PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

GEORGES BLANC

Théories des types de graphes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 3-4
, p. 13-20
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_3-4_13_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979 t.16-3.4

THEORIES DES TYPES DE GRAPHES

par

Georges BLANC

Faculté des Sciences d'Avignon

Il s'agit essentiellement, dans cet exposé, de motiver et de présenter sommairement l'introduction d'un type nouveau de théories du premier ordre formelles que nous appellerons simplement "Théories sur graphes". On pourra en trouver une présentation complète dans : "Langage du premier ordre sur graphe" G. BLANC, Cahiers Math. de Montpellier n°6 (1975) et "Théories formelles sur graphe" G. BLANC et Christiane RAMBAUD, Comp. Rend. Ac. Sci. Paris t. 282 (24 Mai 1976) Série A 1185.

Situons tout de suite le choix de la terminologie : "Théories sur graphes", qui pourrait être avec plus de précision : "Théories du premier ordre sur graphe orienté fini, naïf" pour être en parallèle avec ce que la Logique Mathématique entend par "Théories du premier ordre", et qui pour la circonstance devrait s'appeler plus précisément : "Théories du premier ordre sur ensemble fini naïf". Les théories classiques du premier ordre, étudient en effet des assemblages finis $\Phi(x_1,\dots,x_n)$: les formules, supposées représenter des propriétés d'un ensemble fini d'individus $x_1,\dots,x_n$: les variables ; alors que les théories sur graphes étudieront des assemblages finis $\Phi(G)$: les formules, supposées représenter des propriétés d'une configuration graphique finie G, d'individus variables.

1 – POURQUOI S'INTERESSER A UNE TELLE NOTION ?

Parce qu'il faut bien constater que depuis leur apparition, les concepts dits de catégories, se sont peu ou prou trouvés mêlés, à pratiquement toutes les activités mathématiques. Parfois comme une simple commodité unificatrice d'expression, parfois, et ceci depuis seulement quelques années, sous forme de concepts plus primitifs. Les uns y développant la logique algébrique, en faisant jouer à certaines catégories le rôle des algèbres de formules, ou la logique intuitionniste en théorie des topos, d'autres allant jusqu'aux problèmes de fondements des Mathématiques, par les concepts primitifs de Catégorie, Transformation Naturelle ou Foncteur. Mais un concept quelconque ne peut évidemment être considéré comme primitif, que dans la mesure où il peut être décrit formellement sans aucun support d'ensemble ni de classe, réduit à une simple description combinatoire. Et c'est là une des difficultés actuellement pour les concepts catégoriques.

Les langages, formules, théories, structures du premier ordre, mis au point au début du siècle, et qui permettent de décrire, lorsque le besoin s'en fait sentir, toute situation mathématique, ne pouvaient pas prévoir les concepts dits de catégories, qui apparurent, rappelons-le, beaucoup plus tard. La substance des descriptions par langages et théories classiques est, constatons-le, essentiellement ensembliste.

Depuis, lorsqu'on veut utiliser formellement les propriétés du premier ordre sur un concept de catégorie, on est obligé de torturer artificiellement des notions pourtant si intuitives, en assimilant par exemple objets et flèches d'identité, ou la composition de flèches à un prédicat ternaire, etc ...

Ceci n'est jusqu'ici qu'un désagrément esthétique, et les langages classiques ont prévu des aménagements qui peuvent faciliter la présentation, comme les langages à plusieurs sortes de variables, les théories algébriques partielles, ou les théories essentiellement algébriques.

Mais il y a beaucoup plus grave : on ne peut, par exemple, pratiquement énoncer correctement (et à fortiori encore moins prouver) un schéma de théorème (c.f "Category of categories". F.W. Lawvere, Proc. Conf. Categorical Algebra La Jolla (1965)). On ne peut pas définir de méta-catégories ou méta-foncteurs par des formules. On ne peut que mal aisément faire des interprétations entre théories (c.f. "Categorical set Theory" G. Osius, J. Pure and Appl. Alg. 4 (1974).). On ne dispose pas d'un sens d'extension par définition qui soit pratiquement utilisable.

