit ABCD aura les couleurs 1232 et V pourra être colorié avec 4. — En résumé, la topologie du plan nous permet d'assurer que l'une des modifications suivantes du coloriage du circuit C_4 est toujours possible :

$1234 \longrightarrow 1214$; ou $1234 \longrightarrow 1232$.

1234 est appelé cologiage indirect de la configuration.

Ici, le coloriage indirect se ramène à deux coloriages directs ; mais il est également légitime d'utiliser des coloriages indirects déjà réduits pour réduire un coloriage nouveau. Si tous les coloriages possibles du circuit séparateur sont directs ou indirects, la configuration est réductible, ou plus précisément D-réductible.

Cet algorithme fondé sur l'emploi répété des échanges de couleurs, s'applique à des circuits de longueur théoriquement illimitée ; mais le nombre des possibilités combinatoires croît très rapidement, au point que la plupart des preuves de réductibilité ne peuvent être établies sans l'aide de l'ordinateur.

La "catastrophe" de Kempe :

Kempe crut pouvoir réduire par sa méthode la dernière configuration de son ensemble inévitable, à savoir v_5 (Fig. 2). Si le circuit C_5 est colorié en trois couleurs, le coloriage est direct ; supposons donc qu'il comporte qua-

tre couleurs : tous les cas sont analogues à celui de la figure :

$$C_5 = 12134.$$

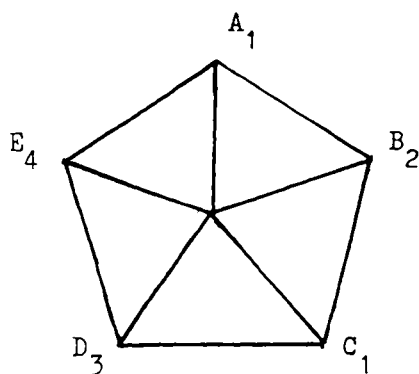


Figure 2.

Le raisonnement de Kempe est le suivant : dans G_{24} , il existe une chaîne reliant B à E (sinon, on fait $E = 2$ et $V = 4$) ; de même, dans G_{23} , il existe une chaîne BD (sinon, on fait $D = 2$ et $V = 3$). Nous pouvons donc faire A = 3 et C = 4 ; après quoi l'on dispose de la couleur

1 pour colorier V.

C'est dans ce mot et (souligné dans la dernière phrase) que réside

l'erreur qui ruine la démonstration : si l'on pratique la première modification ($A = 3$), on modifie la structure des chaînes 1-4 et 2-3, et la seconde modification n'est plus fondée logiquement. Nous pouvons bien écrire :

$$12134 \longrightarrow 12132 \longrightarrow \text{et : } 12134 \longrightarrow 12124 \text{ ou } 12434,$$

mais non : $12134 \longrightarrow 32434$.

Cette faille logique, appelée par T. Saaty "the Kempe catastrophe", a été décelée par Heawood onze ans après la publication de l'article de Kempe. Il aura fallu 86 ans encore pour la réparer.

Pourtant les résultats obtenus par Kempe ne sont pas vains. Heawood a pu, en utilisant l'argument des chaînes, démontrer le théorème des cinq couleurs (1890). En effet, si l'on s'octroie une cinquième couleur, la réduction de v_5 devient possible : le seul coloriage indirect est celui où les cinq couleurs sont présentes sur C_5 . L'argument de Kempe produit l'alternative :

$$12345 \longrightarrow 12145 \text{ ou } 14345,$$

et V est colorié avec 3 ou 2 suivant le cas.

D'autre part les autres réductions de Kempe permettent d'affirmer : Un graphe minimal planaire 5-chromatique a tous ses sommets de degré ≥ 5 . D'après l'égalité tirée de la formule d'Euler, il comprend au moins $12 v_5$. S'il en comprend davantage, il comporte aussi des sommets de degré ≥ 7 .

