PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

CHRISTIANE RAMBAUD

Complétude en théorie sur graphes orientés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4
, p. 33-37

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_33_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t.16-3.4

COMPLETUDE EN THEORIE SUR GRAPHES ORIENTES

par

Christiane RAMBAUD

Université d'Aix-Marseille - U.E.R. Luminy

Faisant suite à l'introduction des "théories sur graphes", par Georges BLANC, nous donnons ici un théorème de complétude pour les théories sur graphes orientés. On pourra trouver une démonstration plus détaillée dans "théorèmes de complétudes dans les théories sur graphes orientés" - M.R. DONNADIEU et Ch. RAMBAUD - Compte-Rendu Ac. Sc. de Paris (Séance du 29 Novembre 1976).

Les résultats de syntaxe, les définitions de réalisation et de modèle pour les théories sur graphes, se trouvent dans "Théories sur graphes orientés" - C. RAMBAUD, Thèse 3ième cycle Marseille-Luminy et dans "Langages sur graphes et extension par définition en théories générales sur catégories", Thèse de Doctorat - Marseille-Luminy - G. BLANC.

I - THEORIE SUR GRAPHE G CONSISTANTE

Une théorie sur graphe est dite G-inconsistante si toute les G formules sont des théorèmes, elle est dite G-consistante sinon.

Les notions classiques de consistance et d'inconsistance ont pour équivalent dans la théorie sur graphe, la notion de $\emptyset$ consistance et de $\emptyset$ inconsistance. A la différence de la logique classique, nous avons ici une notion d'inconsistance locale pour une théorie sur graphe. Citons par exemple :

La théorie des topos non dégénérés est G inconsistante, pour tout graphe G contenant $1 \xrightarrow{x} 0$.

L'importance du graphe G sur lequel on considère une formule, apparaît nettement ici, puisque dans la situation $H \subset G$, si on a toujours :
$T \vdash_H \Phi \Rightarrow T \vdash_G \Phi$ il est possible d'avoir :

$$\text{non} \quad T \vdash_H \Phi \quad \text{et} \quad T \vdash_G \Phi.$$

La G consistance d'une théorie sur graphe T étant caractérisée par les équivalences suivantes :

(i) T est G-consistante

(ii) il existe une suite libre de variables de G : (s, S) telle que

$$H = G - (s, S) \quad \text{et non} \quad T \vdash_H \neg \exists_{(S,\, s)} v$$

v étant un symbole relationnel d'arité vide représentant le vrai universel.

(iii) pour toute suite libre de variables de G : (s, S) on a :

$$\text{non} \quad T \vdash_H \neg \exists_{(S,\, s)} v \quad \text{où} \quad H = G - (s, S)$$

(iv) non $T \vdash \neg v$

II - THEOREME DES CONSTANTES

Si nous considérons toujours la théorie T des topos non dégénérés, et si on enrichit le langage de T par la suite fonctionnelle $\langle \emptyset, c \rangle$ d'arité vide et de graphe $1 \xrightarrow[c]{} 0$, la théorie T' associée à ce nouveau langage et ayant les mêmes axiomes non logiques que T, devient une théorie $\emptyset$ inconsistante, c'est-à-dire inconsistante.

Sur cet exemple, il apparait donc que la situation est différente de celle de la logique classique.

Soit donc T une théorie sur graphe de langage $\mathcal{L}$ et T' la théorie ayant les mêms axiomes non logiques que T et de langage

$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \langle e_1, \ldots, e_p, \ E_1, \ldots, E_q \rangle$ cette dernière suite fonctionnelle étant d'arité vide (c'est-à-dire, jouant le rôle des constantes)

Le théorème des constantes s'énonce alors :

si $T' \vdash_{G'} \Phi'$ alors $T \vdash_{\Sigma \hat{G}'} \Sigma \Phi'$

- Σ étant l'opération classique qui transforme les constantes en variables
- $\Sigma \Phi'$ est une formule du langage $\mathcal{L}$ sur le $\mathcal{L}$ graphe $\Sigma \hat{G}'$ obtenue depuis Φ' en remplaçant les constantes par des variables, et où $\Sigma \hat{G}'$ est obtenue depuis G' en le "grossissant" d'abord en $\hat{G}'$ par le type de la suite $\langle e_1, \ldots, e_p, \ E_1, \ldots, E_q \rangle$ et en opérant la transformation Σ
- $\Sigma \hat{G}'$ est un $\mathcal{L}$-graphe.

