

JEAN-LUC PAILLET

**Une propriété de seuil pour les intersections dans un ensemble fini**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1979, tome 16, fascicule 3-4  
, p. 63-64

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1979\\_\\_16\\_3-4\\_63\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_63_0)

© Université de Lyon, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNE PROPRIÉTÉ DE SEUIL POUR LES INTERSECTIONS  
DANS UN ENSEMBLE FINI

par

Jean-Luc PAILLET

Université de Provence - MARSEILLE

Nous donnons ici un court résumé d'un article qui va paraître dans le Journal of Combinatorial Theory, Séries B, sous le titre "A threshold property for intersections in a finite set".

Soit  $F$  une famille de sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$  et soit  $n$  un entier strictement inférieur au cardinal de  $F$ . Sous quelle condition la connaissance des cardinaux des intersections d'ordre  $m$  dans  $F$ , pour tout  $m \leq n$ , détermine-t-elle univoquement le cardinal des intersections quelconques dans  $F$  ? et quelle est la condition minimale ? Nous donnons une réponse complète à ce problème.

Définition. Soit  $F = \{A_1, \dots, A_p\}$  et  $F' = \{A'_1, \dots, A'_p\}$  deux familles de sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$ , et soit  $n$  un entier tel que  $n < p$  ; nous disons que  $F$  et  $F'$  satisfont la "condition d'intersection de rang  $n$ " (en abrégé : c.i. de rang  $n$ ) ssi pour tout  $m \leq n$  et tout  $m$ -emble  $\{i_1, \dots, i_m\}$  contenu dans  $\{1, \dots, p\}$ , nous avons

$$\text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \text{Card}(A'_{i_1} \cap \dots \cap A'_{i_m}) .$$

Théorème. Soit  $E$  un ensemble fini et  $n$  un entier tel que  $2^{n-1} \leq \text{Card}(E) < 2^n$  ; alors, pour  $p$  quelconque  $\geq n$  et deux familles quelconques  $F = \{A_1, \dots, A_p\}$  et  $F' = \{A'_1, \dots, A'_p\}$  de sous-ensembles de  $E$ , Si  $F$  et  $F'$  satisfont la c.i. de rang  $n$ , alors elles satisfont aussi la c.i. de rang  $p$  ; mais la c.i. de rang  $(n-1)$  n'est pas suffisante en général pour entraîner la c.i. de rang  $p$ .

Corollaire. Soit  $E$  un ensemble fini et soit  $n$  un entier tel que  $2^{n-1} \leq \text{Card}(E) < 2^n$ . Soit  $p \geq n$  et deux familles  $F = \{A_1, \dots, A_p\}$  et  $F' = \{A'_1, \dots, A'_p\}$  de sous-ensembles de  $E$  ; si ces familles satisfont la c.i. de rang  $n$ , alors il existe une permutation de  $E$  qui applique  $A_i$  sur  $A'_i$  pour chaque  $i = 1, \dots, p$  ; autrement il n'existe pas de telle permutation.