Il faut bien se résigner à admettre que le concept de Catégorie n'est dans sa substance première, ni "un ensemble de ...", ni "une classe de ...", mais un graphe orienté, et qu'il sera toujours très mal aisé de le traiter par des notions de théories classiques du premier ordre, qui sont d'essence purement ensembliste.

Nous nous proposons donc de trouver à l'intérieur de la Logique Mathématique, un cadre naturel pour y étudier les concepts de catégorie.

Donc développer un langage, et un sens de Théories sur graphe, peut se motiver au moins pour trois raisons :

1. Préciser un cadre formel pour la logique algébrique en terme de catégorie.

2. Développer une Théorie des Modèles sur graphes, jouant vis-à-vis de l'Algèbre des Catégories, le rôle de la Théorie des Modèles classiques vis-à-vis des Algèbres Universelles.

3. Donner un outil indispensable aux projets de Fondements des Mathématiques, en termes de catégories, transformations naturelles, topos, etc ...

2 - LANGAGES FONCTIONNELS SUR GRAPHES.

La première étape à franchir est évidemment la définition d'un langage approprié. C'est combinatoirement très technique et très laborieux, comme par exemple pour un langage de théorie des types, puisqu'il s'agit de faire passer la description conceptuelle d'une représentation graphique, dans la combinatoire syntaxique du langage.

Une telle étude a déjà été abordée par Anne PRELLER au Congrès de Logique de Clermont-Ferrand 1975 avec les "Langages à graphes".

En fait, si un langage fonctionnel classique est constitué de processus opératoires (les symboles fonctionnels) our passer des $x_1,\dots,x_n$ individus à un autre individu y, ou aussi bien pour construire sur un ensemble fini $\{x_1,\dots,x_n\}$ une extension $\{x_1,\dots,x_n,y\}$; un langage sur graphes sera constitué de processus opératoires (les suites fonctionnelles), pour passer d'une configuration d'individus : un graphe A, à une de ses extensions : un graphe T. Comme par exemple la suite fonctionnelle $\sigma = \langle \Pi \; ; \; \pi_1,\pi_2 \rangle$ du produit fibré, qui permet de construire sur le graphe

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x"'] \\ Z & \\ & Y \arrow[ul, "y"] \end{tikzcd} \quad , \text{ le graphe } \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x"'] & \\ Z & & \Pi(x,y) \arrow[ul, "\pi_1(x,y)"'] \arrow[dl, "\pi_2(x,y)"] \\ & Y \arrow[ul, "y"] & \end{tikzcd} .$$

Dans l'exemple ci-dessus, on appelle <u>A l'arité de σ</u> et <u>T son type</u>.

La difficulté combinatoire nouvelle étant, que l'arité A, et le type T d'une suite fonctionnelle σ, peuvent nécessiter des symboles déjà introduits, d'où une hiérarchie nécessaire dans l'introduction des symboles.

Nous nous contentons d'un exemple simple de langage sur graphe $\mathcal{L}$ dans lequel on veut utiliser (sur le support intuitif de catégorie cartésienne fermée) les opérations de produit direct, d'exponentiation, et d'adjonction cartésienne.

$\mathcal{L}$ comprend donc les trois suites fonctionnelles $\sigma_1 = \langle P \; ; \; P_1,P_2 \rangle$
$\sigma_2 = \langle E \; ; \; e \rangle$, $\sigma_3 = \langle \quad ; \; \tau \rangle$
d'arité et type respectifs :

1. $\{X,Y\}$ et $X \xleftarrow{p_1(X,Y)} P$, $Y \xleftarrow{p_2(X,Y)} P$

2. $\{X,Y\}$ et $X \xleftarrow{e(X,Y)} P(Y,E(X,Y))$ $\quad Y \quad E(X,Y)$

3. $Z \xleftarrow{x} P(X,Y)$ et $Z \xleftarrow{x} P(X,Y)$, $E(Z,Y) \xleftarrow{\tau(x)} X$