La réduction de Birkhoff, ou C-réduction :

En 1913, G.D. Birkhoff généralisa le concept de réduction de manière décisive. Le procédé de Kempe, qui fut dénommé par la suite D-réduction, peut se résumer ainsi : étant donné un graphe minimal G contenant la configuration F entourée d'un circuit séparateur C :

1°) on supprime toutes les arêtes et tous les sommets intérieurs à C

2°) on donne à C toutes les combinaisons de couleurs possibles ;

3°) on rétablit l'intérieur de C et l'on tente, pour chaque cas de coloriage du circuit, de compléter le coloriage des sommets intérieurs ; cela peut se faire sans modification du coloriage de C (coloriages directs) ou après modifications déduites du coloriage initial par l'argument des chaînes de Kempe (coloriage indirects). La configuration est réductible si l'ensemble des coloriages directs et indirects est égal à l'ensemble des coloriages possibles de C.

Le procédé plus puissant imaginé par Birkhoff commence de même par la suppression des sommets et arêtes intérieurs à C. Mais ensuite on identifie certains sommets (non consécutifs) de C, on réunit certaines paires de sommets par des diagonales intérieures, en respectant la planarité ; parfois même on insère des sommets à l'intérieur de C, en nombre inférieur toutefois à celui des sommets intérieurs de F. Ces opérations définissent un réducteur de F, c'est-à-dire une modification locale de G remplissant les conditions suivantes :

1°) Le graphe ainsi déduit de G est également planaire et a moins de sommets que G ;

2°) il ne comporte pas de boucles ;

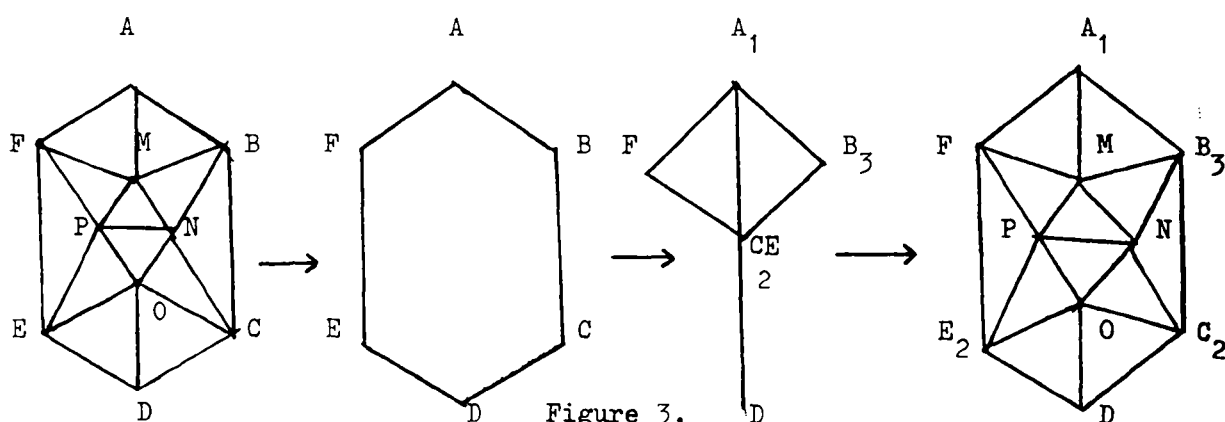
3°) il ne diffère de G que par les modifications pratiquées à l'intérieur de C et les identifications de sommets de C.

Le coloriage en quatre couleurs du graphe ainsi défini est possible, comme dans le cas de la D-réduction, mais cette fois les coloriages de C obéissent à des contraintes : les sommets identifiés par le réducteur devront être de même couleur ; les paires de sommets réunis par une diagonale devront porter des couleurs différentes. Reprenons par exemple la réduction de v_4 (Fig. 1, p.4) : le réducteur identifiera A et C ; d'où $A = 1, C = 1$. Les coloriages possibles de C_4 seront, aux permutations de couleurs près : 1212 et 1213. Ces coloriages sont directs : la réduction est achevée.

