

MICHEL GUEUGNON

**Perturbations singulières et noyaux de Poisson pour les
opérateurs frontières homogènes**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 1
, p. 7-20

[<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_7_0>](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_7_0)

© Université de Lyon, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PERTURBATIONS SINGULIERES ET NOYAUX DE POISSON POUR
LES OPERATEURS FRONTIERES HOMOGENES

par Michel GUEUGNON

Introduction.-

On reprend les problèmes des chapitres II, III et IV de [1] où les opérateurs frontières sont remplacés par des opérateurs associés à des polynômes homogènes plus généraux. Les notations et hypothèses générales seront conservées. et les références à divers théorèmes ou lemmes s'y rapportant. Dans le cas présent, on rend mieux comment les opérateurs frontières interviennent dans la régularité de la solution et dans la convergence de la solution du problème perturbé.

1.- Les opérateurs frontières.

Considérons les polynômes $B_\ell(\xi, \tau)$ ($\ell = 1, \dots, m_1$) homogènes de degré μ_ℓ . On les écrira sous la forme suivante :

$$(1) \quad B_\ell(\xi, \tau) = a_{\lambda_\ell}(\xi) \tau^{\mu_\ell - \lambda_\ell} + a_{\lambda_\ell + 1}(\xi) \tau^{\mu_\ell - \lambda_\ell - 1} + \dots + a_{\mu_\ell}(\xi)$$

où $a_{\lambda_\ell + j}(\xi)$ est homogène de degré $\lambda_\ell + j$.

On pose $v_\ell = \mu_\ell - \lambda_\ell$.

On suppose que les polynômes $B_\ell(\xi, \tau)$ sont ordonnés de sorte que

$$(2) \quad \ell > \ell' \text{ donne } v_\ell \geq v_{\ell'}, \text{ et}$$

$$(3) \quad v_{m_0+1} > v_{m_0}.$$

Remarque.- L'hypothèse IV de [1] (p. 28) entraîne que $v_{m_1} \geq m_1 - 1$ et $v_{m_0} \geq m_0 - 1$. On étudie donc le problème :

$$(I) \quad \begin{cases} L(\frac{1}{i} D_x, -D_y) u(x, y) = 0, & y > 0, \\ B_j(\frac{1}{i} D_x, -D_y) u(x, 0) = \varphi_j(x). \end{cases}$$

Et l'on prend la solution donnée dans [1] en (3.0.4), où dans la deuxième partie, $\rho^{-(j-1)}$ est remplacée par $\rho^{-\mu_j}$.

2.- Comportement asymptotique des $A_{jk}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$.

a) La matrice $[A^{k\ell}(\rho\omega, 0)]$ au voisinage de $\rho = 0$.

$\alpha)$ $k \leq m_0$.

On a par définition :

$$A^{k\ell}(\rho\omega, y) = \int_C \frac{B_\ell(\rho\omega, -\rho z) z^{k-1} e^{\rho y z}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})} dz.$$

Donc

$$A^{k\ell}(\rho\omega, 0) = \rho^{\mu_\ell} \int_C \frac{B_\ell(\omega, -z) z^{k-1}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})} dz.$$

D'où l'on peut écrire (cf. [1]).

$$A^{k\ell}(\rho\omega, 0) = \rho^{\mu_\ell} (\alpha_{k\ell}(\omega) + O(\rho)) \text{ où } \alpha_{k\ell}(\omega) = \int_C \frac{B_\ell(\omega, -z)}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} dz$$

$\beta)$ $k > m_0 + 1$.

$$A^{k\ell}(\rho\omega, y) = \int_{C'} \frac{B_\ell(\rho\omega, -z) z^{k-m_0-1} e^{yz}}{\prod_{i=1}^{m_1} (z + \eta_i(\rho\omega))} dz.$$

Donc :

$$A^{k\ell}(\rho\omega, 0) = \int_{C'} \frac{B_\ell(\rho\omega, -z) z^{k-m_0-1}}{\prod_{i=1}^{m_1} (z + \eta_i(\rho\omega))} dz.$$

Et, comme précédemment :

$$A^{k\ell}(\rho\omega, 0) = \rho^{\lambda_\ell} (\alpha_{k\ell}(\omega) + O(\rho)),$$

où

$$\alpha_{k\ell}(\omega) = \int_{C'} \frac{a_{\lambda\ell}(\omega) (-z)^{\nu_\ell} z^{k-m_0-1}}{\prod_{i=1}^{m_0+1} (z + \beta_i)} dz .$$

b) La matrice $[A_{jk}(\rho\omega)]$ au voisinage de $\rho = 0$.

