J. B. DELIFER

Modules sur un anneau de Krull régulier au sens de Marubayashi

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 1 , p. 37-60

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_37_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979.T.16.1

MODULES SUR UN ANNEAU DE KRULL REGULIER AU SENS DE MARUBAYASHI

par J.B. DELIFER

On édutie ici quelques propriétés des anneaux de Krull réguliers non nécessairement commutatifs (AKR en abrégé) tels que les a définis H. Marubayashi [6].

Un premier paragraphe introduit les définitions de base et établit que les idéaux divisoriels (à notre sens) vérifient la condition de chaine ascendante.

Dans le second paragraphe, on précise la structure des injectifs codivisioriels indécomposables sur un AKR ; ce qui permet de réaliser une bijection entre types de ces modules et les idéaux premiers minimaux auxquels on adjoint l'idéal nul. On démontre aussi que les injectifs codivisoriels sont exactement les sommes directes d'injectifs indécomposables.

Dans le troisième paragraphe, on applique ces résultats à la localisation fondamentale et on est conduit à la caractérisation des modules codivisoriels et des modules pseudonuls.

Dans le quatrième paragraphe on étudie la décomposition primaire et la décomposition tertiaire dans un AKR.

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [12] pour tout ce qui concerne la théorie des anneaux de fractions, au fascicule [10] pour la théorie des ordres maximaux, à [5] et [13] pour les questions de localisation et à l'article [11] pour la décomposition primaire et tertiaire.

1. LA LOCALISATION FONDAMENTALE $\mathcal{F}$.

(1.1) DEFINITIONS. - *a) On appelle localisation fondamentale (à droite) d'un* AKR R *la localisation définie par la famille topologisante et idempotente* $\mathcal{F} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{F}_P$.

b) Pour tout R*-sous-module à droite* I *de* Q*, on note* I_w *le sous-module* $\bigcap_{P \in \mathcal{P}} IR_P$. *On dit que* I *est* w*-divisoriel si* $I_w = I$

Soient M *et* N *deux* R*-modules (à droite), avec* $N \subseteq M$*:*

c) M *est dit pseudonul s'il est de torsion au sens de* $\mathcal{F}$. ($\mathcal{F}$M=M).

d) M *est dit codivisoriel s'il est sans* $\mathcal{F}$*-torsion* ($\mathcal{F}$M=0).

e) N *est dit divisoriel dans* M *si le quotient* M/N *est codivisoriel.*

f) M *est dit divisoriel (tout court) si* M *est un sous-module divisoriel de l'une de ses enveloppes injectives.*

(1.2) PREMIERES PROPRIETES.

a) Puisque $\mathcal{F} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{F}_P$ et que le localisé de R suivant $\mathcal{F}_P$ est R_P avec $R = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} R_P$, il en résulte que le localisé $R_{\mathcal{F}}$ est égal à R.

b) Chacune des $\mathcal{F}_P$ étant une T-localisation (au sens de Goldman) on a pour tout idéal de $\mathcal{F}_P$, $IR_P = R_P$, donc aussi IQ = Q. Ainsi tout idéal de $\mathcal{F}_P$ - a fortiori tout idéal de $\mathcal{F}$ - est un idéal à droite essentiel de R.

c) Puisque $R_{\mathcal{F}} = R$, $\mathcal{F}$ est une T-localisation si et seulement si $\mathcal{F} = \{R\}$.

(1.3) LEMME. - *Pour tout idéal à droite* I *de* R, $\mathcal{F}(R/I) = I_w/I$.

DEMONSTRATION. - Prenons a + I dans $\mathcal{F}(R/I)$. Il existe par définition $J \in \mathcal{F}$ avec $aJ \subseteq I$. On a donc pour tout $P \in \mathcal{P}$ a $JR_P \subseteq IR_P$. Mais J étant dans $\mathcal{F}_P$, on a en fait $JR_P = R_P$. Il en résulte $a \in IR_P$ pour tout $P \in \mathcal{P}$; donc $a \in \bigcap_{P \in \mathcal{P}} IR_P$, ou encore $a + I \in I_w/I$.

