PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JEAN-LUC PAILLET

Une propriété de seuil pour les intersections dans un ensemble fini

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4
, p. 63-64
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_63_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t. 16-3.4

UNE PROPRIETE DE SEUIL POUR LES INTERSECTIONS DANS UN ENSEMBLE FINI

par

Jean-Luc PAILLET

Université de Provence - MARSEILLE

Nous donnons ici un court résumé d'un article qui va paraître dans le Journal of Combinatorial Theory, Séries B, sous le titre "A threshold property for intersections in a finite set".

Soit F une famille de sous-ensembles d'un ensemble fini E et soit n un entier strictement inférieur au cardinal de F. Sous quelle condition la connaissance des cardinaux des intersections d'ordre m dans F, pour tout $m \leq n$, détermine-t-elle univoquement le cardinal des intersections quelconques dans F ? et quelle est la condition minimale ? Nous donnons une réponse complète à ce problème.

<u>Définition</u>. Soit $F = \{A_1,\dots,A_p\}$ et $F' = \{A'_1,\dots,A'_p\}$ deux familles de sous-ensembles d'un ensemble fini E, et soit n un entier tel que $n < p$; nous disons que F et F' satisfont la "condition d'intersection de rang n" (en abrégé : c.i. de rang n) ssi pour tout $m \leq n$ et tout m-emble $\{i_1,\dots,i_m\}$ contenu dans $\{1,\dots,p\}$, nous avons

$$\mathrm{Card}(A_{i_1} \cap\dots\cap A_{i_m}) = \mathrm{Card}(A'_{i_1} \cap\dots\cap A'_{i_m}) \quad .$$

<u>Théorème</u>. Soit E un ensemble fini et n un entier tel que $2^{n-1} \leq \mathrm{Card}(E) < 2^n$; alors, pour p quelconque $\geq n$ et deux familles quelconques $F = \{A_1, \ldots, A_p\}$ et $F' = \{A'_1, \ldots, A'_p\}$ de sous-ensembles de E, Si F et F' satisfont la c.i. de rang n, alors elles satisfont aussi la c.i. de rang p ; mais la c.i. de rang $(n-1)$ n'est pas suffisante en général pour entraîner la c.i. de rang p.

<u>Corollaire</u>. Soit E un ensemble fini et soit n un entier tel que $2^{n-1} \leq \mathrm{Card}(E) < 2^n$. Soit $p \geq n$ et deux familles $F = \{A_1, \ldots, A_p\}$ et $F' = \{A'_1, \ldots, A'_p\}$ de sous-ensembles de E ; si ces familles satisfont la c.i. de rang n, alors il existe une permutation de E qui applique A_i sur A'_i pour chaque $i = 1, \ldots, p$; autrement il n'existe pas de telle permutation.