L'inversion de la matrice $A^{k\ell}(\rho\omega, 0)$ entraîne le théorème suivant en tenant compte du a).

Théorème 1. - Au voisinage de $\rho = 0$, on a les propriétés asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} A_{jk}(\rho\omega) &= O(\rho^{-\nu_j - \lambda_j}) = O(\rho^{-\mu_j}) , & j, k \leq m_0 ; \\ A_{jk}(\rho\omega) &= O(\rho^{\nu_{m_0+1} - \nu_j - \lambda_j}) = O(\rho^{\nu_{m_0+1} - \mu_j}) , & j \leq m_0 \text{ et } k \geq m_0+1 ; \\ A_{jk}(\rho\omega) &= O(\rho^{-\nu_{m_0} - \lambda_j}) , & j \geq m_0+1 \text{ et } k \leq m_0 ; \\ A_{jk}(\rho\omega) &= O(\rho^{-\lambda_j}) , & j, k \geq m_0+1 . \end{aligned}$$

Preuve : elle est analogue à celle du théorème (2.3.1) en tenant compte que $\nu_{m_0+1} > \nu_{m_0}$ par hypothèse.

3.- Propriétés de régularité de la solution du problème (I)

Rappelons que la solution que l'on étudie peut s'écrire sous la forme suivante sous certaines hypothèses de régularité à l'origine des $\hat{\varphi}_j$,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x, y) , \text{ où} \\ u_j(x, y) &= \sum_{k=1}^{m_1} \mathcal{F}_\xi \left[\chi_a^{(\rho)} A_{jk}(\rho\omega) G_k(\rho, \omega, y) \hat{\varphi}_j(\xi) \right] (x) \\ (4) \quad &+ \mathcal{F}_\xi \left[(1 - \chi_a^{(\rho)}) \int_{C_a} \frac{\rho^{-\mu_j} N_j(\rho, \omega, \zeta) e^{\rho\zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1} (\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})} d\zeta \hat{\varphi}_j(\xi) \right] (x) . \end{aligned}$$

Théorème 2.— Soient $\varphi_j(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \dots, m_1$; pour tout $y \geq 0$ on a :

$$B_j(\frac{1}{i} D_x, -D_y) u_j(x, y) \in H^r(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ comme fonction de } x \text{ et}$$

$$\|B_j(\frac{1}{i} D_x, -D_y) u_j(x, y)\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Remarque 2.— B_j peut être remplacé par D^{μ_j} et on aura des résultats, analogues au théorème 3.4, pour $p = 2$, d'Agmon-Douglis-Nirenberg.

Preuve : Lorsque $y = 0$, le théorème est immédiat car, $B_j u_j(x, 0) = \varphi_j(x)$. Supposons alors $y > 0$, il suffira de montrer successivement que $B_j u_{jk}^1(x, y)$ et $B_j u_j^2(x, y)$ sont dans $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ ($j, k \leq m_1$) c'est-à-dire, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, que

$$D_x^\alpha B_j u_{jk}^1 \text{ et } D_x^\alpha B_j u_j^2 \text{ sont dans } L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ pour tout } |\alpha| \leq r$$

$$a) \quad u_{jk}^1 \text{ avec } j, k \leq m_0.$$

Le théorème de Plancherel entraîne qu'il suffit de montrer :

$$\chi(\frac{\rho}{a}) A_{jk}(\rho\omega) B_j(\rho\omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y) \widehat{D^\alpha \varphi_j}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Or $\chi(\frac{\rho}{a}) A_{jk}(\rho\omega) B_j(\rho\omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y)$ est continue à support compact.

La continuité en $\rho = 0$ suit du fait que

$$B_j(\rho\omega, -D_y) G_k = \rho^{\mu_j} \int_C \frac{B_j(\omega, -z) z^{k-1} e^{\rho y z}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})} dz$$

et alors $|\rho^{\mu_j} A_{jk}(\rho\omega)|$ est borné au voisinage de $\rho = 0$, d'après le théorème !
D'où

$$\|B_j u_{jk}^1\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq r} \|D_x^\alpha B_j u_{jk}^1(x, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leq C \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

β) u_{jk}^1 avec $j \leq m_0$ et $k \geq m_0 + 1$.

