

CLAUDE FRASNAY

Sur quelques classes universelles de relations m -aires

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4
, p. 21-32

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_21_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_21_0)

© Université de Lyon, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES CLASSES UNIVERSELLES DE RELATIONS m -AIRES

par

Claude FRASNAY

UNIVERSITE PAUL SABATIER, TOULOUSE

1 - RELATION, EXPANSION PERMUTEE, RECOLLEMENT

1.1. Dans le cadre d'une "théorie des classes" comportant un univers V (classe de tous les ensembles), on adopte pour la classe ω des nombres naturels la conception "ordinaire" selon laquelle : $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, etc... Pour tout naturel $m = \{0,1,2,\dots,m-1\}$ et toute classe X , X^m est la classe des applications $x : m \rightarrow X$ (ainsi $X^0 = 1$).

1.1.1. Désignons par R la classe des triplets (m,E,α) tels que $m \in \omega$ et $\alpha \subseteq E^m$. Alors R est une classe pure ($R \subseteq V$, $R \notin V$) dont chaque élément $r = (m, E, \alpha)$ est identifié avec la relation d'arité m , de support ensembliste E , de cardinalité $|r| = \text{card}(E)$, satisfaite par les multiuplets $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in \alpha$.

1.1.2. Etant donné $m \in \omega$, $n \in \omega$, $E \in V$, nous noterons R_m la classe des relations m -aires, $R_{m,n}$ la classe des relations m -aires de cardinalité $\leq n$, et $R_m(E)$ l'ensemble des relations m -aires de support E .

1.1.3. Lorsque deux relations $r = (m,E,\alpha)$ et $r' = (m,E,\alpha')$ (de même arité et de même support) vérifient $\alpha \subseteq \alpha'$, nous dirons que r est une réduction de r' , et que r' est une expansion de r .

1.2. Un cas remarquable d'expansion est celui des expansions permutées qui fait intervenir, pour tout $m \in \omega$, le groupe symétrique S_m (groupe des permutations de $m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$) et l'ensemble Σ_m des sous-groupes de S_m .

1.2.1. Pour une relation $r = (m, E, \alpha)$ et un groupe $G \in \Sigma_m$, la G-expansion $r' = r \times G = (m, E, \alpha')$ est définie par :

$$\alpha' = \{x \circ \sigma : x \in \alpha \text{ et } \sigma \in G\}.$$

La classe R_m est ainsi munie d'une opération externe $(r, G) \rightarrow r \times G$ dont le domaine d'opérateurs (à droite) est Σ_m . (En ce qui concerne le nombre de ces opérateurs, par exemple pour les 5 premières valeurs de $m : 0 \leq m \leq 4$, les valeurs correspondantes de $\text{card}(\Sigma_m)$ sont : 1, 1, 2, 6, 30). En particulier, si e_m est l'élément neutre de S_m , alors le groupe $I_m = \{e_m\}$ est opérateur neutre : $r \times I_m = r$ pour tout $r \in R_m$.

1.2.2. Si $r \times G = r$, on dit que la relation r est G-invariante, ou que G est un groupe d'invariance de r . Toute relation $r = (m, E, \alpha)$ admet un groupe maximum d'invariance, à savoir :

$$\text{Inv}(r) = \{\sigma \in S_m : (\forall x) (x \in \alpha \Rightarrow x \circ \sigma \in \alpha)\}.$$

Les groupes d'invariance de r sont tous les sous-groupes de $\text{Inv}(r)$.

Les relations m-aires symétriques sont les relations r telles que :

$$\text{Inv}(r) = S_m.$$

1.2.3. Etant donné $G \in \Sigma_m$, toute sous-classe A de R_m admet (mod. G) une transformée : $\hat{G}(A) = \{r \times G : r \in A\}$. En particulier, $\hat{G}(R_m)$ est la classe des relations m-aires G -invariantes.

Une classe $A \subseteq R_m$ est dite inclusive lorsque $\hat{G}(A) \subseteq A$ pour tout $G \in \Sigma_m$ (ce qui équivaut à dire que, pour tout $G \in \Sigma_m : \hat{G}(A) = A \cap \hat{G}(R_m)$). Par exemple, pour tout $n \in \omega$, la classe $R_{m,n}$ est inclusive.

1.3. A toute relation $r = (m, E, \alpha)$ et à tout ensemble $F \subseteq E$ correspond la relation $r|F = (m, F, \alpha \cap F^m)$: on dit que $r|F$ est une restriction de r , et que r est une extension de $r|F$. Pour tout $G \in \Sigma_m$, on vérifie aisément que : $(r \times G)|F = (r|F) \times G$.