Dans un langage fonctionnel sur graphe, l'analogue d'une situation donnée $x_1,\dots,x_n$ de variable du cas classique, sera la notion de $\mathcal{L}$-graphe G, graphe de configuration des variables ; de même que l'analogue de la classe $T(x_1,\dots,x_n)$ des termes construits sur $x_1,\dots,x_n$ sera la notion de graphe $\mathcal{G}(G)$ des $\mathcal{L}$-termes construits sur G. La substitution de base h : $\{x_1,\dots,x_n\} \to T(Y_1,\dots,Y_p)$ du cas classique est remplacée par la notion de $\mathcal{L}$-homomorphisme de $G \to \mathcal{G}(H)$.

3 - FORMULES SUR GRAPHES.

Un langage sur graphe $\mathcal{L}$ étant alors complété par la donnée de symboles relationnels R d'arité un $\mathcal{L}$-graphe A_R, on définit alors naturellement la notion de formule $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ sur $\{x_1, \dots, x_n\}$. La quantification de flèches se faisant toujours relativisée à des objets sources et buts.

Exemple : la formule $\exists\, U\ (\exists\, z : X \to P(U,X))\ (\exists t : P(U,X) \to Z)\ (Y \circ \tau(x) = t \circ z)$ sur le $\overline{\mathcal{L}}$-graphe $\{P(X,Y) \xrightarrow{x} X,\ E(X,Y) \xrightarrow{y} Z\}$ dans le langage $\overline{\mathcal{L}}$ obtenu en rajoutant à l'exemple envisagé ci-dessus un symbole de composition "o" d'arité et type évidents, et un symbole relationnel "=", d'arité évidente.

Le rôle de la configuration des variables va être beaucoup plus important que dans le cas classique, où celui-ci se limite au nombre des **variables.** En fait il va être indispensable de considérer une formule comme la donnée **d'un** $\mathcal{L}$-graphe G, et d'un assemblage Φ ; les variables de G constituant **les variables** libres de Φ.

Si $h : G \longrightarrow \mathcal{G}(H)$ est un $\mathcal{L}$-homomorphisme, on définit **alors** aisément la substituée $\Phi(h)$ de toute formule sur G, celle-là devant **une formule** sur H. De même il est commode d'introduire la notation : $\exists_H G\, \Phi$ pour Φ **une** formule sur G, et H un sous-graphe de G, pour désigner la formule **sur** H obtenue en quantifiant les variables de G non dans H à partir de Φ.

4 - THEORIES SUR GRAPHES.

La notion de déduction en théories sur graphes, va nécessiter **quelques** aménagements, dus aux sortes vides de variables et à l'égalité d'objets, **que nous** ne pourrons hélas pas aborder ici (c.f. G. BLANC, Thèse de Doctorat, **chap. IV,** "Théories générales sur catégories").

Le rôle du graphe G sur lequel est considérée une formule Φ**, a un** rôle plus important que celui des variables $x_1,\dots,x_n$ sur lesquelles **est considérée** une formule dans le cas classique.

Intuitivement si une propriété Φ du graphe $G = \{ X \overset{x}{\underset{y}{\rightrightarrows}} Y \}$ a été démontrée par le catégoricien sur le graphe $H = \{ X \overset{x}{\underset{z}{\longleftarrow}} Y \}$,

Y

en théorie des topos $\mathcal{C}$ par exemple, on accepte volontier la déduction **de la** H-formule Φ dans $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \vdash \Phi(H)$), mais la déduction de la **même formule considérée** sur $G(\mathcal{C} \vdash \Phi(G))$ nécessitera évidemment pour le catégoricien, **la vérification** de l'existence d'au moins une telle flèche $z : Y \longrightarrow X$.