Dans ce cas :

$$B_j(\rho\omega, -D_y) G_k = \int \frac{B_j(\rho\omega, -z) z^{k-m_0-1} e^{yz}}{\prod_{m_0+1}^{m_0} (z + \eta_i(\rho\omega))} dz = O(\rho^{\lambda_j})$$

et, comme alors $A_{jk}(\rho\omega) = O(\rho^{v_{m_0+1} - v_j - \lambda_j})$, on aura :

$$A_{jk}(\rho\omega) B_j(\rho\omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y) = O(\rho^{v_{m_0+1} - v_j}), \text{ et } j \leq m_0 \text{ entraîne}$$

que $v_{m_0+1} > v_j$, c'est-à-dire que l'on a encore continuité à l'origine et comme précédemment, on a la même inégalité.

γ) u_{jk}^1 avec $j \geq m_0 + 1$ et $k \leq m_0$.

Dans ce cas :

$$A_{jk}(\rho\omega) B_j(\rho\omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y) = O(\rho^{v_j - v_{m_0}}) \text{ et } v_j \geq v_{m_0} \text{ (} j > m_0 \text{)}$$

et, comme précédemment, on a la même inégalité.

δ) u_{jk}^1 avec $j, k \geq m_0 + 1$.

Dans ce cas

$$A_{jk}(\rho\omega) B_j(\rho\omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y) = O(1).$$

Donc le résultat est vérifié pour $B_j u_j^1(x, y)$, et, pour $B_j u_j^2(x, y)$, il suffit de voir la démonstration du théorème 3.1.1.

Théorème 3.— Soit $\varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $|\varphi_j|_{1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty$ alors

$$|B_j(\frac{1}{i} D_x, -D_y) u_j(x, y)|_{1, H^r} \text{ est fini pour tout } j = 1, \dots, m_1 \text{ et on a}$$

$$|B_j(\frac{1}{i} D_x, -D_y) u_j(x, y)|_{1, H^r} \leq C |\varphi_j|_{1/2, H^r(\mathbb{R}^{n-1})}^*.$$

Preuve : C'est le théorème 3.1.2, en tirant du lemme 2.5.2 les inégalités :

Si $k \leq m_0$,

$$|B_j(\rho\omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y)| \leq C \rho^{\mu_j} e^{-\alpha\rho y} , \text{ pour } \rho \leq a .$$

Si $k \leq m_0 + 1$,

$$|B_j(\rho\omega, -D_y) G_k(\rho, \omega, y)| \leq C \rho^{\lambda_j} e^{-(\beta y + \alpha\rho y)} , \text{ pour } \rho \leq a .$$

Théorème 4. - Supposons que :

$$\begin{aligned} |\varphi_j|^*_{-\mu_j - \frac{1}{2}, H^{\nu_{m_1} + r + 1}(\mathbb{R}^{n-1})} &< \infty , \quad j = 1, \dots, m_0 , \\ |\varphi_j|^*_{-\nu_{m_0} - \lambda_j - \frac{1}{2}, H^{\nu_{m_1} + r - \nu_j + \nu_{m_0} + 1}} &< \infty , \quad j \geq m_0 + 1 . \end{aligned}$$

$u(x, y)$ donnée par (4) est bien définie et est une solution du problème (I) qui appartient à $T^{\nu_{m_1} + 1, r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Preuve : La marche à suivre est la même que pour le théorème 3.1.3 en remarquant que le théorème (I) permet d'écrire :

pour $j, k \leq m_0$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \left[\rho^{\mu_j} A_{jk}(\xi) \right] G_k(\rho, \omega, y) \rho^{1/2} \rho^{-\mu_j - \frac{1}{2}} \hat{\varphi}_j(\xi) ,$$

$\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{1/2}$ pouvant être majoré par $a^{1/2}$,