1.3.1. Pour toute relation m-aire r et tout $n \in \omega$, nous noterons $\rho(r)$ l'ensemble des restrictions de r , et nous poserons : $\rho_n(r) = \rho(r) \cap R_{m,n}$ (ensemble des restrictions u de r ayant une cardinalité $|u| \leq n$).

1.3.2. Pour tout $n \in \omega$ et toute classe $A \subseteq R_m$, notons $\varphi_n(A)$ la classe des relations $u \in A$ qui admettent une extension $r \in A$ de cardinalité $|r| \geq n$. Pour le sélecteur $\varphi_n, A - \varphi_n(A)$ est la classe des relations $u \in A$ qui sont parasites au niveau n . En ce sens, nous dirons que A est propre si $\varphi_n(A) = A$ pour tout $n \in \omega$, et que A est assez propre lorsque les prélèvements (décroissants) $\varphi_n(A)$ stationnent à partir d'un certain rang.

1.3.3. Un sous-ensemble A de R_m est dit cohérent s'il existe une relation $r \in R_m$ telle que $A \subseteq \rho(r)$. Lorsque $A = \{u, v\}$, on exprime encore cette condition en disant que les deux relations m-aires u, v sont compatibles.

Plus précisément, introduisons l'ensemble $\mathcal{F}$ des supports des relations $u \in A$ ($\mathcal{F}$ est le soutènement de A), et posons : $E = \bigcup \mathcal{F}$. Si $A \neq \emptyset$ et s'il existe une et une seule relation $r \in R_m(E)$ telle que $A \subseteq \rho(r)$, nous dirons que A est recollable et nous noterons $r = \epsilon(A)$ ce recollement de A . Cette condition va mettre en jeu un cardinal $k(\mathcal{F}) \leq \omega$ (capacité de recouvrement de $\mathcal{F}$) défini comme borne supérieure de la classe des naturels n tels que :

$$(\forall X) \quad (\exists Y) \quad (\text{card}(X) \leq n \Rightarrow X \subseteq Y).$$

$$X \subseteq E \quad Y \in \mathcal{F}$$

On vérifie facilement les règles suivantes :

Proposition - Pour que deux relations m-aires u, v de supports respectifs X, Y soient compatibles, il faut et il suffit que : $u|X \cap Y = v|X \cap Y$.

Proposition - Pour tout sous-ensemble non vide A de R_m , de soutènement $\mathfrak{A}$:

- a) A est cohérent $\Leftrightarrow$ les relations $u \in A$ sont deux à deux compatibles.
- b) A est recollable $\Leftrightarrow A$ est cohérent et $k(\mathfrak{A}) \geq m$.

Compte tenu de cette dernière équivalence, lorsque A est un sous-ensemble cohérent non vide de R_m et que n est un naturel tel que $k(\mathfrak{A}) \geq n \geq m$, nous dirons (pour abréger) que A est n-recollable.

2 - ENCHAINABILITE ET MONOMORPHIE

2.1. Pour toute relation $r = (m, E, \alpha)$ et toute application $f : E \rightarrow E'$, l'image de r par f est la relation $\tilde{f}(r) = (m, F, \beta)$ définie par $F = \text{Im}(f) = f \langle E \rangle$ (image de E par f) et $\beta = \{f \circ x : x \in \alpha\}$.
Pour tout $G \in \Sigma_m$, on vérifie aisément : $\tilde{f}(r \times G) = \tilde{f}(r) \times G$.

2.1.1. Etant donné deux relations m-aires r, r' , de supports respectifs E, E' , on désigne par $\text{Hom}(r, r')$ l'ensemble des applications $f : E \rightarrow E'$ pour lesquelles $\tilde{f}(r)$ est une réduction de $r'|_{\text{Im}(f)}$ (les applications $f \in \text{Hom}(r, r')$ sont les homomorphismes de r dans r'). On désigne par $\text{Iso}(r, r')$ l'ensemble des injections $f : E \rightarrow E'$ pour lesquelles $\tilde{f}(r) = r'|_{\text{Im}(f)}$ (les applications $f \in \text{Iso}(r, r')$ sont les isomorphismes de r dans r'). Plus particulièrement, on appelle isomorphisme de r sur r' toute bijection $f : E \rightarrow E'$ telle que $\tilde{f}(r) = r'$.