Réciproquement, si a est pris dans I_w , fixons $P \in \mathcal{P}$: on a $a \in IR_P$, ce qui permet d'écrire a sous la forme $\Sigma i_k r_k$, somme finie dans laquelle les i_k sont dans I et les r_k dans R_P. Les r_k étant en nombre fini, il existe un idéal J de $\mathcal{F}_P$ pour lequel tous les $r_k J$ sont inclus dans R. Il en résulte que $aJ \subseteq I$ et donc que $I:a \in \mathcal{F}_P$. Ce raisonnement étant valable pour tout $P \in \mathcal{P}$, il s'ensuit que $I:a \in \mathcal{F}$ et donc que $a + I \in \mathcal{F}(R/I)$.

(1.4) La classe d'Artin de R désignant l'ensemble des idéaux bilatères non nuls B de R pour lesquels $B^\chi = R$, on a :

PROPOSITION. - $\mathcal{F}$ *est constitué des idéaux à droite essentiels* I *de* R *vérifiant* $I^\lambda = R$, *et admet pour partie cofinale la classe d'Artin de* R.

DEMONSTRATION. - Pour tout idéal essentiel I de R, on a $I_w = I^\chi$ (voir 1.10 dans [7]). $\mathcal{F}$ est constitué des idéaux I pour lesquels $\mathcal{F}(R/I) = R/I$. Ainsi, compte tenu du lemme précédent et de la remarque (1.2 b), on a bien $\mathcal{F} = \{I \lhd R$ avec $I^\chi = R\}$. Si I est un idéal pris dans $\mathcal{F}$, chacune des localisations $\mathcal{F}_P$ étant bilatère, on peut trouver pour tout $P \in \mathcal{P}$ un idéal bilatère B_P non inclus dans dans P avec $B_P \subseteq I$. Désignons par B la somme $\sum_{P \in \mathcal{P}} B_P$; B est toujours inclus dans I, mais B n'est inclus dans aucun P de $\mathcal{P}$. Ceci implique que B^χ est l'élément neutre du groupe libre Div(R), ou encore que $B^\chi = R$. Ce qui achève la démonstration.

(1.5) COROLLAIRE. - *Pour que* $\mathcal{F}$ *soit une* T-*localisation, il faut et il suffit que* R *soit un anneau de Dedekind.*

DEMONSTRATION. - Compte tenu de la remarque (1.2.c) et de la proposition précédente, pour que $\mathcal{F}$ soit une T-localisation, il faut et il suffit que la classe d'Artin de R soit réduite à R. Cela est évident si R est un anneau de Dedekind ; réciproquement, si la classe d'Artin de R est réduite à R, il en découlerait que les éléments de $\mathcal{P}$ sont les seuls idéaux premiers non nuls et distincts de R, et qu'ils sont maximaux. On peut alors appliquer le théorème 1.13 de [7] pour conclure.

(1.6) On retrouve la définition de module codivisoriel sour le forme donnée par Beck (dans le cas commutatif) :

PROPOSITION. - *Un module* M *est codivisoriel si et seulement si l'annulateur de tout élément de* M *est un idéal à droite* w-*divisoriel.*

DEMONSTRATION. - Pour tout x dans M, le sous-module de torsion de xR est donné par $\mathcal{F}(xR) = xR \cap \mathcal{F}M$. Ainsi $\mathcal{F}M = 0$ si et seulement si $\mathcal{F}(xR)$ est nul pour tout x dans M. Mais xR est isomorphe à $R/_{annx}$. Donc M est codivisoriel si et seulement si $\mathcal{F}(R/_{annx}) = 0$ pour tout x dans M. On peut alors conclure en invoquant le lemme (1.3).

(1.7) PROPOSITION. - *On a la condition de chaîne ascendante sur les idéaux à droite* w-*divisoriels de* R.