Prenons un second exemple, le "diamant" de Birkhoff (Fig. 3, page suivante), constitué de quatre v_5 formant deux triangles. Le circuit séparateur est un C_6 , où nous identifierons C et E, tandis que nous joindrons A et C par une diagonale. Nous aurons donc $A = 1$, C et E d'une autre couleur, soit 2, et B d'une troisième couleur, soit 3. Les différents coloriage possibles de C_6 seront :

132123 ; 132124 ; 132323 ; 132324 ; 132423 ; 132424.

On vérifie sans peine que tous sont directs, sauf 132323, qui se réduit par l'argument des chaînes appliqué aux paires de couleurs 1-2, 3-4 : si D n'est pas relié à F dans G_{34} , $D = 4$ ou $F = 4$ nous ramène à l'un des cas précédents.



Si D est relié à F par une chaîne d'arêtes 3-4, nous pouvons faire $E = 1$, ce qui donne un coloriage direct ($M = 4$, $N = 1$, $O = 4$, $P = 2$).

Un premier avantage de la C-réduction se manifeste dans ces exemples elle écourte beaucoup les calculs. L'étude de la réduction donnée dans la figure 1 comporte 6 coloriage initiaux, dont 5 directs et un indirect ; la réduction de ce dernier met en jeu un septième coloriage (direct). La D-réduction correspondante porterait sur les 31 coloriage (non équivalents) dont est susceptible un circuit C_6 ; 16 seulement d'entre eux sont directs ; l'argument des chaînes doit être utilisé pour les 15 autres, et répété jusqu'à cinq fois pour l'un d'entre eux

Cet avantage n'est précieux que pour le calculateur manuel. L'entrée en scène des ordinateurs - dont H. Heesch et K. Dürre furent les promoteurs en 1965 - le réduisit à néant, mais mit en lumière un second avantage de la C-réduction : il existe des configurations D-irréductibles et C-réductibles¹. Le fait s'explique ainsi : dans la D-réduction, tout coloriage du circuit séparateur est direct ou indirect ; dans la C-réduction, il peut exister des coloriages impossibles à étendre à l'intérieur de la configuration, mais ils sont éliminés par l'emploi d'un réducteur approprié.

En revanche, l'utilisation d'un réducteur entraîne une discussion, du fait de la condition n°2 : le graphe réduit ne doit pas comporter de boucles. Cette condition, automatiquement remplie pour des configurations de petit diamètre, nécessite un examen soigneux pour des configurations plus étendues. Ce point, que nous ne pouvons exposer en détail, n'a pas été négligé par les auteurs de la démonstration.

1 - En 1948, sans l'aide de l'ordinateur, A. Bernhart en avait déduit une et avait remarqué l'existence de coloriages irréductibles : il s'agissait de la configuration formée d'un v_6 ayant pour voisins consécutifs v_5, v_6, v_5 .

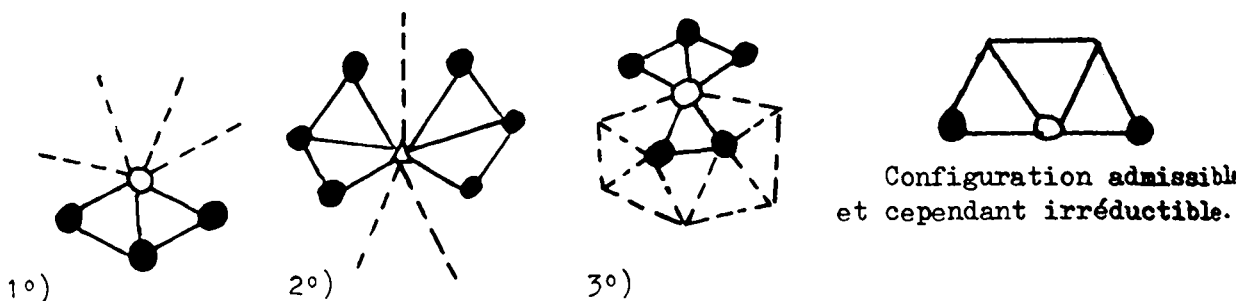
Obstacles à la réduction :

A mesure que les réductions s'affirmaient comme le meilleur outil pour résoudre le problème, certains éléments d'une théorie se dégagèrent : selon une observation issue de l'expérience, mais qui n'a pas encore été prouvée, certains obstacles s'opposent à la réduction d'une configuration (minimale). Si une configuration présente un de ces obstacles, ou bien elle résiste à la réduction, ou bien elle contient une sous-configuration réductible dont l'obstacle ne fait pas partie : telle est la signification du mot minimale dans la phrase précédente.