Ce résultat simple nécessite pour l'établir un travail laborieux, car il demande de revenir aux définitions de construction des $\mathcal{L}$-graphes et des $\mathcal{L}$ termes sur les $\mathcal{L}$-graphes.

Comme nous l'avions déjà remarqué sur un exemple, T' n'est pas une extension conservative de T et si (Φ, G) est une formule de langage $\mathcal{L}$ telle que $T' \vdash_G \Phi$, le théorème des constantes entraîne $T \vdash_{\Sigma \hat{G}} \Phi$, et pour conclure $T \vdash_G \Phi$, il nous faudra une condition supplémentaire par exemple : $T \vdash_G \exists_G \Sigma \hat{G}$.

Ceci intervient dans la démonstration du théorème de complétude.

III - THEOREME DE COMPLETUDE

<u>T est G consistante ssi T a un G modèle</u>

Ce théorème est une conséquence de :

<u>T est consistante ssi T a un modèle</u>

par les deux résultats :

a) T est G consistante ssi $T \cup \{\exists G\, v\}$ est consistante

b) T a un modèle G ssi $T \cup \{\exists G\, v\}$ a un modèle.

La preuve que nous donnons ici est proche de la preuve classique dite "preuve de Henkin". Elle consiste à construire une "théorie de Henkin" complète extension de T, et à montrer que toute théorie de Henkin complète a un modèle, d'où on déduit par restriction un modèle de T.

Mais vu le théorème des constantes dont on dispose, on est obligé de modifier la définition de théorie de Henkin. C'est ainsi qu'une théorie sur graphe T sera dite de Henkin : si pour toute formule close <u>THEOREME DE T</u> de la forme $\exists \times U_1 \to U_2\ A$ (r. $\exists \times A$), il existe une suite fonctionnelle $< \emptyset, e >$ (r. $< E, \emptyset >$) d'arité vide et de graphe $U_1 \xrightarrow{\times} U_2$ (r. $\times$) telle que $T \vdash_{\emptyset} A_{\times} [e]$ (r $T \vdash_{\emptyset} A_{\times} [E]$)

. La première étape de la démonstration consiste à construire une extension T_h (de langage $\mathcal{L}_n$) de T (de langage $\mathcal{L}$) telle que T_h soit une <u>extension conservative</u> de T et une <u>théorie de Henkin</u>.

On n'introduit les constantes spéciales de niveau n que pour les formules closes théorèmes de T^{n-1}, et T^n est la théorie T^{n-1} augmentée des axiomes spéciaux pour les constantes de niveau n

$$T_h = \bigcup_n T^n \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_n = \bigcup_n \mathcal{L}^n$$

. Mais avec cette nouvelle définition, la complétée (Th. de Lindembaum) d'une théorie de Henkin n'est plus une théorie de Henkin. Ceci n'étant pas dû aux théories sur graphe ; il en serait de même en logique classique si on définissait les théories de Henkin comme nous l'avons fait.

. Dans une deuxième étape, on construit une théorie de Henkin complète en itérant le procédé :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] & \hat{T}_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[dl] \\
 & \hat{T}_2 \arrow[r, dotted] & {} \arrow[dl, dotted] \\
 & \hat{T}_n \arrow[r] & S_n
\end{tikzcd}$$

$\hat{T}_i$ étant les théories S_{i-1} complétées, et S_i étant une théorie de Henkin obtenue à partir de $\hat{T}_j$ (1ère étape)

$$T = \bigcup \hat{T}_n$$ est la théorie cherchée.