DEMONSTRATION. - Soit $(I_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante de w-idéaux à droite de R. Si les I_n sont essentiels à partir d'un certain rang, la CCA sur les c-idéaux à droite entiers d'un AKR (caractérisation de [8]) permet de conclure. Démontrons ici le cas général : dans l'anneau artinien Q, la suite I_nQ est une suite croissante d'idéaux ; elle est donc stationnaire à partir d'un certain indice n_o. Ainsi, pour $n \geqslant n_o$, $I_nQ = I_{n_o}Q$. Explicitant cette égalité, on voit que I_{n_o} est essentiel dans I_n pour tout $n \geqslant n_o$. Soit J un complément pour I_{n_o}. Toutes les sommes $I_n + J$ forment alors des sommes directes et sont des idéaux essentiels de R (pour $n \geqslant n_o$). Ainsi la suite $((I_n + J)^{\times})_{n \geqslant n_o}$ est une suite croissante de c-idéaux à droite ; elle est donc stationnaire à partir de l'indice n_1. On obtient alors en particulier pour tout $n \geqslant n_1$ et tout $P \in \mathcal{P}$, l'inclusion $I_n \subseteq (I_{n_1} + J)R_P$. Cela veut dire que pour tout i dans I_n, il existe i_{n_1} dans I_{n_1}, j dans J et c dans $\mathcal{C}(P)$ avec $i = (i_{n_1} + j)c^{-1}$. Il en résulte que $ic = i_{n_1} + j$. Mais la somme $I_n + J$ étant directe, cela implique que $j = 0$ et par suite que $i \in I_{n_1}R_P$. Ce raisonnement étant valable pour tout $P \in \mathcal{P}$, il vient $I_n \subseteq (I_{n_1})_w = I_{n_1}$, et donc que la suite I_n est stationnaire à partir de n_1, ce qui démontre la proposition.

2. MODULES INJECTIFS SUR UN AKR.

(2.1) Soient M un R-module et P dans $\mathcal{P}$. Nous notons M_P le R_P-module $M_P = M_{\mathcal{F}_P} = M \otimes R_P$. Il existe une application naturelle d_M de M dans le produit $\prod_{P \in \mathcal{P}} M_P$. Il est clair que $\operatorname{Ker} d_M = \mathcal{T}M$; ainsi, $d_M(M)$ est un sous-module codivisoriel de $\prod_{P \in \mathcal{P}} M_P$.

PROPOSITION. - *Si* M *est de torsion,* $d_M(M)$ *est un sous-module essentiel de* $\bigoplus_{P \in \mathcal{P}} M_P$. *En particulier si* M *est codivisoriel de torsion,* $M \triangleleft \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} M_P$.

DEMONSTRATION. - Montrons pour commencer que si P et P' sont deux éléments distincts de $\mathcal{P}$, alors $R_P \otimes R_{P'} = Q$. Il suffit pour cela de montrer que pour tout élément régulier c de R, $c^{-1} \in R_P \otimes R_{P'}$. En effet pour un tel c, il existe un entier naturel n tel que $P^n \subseteq cR_P$. Ainsi on a $R_{P'} = P^n R_{P'} \subseteq cR_P R_{P'}$, ce qui montre $1 \in cR_P R_{P'}$, et par suite que $c^{-1} \in R_P R_{P'}$; d'où $R_P R_{P'} = Q$. Démontrons à présent que $d_M(M) \subseteq \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} M_P$: en effet, M étant de torsion, pour tout x de M il existe c régulier dans R avec xc = 0. Par la condition K3 de Marubayashi, c est inversible dans presque tous les R_P ; on a donc presque partout $x \otimes 1 = (x \otimes c)c^{-1} = (xc \otimes 1)c^{-1} = 0$, ce qui prouve que $d_M(M) \subseteq \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} M_P$. Il reste à voir que l'inclusion est essentielle. Posons C = coker d_M. En tensorisant par R_P pour $P \in \mathcal{P}$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}M \otimes R_P \longrightarrow M_P \xrightarrow[d_P]{} \bigotimes_{P' \in \mathcal{P}} M_{P'} \otimes R_P \longrightarrow C_P \longrightarrow 0.$$