Appelons branches les arêtes qui relient un sommet intérieur de la configuration à un sommet du circuit séparateur. Les obstacles consistent en :

- 1°) un sommet intérieur à quatre branches ("four-legger vertex") ;
- 2°) un sommet d'articulation à trois branches ("three-legger cut-vertex") : un sommet d'articulation est tel que sa suppression détruit la connexité de l'intérieur de la configuration ;
- 3°) une paire de v_5 suspendue ("hanging pair of 5-vertices") : on entend par ce terme une paire de v_5 reliés entre eux et à un même sommet intérieur de la configuration, et dont toutes les autres liaisons sont des branches.

La figure 4 donne des exemples de ces différents obstacles.



(Code de Heesch symbolisant les degrés des sommets :

● = v_5 ; . = v_6 ; ○ = v_7 ; □ = v_8 ; △ = v_9 ; ◇ = v_{10} ; ⊙ = v_n , $n > 10$.

Figure 4. - Obstacles à la réduction.

Une configuration exempte des obstacles 1 et 2 est dite géographiquement bonne ("geographically good" ou "GG-configuration"); une configuration qui ne présente aucun des trois obstacles est dite admissible ("permissible configuration"). Mais toutes les configurations admissibles ne sont pas nécessairement réductibles. On connaît quelques contre-exemples, peu nombreux, car la preuve de la C-irréductibilité est très difficile à faire dès que la longueur du circuit séparateur dépasse 10 (nombre de sommets).

Construction d'un ensemble inévitable de configurations réductibles :

Considérons à nouveau l'égalité de Kempe :

$$\sum_n (6 - n)p_n = 12 \quad (n \geq 5).$$

Chaque sommet v_n apporte au premier membre de l'égalité une contribution égale à $6-n$. Définissons le produit de cette contribution par un facteur entier positif k (choisi pour la commodité des calculs) comme la charge initiale du sommet v_n . La somme totale des charges initiales, égale à $12k$, est positive. La charge d'un v_5 , égale à k , est positive, celle d'un v_6 est nulle, celle d'un sommet majeur (de degré ≥ 7) est négative.

On définit une méthode de déchargement selon laquelle, sans changer la somme totale des charges, on fait passer les charges positives des v_5 sur les sommets chargés négativement. Le but de cette redistribution des charges est d'obtenir l'alternative suivante :

1°) Aucune des charges modifiées portées par les sommets n'est positive, ce qui contredit l'égalité de Kempe : le graphe est totalement déchargé, ce qui ne peut être le cas d'un graphe planaire.

2°) Le graphe contient une configuration réductible et ne peut être minimal. Le déchargement doit être local : sommet déchargé et sommet récepteur doivent être suffisamment proches pour ne pas multiplier les cas de discussion et ne pas exiger la réduction de configuration trop vastes. Une faible concentration

des v_5 permet d'espérer un déchargement complet du graphe ; une forte densité du graphe en sommets mineurs (v_5 et v_6) augmente les chances de réduction.

Mais la nature du problème est telle que toute méthode simple de déchargement s'est insuffisante dans le cas général : la solution exige une étude combinatoire d'autant plus complexe que les données logiques sont plus simples et peu susceptibles d'engendrer des théorèmes généraux. Pour les mêmes raisons, l'ensemble inévitable de configuration réductibles ne peut se réduire à un petit nombre d'éléments. Enfin, la plupart des réductions auxquelles on aboutit sont impraticables à la main, vu le grand nombre de coloriations mis en jeu : on voit donc en quoi la démonstration du théorème, quoiqu'accessible à notre logique, dépasse par son ampleur les capacités de l'intelligence individuelle.