S'il existe un tel isomorphisme de r sur r' , on dit que r et r' sont isomorphes, et on le note : $r \sim r'$. On vérifie aisément que (pour tout $G \in \Sigma_m$) :

$$r \sim r' \Rightarrow r \times G \sim r' \times G \text{ et } \text{Inv}(r) = \text{Inv}(r').$$

2.1.2. Soit T la classe des chaînes (ou relations d'ordre total). Pour tout naturel $m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, notons $\vec{m}$ la chaîne usuelle de support m . Pour toute chaîne t de support E et tout $m \in \omega$, introduisons la relation m -aire $t_m = (m, E, \text{Iso}(\vec{m}, t))$. Alors $t_0 = (0, E, 1)$, $t_1 = (1, E, E^1)$ et, pour tout $m \geq 2$, les multiplats $x \in E^m$ satisfaisant t_m sont caractérisés par la condition :

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} \pmod{t}$$

Nous dirons que t_m est le rangement m-aire associé à la chaîne t et, pour tout groupe $G \in \Sigma_m$, nous envisagerons également la relation $t_m \times G$ (dite G-rangement associé à t). Nous poserons : $T_m = \{t_m : t \in T\}$ (cette classe des rangements m -aires est propre et non inclusive). Pour tout groupe $G \in \Sigma_m$, le G -rangement associé à la chaîne $\vec{m}$ est la relation (m, m, G) . Par ailleurs, pour toute chaîne t de cardinalité $\geq m$: $\text{Inv}(t_m \times G) = G$.

2.1.3. Etant donné une relation r de support E , on désigne par $\text{Aut}(r)$ le sous-groupe de S_E constitué par les permutations f de E telles que $\tilde{f}(r) = r$ (les permutations $f \in \text{Aut}(r)$ sont les automorphismes de r). Plus généralement, si $f \in \text{Iso}(u, r)$ pour une restriction u de r , on dit que l'injection f est un automorphisme local de r . Nous noterons $\text{Aut. loc}(r)$ l'ensemble des automorphismes locaux de la relation r .

Si deux relations r, r' de même support (mais pas nécessairement de même arité) vérifient : $\text{Aut. loc}(r) \subseteq \text{Aut. loc}(r')$, on dit que r' est libre-interprétable par r . En particulier, pour tout $r \in R_m$ et tout $G \in \Sigma_m$, $r \times G$ est libre-interprétable par r .

Lorsqu'une relation r est libre-interprétable par une chaîne, on dit que r est enchaînable. Nous noterons C_m la classe des relations m-aires enchaînables. En particulier, pour toute chaîne t , le rangement m-aire associé t_m et (plus généralement) tous les G-rangements $t_m \times G$ sont libre-interprétables par t : il en résulte que la classe T_m et toutes ses transformées $\hat{G}(T_m)$ sont des sous-classes de C_m .

Par ailleurs, on vérifierait aisément que C_m est propre et inclusive.

2.1.4. Pour toute relation m-aire r , soit $\tau(r)$ l'ensemble des relations m-aires r' de support $|r|$ telles que $r \sim r'$: on dit que $\tau(r)$ est le type d'isomorphie de r . L'intérêt de la fonction τ vient de ce que, pour tout couple (r, r') de relations : $r \sim r' \Leftrightarrow \tau(r) = \tau(r')$.

Le profil d'une relation r est l'application $\bar{r} : \omega \rightarrow \omega$ définie (pour $n \in \omega$) par : $\bar{r}(n) = \text{card}(\{\tau(u) : u \in \rho(r) \text{ et } |u| = n\})$.

Lorsque $\bar{r}(n) \leq 1$, on dit que r est n-monomorphe. Si r est n-monomorphe pour tout naturel n , on dit simplement que r est monomorphe.

Pour $p \in \omega$, si r est n-monomorphe pour tout $n \leq p$, on dit que r est p-monotype.

Pour $m \in \omega$, $n \in \omega$, nous noterons : M_m la classe des relations m-aires monomorphes, $M_{m,n}$ la classe des relations m-aires n-monomorphes et M_m^n la classe des relations m-aires n-monotypes. Puisque $T \subseteq M_2$, il est clair que $C_m \subseteq M_m$. La plus simple des relations binaires monomorphes non enchaînables est la relation $(2,3,\alpha)$ de graphe $\alpha = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$.

3 - CLASSE UNIVERSELLE DE RELATIONS m-AIRES

3.1. Lorsque deux relations m-aires r, r' vérifient : $\text{Iso}(r, r') \neq \emptyset$, on dit que r s'abrite dans r' , et on le note : $r \leq r'$. La classe R_m est ainsi munie d'un préordre : le préordre d'abritement.