Par la remarque du début, pour $P \neq P'$ on a :

$$M_{P'} \otimes R_P = M \otimes R_{P'} \otimes R_P = M \otimes Q = 0.$$

Cette suite exacte se réduit donc à

$$0 \longrightarrow (\mathcal{P}M)_P \longrightarrow M_P \longrightarrow M_P \longrightarrow C_P \longrightarrow 0$$

ce qui implique $C_P = 0$. On a $\mathcal{P}_P C = C$ pour tout P dans $\mathcal{P}$, donc C est pseudonul.

considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}M \longrightarrow M \xrightarrow[d_M]{} \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} M_P \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Chacun des M_P étant sans $\mathcal{F}_P$-torsion est codivisoriel ; il en est de même de la somme directe (voir 2.2 p. 6 de [13]). De plus C est pseudonul, il suffit alors d'invoquer la proposition 3.8 de GOLDMAN ([5]) pour conclure.

(2.2) INJECTIFS INDECOMPOSABLES CODIVISORIELS.

(2.2.1) La théorie de torsion de Goldie est stable par enveloppes injectives (voir [13] , 4.4, p. 23) ; ainsi un module indécomposable est soit de torsion, soit sans torsion. Nous allons examiner ces deux possibilités en remarquant que $\mathcal{F}$ étant composé d'idéaux essentiels (3.2.2.b), sans torsion implique codivisoriel.

(2.2.2) Injectifs indécomposables sans torsion.

PROPOSITION. - *Les R-modules injectifs indécomposables sans torsion sont les Q-modules simples.*

DEMONSTRATION. - Appelons module divisible tout module M tel que pour tout x dans M et tout c régulier dans R, on puisse trouver y dans M vérifiant x = yc ; et montrons que pour tout R-module M on a les équivalences suivantes :

(i) M est R-injectif sans torsion.
(ii) M est R-divisible sans torsion.
(iii) M est un Q-module.

Pour (i) $\Longrightarrow$ (ii) : prenons $x \in M$ et c régulier dans R ; considérons le morphisme f de cR dans M associant à cr l'élément xr. Puisque M est injectif, il existe y dans M tel que $x = f(c) = yc$; ce qui prouve que M est divisible. Pour prouver (ii) $\not\Longrightarrow$ (iii) définissons la structure de Q-module de M:étant donnés x dans M et c régulier dans R, nous noterons xc^{-1} l'élément y de M vérifiant $x = yc$. L'unicité de y provient de ce que M est sans torsion. On vérifie facilement que l'on a ainsi une structure de Q-module. Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (i) : il est évident qu'un Q-module est un R-module sans torsion. Prouvons que M est injectif. Pour cela, soit I un idéal à droite essentiel de R, c un élément régulier de I et donnons-nous f morphisme de I dans R. Si l'on pose $m = f(c)c^{-1}$, pour tout i dans I on peut trouver - à cause de la condition d'Ore par rapport à $\mathcal{C}(0)$ - j et d dans R avec $id = cj$ et $d \in \mathcal{C}(0)$. On obtient alors $f(i)d = f(c)j$, ce qui implique $f(i) = f(c)jd^{-1} = f(c)c^{-1}i = mi$. Le critère de BAER est donc vérifié et M est injectif. Revenons à la démonstration de la proposition : si M est injectif indécomposable sans torsion, M est un Q-module indécomposable sur Q puisqu'il l'est déjà dans R. C'est donc un Q-module simple. Réciproquement, si M est un Q-module simple, par (i), M est un R-module injectif sans torsion. S'il était décomposable sur R, chacun des facteurs vérifierait (i) donc serait un Q-module, ce qui contredirait le fait que M est indécomposable sur Q. D'où le résultat.