Plus précisément, on est obligé de traiter les théories sur **graphes** comme des théories avec éventuellement des interprétations vides pour certaines sortes de variables. La démonstrabilité d'une formule sera donc entachée du contexte dans lequel on lit la formule, d'où la notation $\mathscr{C} \vdash_G \Phi$, comme on le fait par exemple pour les théories à plusieurs sortes de variables à la Gentzen en considérant des séquents $\Phi \xrightarrow[u_1,\ldots,u_n]{} \Psi$ relativisés à des variables.

On peut alors énoncer un système d'axiome et règles logique adapté du cas classique, système de Henkin par exemple.

Citons ainsi la règle de contraction :

- Pour chaque $\mathscr{L}$-graphe G et Φ formule sur G, $\vdash_G \Phi$ infère de $\vdash_G \Phi \vee \Phi$.

Remarquons qu'il nous faut introduire une règle d'extension de graphe :

- Pour $H \subset G$ et Φ formule sur H, $\vdash_G \Phi$ infère de $\vdash_H \Phi$.

Il en résulte un théorème de tautologie (complétude du système propositionnel) pour chaque $\mathscr{L}$-graphe G fixé.

L'axiome d'introduction existentielle pourra se formuler :

- Pour G et $\bar{G}$ deux $\mathscr{L}$-graphes, H un sous-graphe commun aux deux, h un $\mathscr{L}$-homomorphisme de G dans $\mathscr{G}(\bar{G})$, coïncidant avec l'identité sur H, et Φ une formule sur G, on a :

$$\vdash_{\bar{G}} \Phi(h) \longrightarrow \exists_H^G \Phi .$$

D'après les remarques faites au début sur les sortes vides, il faut remarquer la faiblesse de cet axiome par rapport au cas classique, on ne peut, en particulier, montrer l'existence d'au moins un objet avec cet axiome (l'existence d'objet nécessitera un axiome supplémentaire).

La possibilité d'interprétation vide pour certaines sortes de variables, introduit évidemment une notion de contradiction locale. Ainsi une théorie sur graphe $\mathscr{C}$ peut être très intéressante et satisfaire $\mathscr{C} \vdash_G \Phi$ et $\mathscr{C} \vdash_G \neg \Phi$

pour un certain graphe G (théories G-contradictoire), ceci n'a évidemment rien de surprenant si on pense en fait que conceptuellement, le sens donné à $\mathcal{C} \vdash_G \Phi$ correspondrait dans le cas classique à $(\mathcal{C} + \Delta(G)) \vdash \Phi$ où $\Delta(G)$ désigne le diagramme de G diagramme au sens habituel de la théorie des modèles.

On est alors en droit de se demander si tout ceci n'est pas artificiel et ne se ramène pas aux théories du premier ordre classique.

Il suffit pour répondre à cela, de constater que le $\Delta(G)$ que nous venons d'évoquer, n'est pas une formule des langages sur graphes telles que nous les avons définies, $\Delta(G)$ exprime des propriétés du genre "x est une flèche de but Y", et ce sont précisément ces propriétés de description graphique que l'on doit rejeter dans la syntaxe d'écriture si l'on veut avoir un sens de formules et de théorie utilisable en concepts de catégorie. C'est en grande partie, le fait jusqu'à ce jour d'avoir voulu considérer des propriétés conceptuelles comme celle-ci ("x est une flèche de X vers Y"), comme des propriétés sur catégories et donc des formules, qui est à l'origine de toutes les incapacités évoquées dans l'introduction, des théories formelles sur catégories, traitées dans le cadre du premier ordre classique.

Signalons enfin qu'on pourra trouver une étude précise des théories sur graphes dans : "Déduction en théories sur graphes" C. RAMBAUD Comp. Rend. Acad. des Sci. (13 septembre 1976) et "Complétude des Théories sur graphes" M.R. DONNADIEU et C. RAMBAUD, Comp. Rend. Acad. des Sci. à paraître.