Une sous-classe A de R_m est dite close par abritement si, pour tout couple (r, r') de relations m-aires : $r \leq r'$ et $r' \in A \Rightarrow r \in A$. (il revient au même de dire que, pour tout $u \in A$: toute restriction de u et toute isomorphe de u appartiennent à A). Si A est close par abritement, alors il en est de même pour toutes ses transformées $\hat{G}(A)$.

3.2. La notion de "classe universelle" de relations m-aires a été introduite en 1953, de deux manières équivalentes, par A. TARSKI⁽⁸⁾ et R.L. VAUGHT⁽⁹⁾. Retenons la définition de VAUGHT :

Une sous-classe A de R_m est dite universelle lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) A est close par abritement.
- (2) Il existe un naturel n tel que, pour toute relation $r \in R_m$:

$$\rho_n(r) \subseteq A \Rightarrow r \in A$$

Pour une classe universelle A , la condition (2) fait intervenir des naturels n qui constituent une section finissante $[d(A), \rightarrow]$ de ω : on dit que $d(A)$ est le degré de A .

3.2.1. Si A et B sont deux sous-classes universelles de R_m , alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont universelles. Signalons également une proposition (R. FRAÏSSÉ⁽¹⁾) où interviennent les sélecteurs φ_n :

<< Si la classe A est universelle, alors toutes les classes $\varphi_n(A)$ sont universelles >>.

3.2.2. Enumérons quelques exemples relativement triviaux :

- a) La classe $\emptyset$ et la classe R_m sont universelles de degré 0.
Pour tout $n \in \omega$, la classe $R_{m,n}$ est universelle de degré $n+1$.
- b) Pour tout $G \in \Sigma_m$, la classe $\hat{G}(R_m)$ est universelle : de degré 0 si $G = I_m$, de degré m si $G \neq I_m$. Il en résulte :
 $\ll$ Si $A \subseteq R_m$ est inclusive et universelle, toutes ses transformées $\hat{G}(A)$ sont universelles. $\gg$
- c) Pour $m = 2$, la classe T des chaînes est universelle de degré 3.
Pour tout $m \geq 2$, la classe T_m des rangements m -aires est universelle de degré $m+1$ (T_0 est universelle de degré 0, T_1 est universelle de degré 1).
- d) Pour tout $n \in \omega$, les classes $M_{m,n}$ et M_m^n sont universelles de degré $n+1$.

3.3. Nothe technique de G-recollement des ordres totaux (notes⁽²⁾⁽³⁾ de 1963-64, et thèse⁽⁴⁾ de 1965) a permis à M. JEAN⁽⁶⁾ d'élucider le cas beaucoup plus difficile des classes M_m et C_m . En fait, nous allons montrer que cette technique de G-recollement revient à s'intéresser à la classe $\hat{G}(T_m)$ des G-rangements. Auparavant, énonçons une variante (liée au recollement) du critère de VAUGHT :

Proposition - Pour qu'une sous-classe A de R_m soit universelle, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) A est close par abritement
- (2') Il existe un naturel $n \geq m$ tel que, pour tout sous-ensemble B de A : B est n -recollable $\Rightarrow e(B) \in A$.

Pour une classe universelle A , la condition (2') fait intervenir des naturels n qui constituent une section finissante $[s(A), \rightarrow [$ de ω :

on peut dire que $s(A)$ est le seuil de recollement de A . On vérifierait aisément que : $s(A) = \text{Max}(m, d(A))$.

4 - CARACTERE UNIVERSEL DES CLASSES $\hat{G}(T_m)$, M_m et C_m

4.1. Voici le nouvel aspect de notre théorème de G -recollement des ordres totaux⁽⁴⁾ :

Théorème - Pour tout groupe $G \in \Sigma_m$, la classe $\hat{G}(T_m)$ des G -rangements est universelle.

4.1.1. Etant donné deux chaînes t, t' de supports respectifs X et X' , rappelons que t, t' sont G -compatibles⁽⁴⁾ dès qu'à tout $x \in (X \cap X')^m$ correspond une permutation $\sigma \in G$ telle que :

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} \pmod{t} \Rightarrow x_{\sigma(0)} < x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(m-1)} \pmod{t'}.$$

Dès lors, on vérifie aisément qu'il y a équivalence entre la G -compatibilité de deux chaînes t, t' et la compatibilité des G -rangements associés $t_m \times G, t'_m \times G$.