$\rho^{\mu_j} A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$,

pour $j \leq m_0$ $k \geq m_0 + 1$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{\mu_j - \nu_{m_0} + 1} A_{jk}(\xi) G_k(\rho, \omega, y) \rho^{\nu_{m_0} + 1 + \frac{1}{2}} \rho^{-\mu_j - \frac{1}{2}} \hat{\varphi}_j(\xi)$$

$\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{\nu_{m_0} + 1 + \frac{1}{2}}$ peut être majoré par $a^{\nu_{m_0} + 1 + \frac{1}{2}}$,

$\rho^{\mu_j - \nu_{m_0+1}} A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$.

pour $j \geq m_0 + 1$, $k \leq m_0$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{\nu_{m_0} + \lambda_j} A_{jk}(\xi) G_k(\rho, \omega, y) \rho^{1/2} \rho^{-\nu_{m_0} - \lambda_j - 1/2} \hat{\varphi}_j(\xi),$$

$\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{1/2}$ est majoré par $a^{1/2}$,

$\rho^{\nu_{m_0} + \lambda_j} A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$.

pour $j, k \geq m_0 + 1$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{\lambda_j} A_{jk}(\xi) G_k(\rho, \omega, y) \rho^{\nu_{m_0} + 1/2} \rho^{-\nu_{m_0} - \lambda_j - 1/2} \hat{\varphi}_j(\xi),$$

$\chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{\nu_{m_0} + 1/2}$ est majoré par $a^{\nu_{m_0} + 1/2}$,

$\rho^{\lambda_j} A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$.

Corollaire. - Si sous les hypothèses du théorème précédent on suppose en plus que

$$\varphi_j \in H^{\nu_{m_1+r+k}}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \forall j = 1, \dots, m_1,$$

alors $u(x, y) \in T^{\nu_{m_1}+k, r}(\mathbb{R}_+^n)$.

4.- Le problème limite

On considère le problème :

$$(II) \quad \begin{cases} L_0\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u(x, y) = 0 \\ B_j\left(\frac{1}{i} D_x, -D_y\right) u(x, 0) = \varphi_j(x) \end{cases}, \quad j \leq m_0.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
 A^{k\ell}(\rho\omega, y) &= B_\ell(\rho\omega, -D_y) G'_k(\rho, \omega, y) \\
 &= \int_C \frac{B_\ell(\rho\omega, -\rho z) z^{k-1} e^{\rho y z}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} dz \\
 &= \rho^{\mu_\ell} \int_C \frac{B_\ell(\omega, -z) z^{k-1} e^{\rho y z}}{\prod_{i=1}^{m_0} (z + \alpha_i(\omega))} dz ; \\
 A^{k\ell}(\rho\omega, 0) &= \rho^{\mu_\ell} \alpha_{k\ell}(\omega) \text{ et donc} \\
 [A_{jk}(\rho\omega)] &= [\rho^{-\mu_j} \beta_{jk}(\omega)] .
 \end{aligned}$$

Théorème 5.- Supposons que :

$$|\varphi_j|_{-\mu_j - 1/2, H^{m_0+r+1}(\mathbb{R}^{n-1})}^* < \infty$$

On peut alors définir $u(x, y) = \sum_{j=1}^{m_0} u_j(x, y)$ où

$$u_j(x, y) = \sum_{k=1}^{m_0} \widehat{\mathcal{F}}_\xi \left[\rho^{-\mu_j} \beta_{jk}(\omega) G'_k(\rho, \omega, y) \widehat{\varphi}_j(\xi) \right] (x) ;$$

$u(x, y)$ ainsi définie est une solution du problème (II) qui appartient à $V_{T^{m_0+1, r}(\mathbb{R}_+^n)}$.

5.- Le problème perturbé

Si $\varepsilon > 0$ on considère le problème :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} L(\frac{\varepsilon}{i} D_{\overline{x}}) u_\varepsilon(x, y) = 0 , & y > 0 ; \\ B_j(\frac{\varepsilon}{i} D_{\overline{x}}) u_\varepsilon(x, 0) = \varphi_j(x) , & j = 1, \dots, m_1 . \end{cases}$$