4.1.2. Utilisons notre variante du critère de VAUGHT. D'après le théorème de G -recollement, il existe un naturel $n \geq m$ vérifiant la condition suivante : si B est un sous-ensemble cohérent non vide de G -rangements, à soutènement $\mathcal{F}$ tel que $k(\mathcal{F}) \geq n$ (autrement dit : si B est un sous-ensemble n -recollable de $\hat{G}(T_m)$), alors il existe un G -rangement r de support $E = \bigcup \mathcal{F}$ tel que $B \cup \{r\}$ soit cohérent, ce qui implique $r = \epsilon(B)$, donc $\epsilon(B) \in \hat{G}(T_m)$. C'est justement ce qu'exige la variante du critère de VAUGHT pour assurer que $\hat{G}(T_m)$ est une classe universelle. Par ailleurs, le seuil de recollement de la classe $\hat{G}(T_m)$ n'est autre que la valence du groupe G (valeur minimum de n dans le théorème de G -recollement) : cette valence peut faire l'objet d'une autre interprétation relationniste⁽⁵⁾, en accord avec des travaux de M. POUZET⁽⁷⁾.

4.2. Le théorème précédent (caractère universel de la classe des G-rangements, pour tout $G \in \Sigma_m$) admet, on le sait ⁽⁴⁾, une conséquence spectaculaire :

Proposition - Pour tout naturel m, il existe deux naturels n, p vérifiant $m \leq n \leq p$ et tels que : "Toute relation m-aire n-monomorphe de cardinalité $\geq p$ est enchainable".

Il en résulte deux corollaires :

Corollaire 1. - Pour tout naturel m, il existe un naturel p tel que : "Toute relation m-aire p-monotype est monomorphe". Autrement dit : $M_m = M_m^p$.

Corollaire 2. - Pour tout naturel m, il existe un naturel p tel que : "Toute relation m-aire monomorphe de cardinalité $\geq p$ est enchainable".

En tenant compte du caractère propre de C_m , il en résulte : $C_m = \varphi_p(M_m)$ (Au passage, on constate que la classe M_m est assez propre).

4.3. Les deux formules $M_m = M_m^p$ et $C_m = \varphi_p(M_m)$ fournissent immédiatement le théorème de M. JEAN (6) :

Théorème - Pour tout naturel m, les deux classes M_m et C_m sont universelles.

4.4. Disons, pour abréger, qu'une classe $A \subseteq R_m$ est totale-ment universelle lorsque : $(\forall G) (G \in \Sigma_m \Rightarrow \hat{G}(A) \text{ est universelle})$. Toute classe universelle inclusive est totale-ment universelle : c'est le cas trivial.

Parmi les classes universelles non inclusives, on vient de voir que la classe T_m des rangements m-aires est totale-ment universelle (et ce fait est à la source du caractère universel des classes M_m et C_m). On pourrait examiner au même titre la classe : $T'_m = \{t'_m : t \in T\}$ des semi-rangements m-aires obtenue en associant à tout $m \in \omega$ et à toute chaîne t de support E la relation

m-aire $t'_m = (m, E, \text{Hom}(\vec{m}, t))$ (pour tout $m \geq 2$, les multiplets $x \in E^m$ satisfaisant t'_m sont caractérisés par la condition : $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-1} \pmod{t}$). La classe T'_m est-elle totalement universelle ?

Par ailleurs, on pourrait se proposer de trouver une classe universelle qui ne soit pas totalement universelle. Nous soumettons cette question à la sagacité du lecteur !

REFERENCES

- (1) R. FRAÏSSE, Cours de Logique mathématique, tome 1, rééd., Paris, 1971.
- (2) C. FRASNAY, Groupes de permutations finies et familles d'ordres totaux : application à la théorie des relations, C.R.A.S. Paris, 257 (1963), 2944-2947.
- (3) C. FRASNAY, Groupes de compatibilité de deux ordres totaux ; application aux n-morphismes d'une relation m-aire, C.R.A.S. Paris, 259(1964), 3910-3913.
- (4) C. FRASNAY, Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes, Ann. Ins. Fourier, Grenoble, 15(1965), 415-524.
- (5) C. FRASNAY, Interprétation relationniste du seuil de recollement d'un groupe naturel, C.R.A.S. Paris, 277 (1973), 865-868.
- (6) M. JEAN, Sur deux classes universelles de relations, C.R.A.S. Paris, 264(1967), 591-593.
- (7) M. POUZET, Un bel ordre d'abritement et ses rapports avec les bornes d'une multirelation, C.R.A.S. Paris, 274(1972), 1677-1680.
- (8) A. TARSKI, Universal arithmetical classes of mathematical systems, Bull. Am. Math. Soc., 59(1953), 390-391.
- (9) R.L. VAUGHT, Remarks on universal arithmetical classes, Bull. Am. Math. Soc. 59(1953), 391.