On note $f_{jk}^\beta(\xi, y) = \chi(\frac{\rho}{a}) A_{jk}(\rho\omega) D_y^\beta G_k(\rho, \omega, y) ,$

$$f_j^\beta(\xi, y) = \sum_{k=1}^{m_1} f_{jk}^\beta(\xi, y) \quad ,$$

$$g_j^\beta(\xi, y) = (1 - \chi(\frac{\rho}{a})) \frac{\rho^{-\mu_j} N_j(\rho, \omega, \zeta) (\rho \zeta)^\beta e^{\rho \zeta}}{\prod_{i=1}^{m_1} \left[\zeta + \left(\frac{\eta_i(\rho \omega)}{\rho} \right) \right]} d\zeta \quad .$$

Théorème 6. - Supposons que

$$|\varphi_j|^*_{-\mu_j - \frac{1}{2}, H^{v_{m_1} + r + 1}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \quad (j \leq m_0)$$

et

$$|\varphi_j|^*_{-v_{m_0} - \lambda_j - \frac{1}{2}, H^{v_{m_1} + r + v_{m_0} - v_j + 1}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \quad , \quad j \geq m_0 + 1 \quad .$$

On peut alors définir la fonction $u_\varepsilon(x, y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_{j\varepsilon}(x, y)$, où

$$u_{j\varepsilon}(x, y) = \varepsilon^{\mu_j} \left[\overline{\mathcal{F}}_\xi [f_j^\circ(\varepsilon \xi, \frac{y}{\varepsilon}) \widehat{\varphi}_j(\xi)](x) + \overline{\mathcal{F}}_\xi [g_j^\circ(\varepsilon \xi, \frac{y}{\varepsilon}) \widehat{\varphi}_j(\xi)](x) \right]$$

et $u_\varepsilon(x, y) \in T^{v_{m_1} + 1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ est solution du problème perturbé (III) et converge dans $T^{v_{m_0} + 1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ vers $u(x, y)$.

Preuve : Le début du théorème est analogue à la démonstration du théorème (4.2.1) .

Montrons la convergence dans $T^{v_{m_0} + 1, r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Lemme. - $u_{j\varepsilon}^2$ converge vers zéro dans $T^{v_{m_0} + 1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et on a les inégalités :

$$\|u_{j\varepsilon}^2(x, y)\|_{T^{v_{m_0} + 1, r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \varepsilon \quad , \quad j = 1, \dots, m_1 \quad ,$$

et

$$\|u_{j\varepsilon}^2(x, y)\|_{T^{v_{m_1} + 1, r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \quad .$$

Preuve : D'après le lemme (3.1.1), on a :

$$\begin{aligned}
 \| D^q (D_x^p u_{j\varepsilon}^2(x, y)) \|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g_{j\varepsilon}^{\beta_0}(\xi, y) \widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi)|^2 d\xi dy \\
 &\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a}))^2 \rho^{-2\mu_j + 2\beta_0 - 1} |\widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a}))^2 (\varepsilon \rho)^{-1} \rho^{-2\mu_j + 2\beta_0} |\xi_1|^{2(\alpha_1 + \beta_1)} \dots |\xi_{n-1}|^{2(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\frac{a}{2})^{-1} \rho^{-2\mu_j + 2|q| + 2|p|} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2\mu_j - 1} \frac{2|q| + 2|p| + 1}{(1 + \rho^2)^{v_{m_1} + r + 1}} (1 + |\xi|^2)^{v_{m_1} + r + 1} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi .
 \end{aligned}$$

Ceci pour $j \leq m_0$ et alors, comme $|q| \leq v_{m_0} + 1$ et $|p| \leq r$ et $v_{m_0} + 1 \leq v_{m_1}$, on a

$$\frac{\rho^{2|q| + 2|p| + 1}}{(1 + \rho^2)^{v_{m_1} + r + 1}} \leq C \text{ pour } \rho \in \mathbb{R}^+ ;$$

d'où le résultat pour $j \leq m_0$ en sommant pour $|q| \leq v_{m_0} + 1$ et $|p| \leq r$.

Si $j \geq m_0 + 1$, on majore alors comme suit :

$$\leq C \varepsilon \times \varepsilon^{2v_j - 2v_{m_0}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a}))^2 (\varepsilon \rho)^{2v_{m_0} - v_j - 1} \rho^{-2v_{m_0} - 2\lambda_j + 2|q| + 2|p|} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi$$

Or si $j \geq m_0 + 1$ $v_j > v_{m_0}$ et donc $\varepsilon^{2v_j - 2v_{m_0}} \leq 1$ et

$$(1 - \chi(\frac{\varepsilon \rho}{a}))^2 (\varepsilon \rho)^{2v_{m_0} - v_j - 1} \leq (\frac{a}{2})^{2v_{m_0} - v_j - 1} .$$

D'où

$$\leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2v_{m_0} - 2\lambda_j - 1} \frac{\rho^{2|q| + 2|p| + 1}}{(1 + \rho^2)^{v_{m_1} + r + v_{m_0} - v_j + 1}} (1 + \rho^2)^{v_{m_1} + r + v_{m_0} - v_j + 1} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi$$

et le résultat lorsque $j \geq m_0 + 1$, en sommant pour $|q| \leq v_{m_0} + 1$ et $|p| \leq r$.

La deuxième inégalité s'obtient en laissant $(\varepsilon\rho)^{-1}$ et en sommant sur $|q| \leq v_{m_1} + 1$.

Lemme 2. - Lorsque $j \leq m_0$ et $k \geq m_0 + 1$ $u_{jk\varepsilon}^1(x, y)$ converge vers zéro dans $T_{m_0}^{v_{m_0}+1, r}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a l'inégalité :

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x, y)\|_{T_{m_0}^{v_{m_0}+1, r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \varepsilon.$$

Preuve : $\|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x, y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \varepsilon^{2\mu_j} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_{jk}^\beta(\varepsilon\xi, \frac{y}{\varepsilon})|^2 |\widehat{D\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi dy.$

Or pour $\varepsilon\rho \leq a$ le théorème 1 donne pour $j \leq m_0$ et $k \geq m_0 + 1$

$$|A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leq C (\varepsilon\rho)^{v_{m_0}+1 - \mu_j}$$

et le lemme (2.5.2) donne après introduction de ε

$$\left| \frac{\partial^{\beta_0}}{\partial y^{\beta_0}} G_k(\varepsilon\rho, \omega, \frac{y}{\varepsilon}) \right|^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^{2\beta_0}} e^{-2(\beta+\alpha\varepsilon\rho)\frac{y}{\varepsilon}} \text{ pour } \varepsilon\rho \leq a \text{ et } k \geq m_0 + 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|D^q(D^p u_{jk\varepsilon}^1(x, y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 &\leq C \varepsilon^{2\mu_j - 2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2v_{m_0}+1-2\mu_j} \\ &\quad \int_0^\infty e^{-2(\beta+\alpha\varepsilon\rho)\frac{y}{\varepsilon}} dy |\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \varepsilon^{2v_{m_0}+1-2\beta_0+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{2v_{m_0}+1-2\mu_j} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} \\ &\quad |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2v_{m_0}+1-2\beta_0} \rho^{2|p|+2|q|-2\mu_j} |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

et, comme $\beta_0 \leq v_{m_0} + 1 \leq v_{m_0+1}$, on peut majorer $(\varepsilon\rho)^{2v_{m_0}+1-2\beta_0}$ par $a^{2v_{m_0}+1-2\beta_0}$

et, comme précédemment, on peut conclure que :

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T_{m_0+1,r}^{v_{m_0+1,r}}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \varepsilon.$$

Lemme 3. - Lorsque $j \geq m_0+1$ et $k \geq m_0+1$, $u_{jk\varepsilon}^1(x,y)$ converge vers zéro dans $T_{m_0+1,r}^{v_{m_0+1,r}}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a l'inégalité :

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T_{m_0+1,r}^{v_{m_0+1,r}}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C' \varepsilon.$$

Preuve : On a encore (4.2.15) (4.2.17) mais le théorème (1) donne :

$$A_{jk}(\varepsilon \rho) \leq C (\varepsilon \rho)^{-\lambda_j} \text{ pour } \varepsilon \rho \leq a \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned} \|D^q(D_x^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 &\leq C \varepsilon \times \varepsilon^{2\mu_j-2\beta_0-\lambda_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \rho^{-\lambda_j} \\ &\quad \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) (\varepsilon \rho)^{2\mu_j-2\beta_0} \rho^{-2\mu_j+2|p|+2|q|} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

et l'on décompose en introduisant $1 = \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) + (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right))$

$$\begin{aligned} \text{le premier terme est } C \varepsilon \times \varepsilon^{2\mu_j-2\beta_0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{2\nu_{m_0}+2-2\beta_0} \\ \rho^{-2\nu_{m_0}-2-2\lambda_1-1} \rho^{2|p|+2|q|+1} |\widehat{\varphi}_j|^2 d\xi \end{aligned}$$

$$\text{et } 2\nu_j - 2\beta_0 \geq 0 \text{ entraîne } \varepsilon^{2\nu_j-2\beta_0} \leq 1,$$

$$2\nu_{m_0}+2-2\beta_0 \geq 0 \text{ entraîne } \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) \chi\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{2\nu_{m_0}+2+2|p|+2|q|-2\beta_0} \leq a^{2\nu_{m_0}+2|p|+2|q|-1}$$

d'où le premier terme est majoré par $C \varepsilon$.

le deuxième terme s'écrit

$$\begin{aligned} C \varepsilon \int (1 - \chi\left(\frac{\rho}{a}\right)) \chi^2\left(\frac{\varepsilon \rho}{a}\right) (\varepsilon \rho)^{2\nu_j-2\beta_0} \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\mu_j}}{(1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r-\mu_j+1/2}} \\ (1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r-\mu_j+1/2} |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Comme $2v_j - 2\beta_o > 0$ et $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) = 0$ si $\varepsilon\rho \geq a$ on a :

$$\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) (\varepsilon\rho)^{2v_j-2\beta_o} \leq a^{2v_j-2\beta_o}$$

et comme $1 - \chi(\frac{\rho}{a}) = 0$ si $\rho \leq \frac{a}{2}$ $\frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\mu_j}}{(1+\rho^2)^{v_{m_1}+r-\mu_j+1/2}} < C$ pour

$$|q| \leq v_{m_0}+1 \text{ et } |p| \leq r.$$

D'où le résultat.

Lemme 4.- Lorsque $j \geq m_0+1$ et $k \leq m_0$ $u_{jk\varepsilon}^1(x,y)$ converge vers zéro dans $T_{m_0}^{v_{m_0}+1,r}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a l'inégalité

$$\|u_{jk\varepsilon}^1(x,y)\|_{T_{m_0}^{v_{m_0}+1,r}(\mathbb{R}_+^n)}^2 < C' \varepsilon.$$

Preuve : Dans ce cas

$$|A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leq C(\varepsilon\rho)^{-v_{m_0}-\lambda_j} \text{ pour } \varepsilon\rho \leq a$$

et le lemme (2.5.2) donne :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\varepsilon\rho, \omega, \frac{y}{\varepsilon}) \right|^2 \leq C \rho^{2\beta_o} e^{-2\alpha\rho y} \text{ pour } \varepsilon\rho \leq a.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|D^q(D_x^p u_{jk\varepsilon}^1(x,y))\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} &\leq C \varepsilon^{\mu_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) (\varepsilon\rho)^{-2v_{m_0}-2\lambda_j} \rho^{2\beta_o-1} \\ &\quad \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) (\varepsilon\rho)^{-2v_{m_0}+2v_j-1} \rho^{-\mu_j+2|\alpha|+2|\beta|} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

et après décomposition comme dans le lemme précédent on obtient le même résultat car ici $-2v_{m_0}+2v_j-1 \geq 0$.

Lemme 5. - Lorsque $j \leq m_0$ et $k \leq m_0$, $u_{jk\epsilon}^l(x,y)$ converge vers $u_{jk}(x,y)$ (donnée par le théorème 5) dans $T_{v_{m_0+1,r}}^{v_{m_0+1,r}}(\mathbb{R}_+^n)$ et on a l'inégalité :

$$\|u_{jk\epsilon}^l(x,y) - u_{jk}(x,y)\|_{T_{v_{m_0+1,r}}^{v_{m_0+1,r}}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq C \epsilon.$$

Preuve : C'est l'analogue du lemme (4.2.5) où $j-1$ est remplacé par u_j et m_0 par $v_{m_0}+1$.

Bibliographie. -

- [1] M. GUEUGNON, *Perturbations singulières et noyaux de Poisson*, Publ. Dep. Math. Lyon, 15-2 (1978) p. 1-112.

Dans [1], on trouvera une bibliographie détaillée.