(2.2.3) LEMME. - *Fixons* P *dans* $\mathcal{P}$.

(i) Pour tout R*-module injectif* M, M_P *est un* R_P*-module injectif.*

(ii) Pour un R_P*-module* M, R*-injectivité et* R_P*-injectivité sont équivalentes.*

DEMONSTRATION. - Il est facile de voir que tout injectif est divisible (voir 2.2.2). Montrons que si l'anneau est premier de Goldie à idéaux à droite principaux, la réciproque est vraie : dans un tel anneau B soit I = cB un idéal à droite essentiel ; c est évidemment régulier. Si f est un morphisme de I dans un module divisible M, il existera y dans M tel que f(c) = yc. Alors, pour tout i dans I on aura f(i) = yi , ce qui prouve l'injectivité. Démontrons (i) : Si M est R-injectif, il est divisible. Il est facile de voir qu'il en découle que M_P est R_P-divisible, donc R_P-injectif par la démonstration précédente, puisque R_P est à idéaux à droite principaux.

Pour (ii) : supposons d'abord que M est R_P-injectif, et soit I un idéal à droite essentiel de R. Un morphisme f de I dans M se prolonge en un morphisme f_P de I_P dans M qui se prolonge lui-même par R_P-injectivité en un morphisme de R_P dans M. La restriction de ce prolongement à R démontre la R-injectivité de M.

Réciproquement, si M est R-injectif, soit I' un idéal à droite essentiel de R_P. Si l'on pose $I = I' \cap R$, on a $I' = IR_P$. De tout morphisme f_P de I' dans M on peut donc déduire un prolongement g de R dans M qui se prolonge lui-même en g_P de R_P dans M; g_P prolonge f_P et prouve la R_P-injectivité de M, ce qui achève la démonstration.

(2.2.4) Structure des injectifs indécomposables de torsion.

PROPOSITION. - *Les injectifs codivisoriels indécomposables de torsion sont les modules de la forme* $M = E_R(R/I)$ *où* I *est un c-idéal à droite maximal de* R .
Pour un tel module M, *il existe* P *dans* $\mathcal{P}$ *tel que* $M = E_{R_P}(R_P\ I_P)$ *où* I_P *est un idéal à droite maximal de* R_P.

DEMONSTRATION. - Partons d'un c-idéal à droite maximal I de R. Il existe nécessairement un P dans $\mathcal{P}$ et un idéal à droite maximal I_P de R_P tels que $I = I_P \cap R$, puisque I est un w-idéal. Il en résulte que R/I se plonge dans R_P/I_P et donc, compte tenu du lemme précédent, que $E_R(R/I) \subseteq E_{R_P}(R_P/I_P)$. Par ailleurs, il est facile de vérifier que R/I est essentiel dans R_P/I_P en tant que R-modules, ce qui implique l'égalité $E_R(R/I) = E_{R_P}(R_P/I_P)$. Puisque I est un R-idéal et que $I = I^{\chi}$, M est injectif de torsion et codivisoriel (4.4, p. 23 de [13]). Montrons que M est indécomposable : il suffit pour cela que I soit irréductible. C'est bien le cas car par maximalité de I tout idéal le contenant strictement est dans $\mathcal{F}$. I lui-même n'étant pas dans $\mathcal{F}$ ne peut pas être intersection de deux tels idéaux ; d'où l'irréductibilité.

Réciproquement, supposons que M est injectif indécomposable, codivisoriel de torsion et montrons qu'il est bien de la forme annoncée. Par le résultat (2.1), M est essentiel dans la somme directe $\bigoplus_{P \in \mathcal{P}} M_P$; mais étant injectif, il en résulte que $M = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} M_P$. Puisque M est de plus indécomposable, il existe

donc $P \in \mathcal{P}$ tel que $M = M_P$, tous les autres M_P, étant nuls. M est donc un R_P-module injectif indécomposable (2.2.3. ii)) ; il se met donc sous la forme $M = E_{R_P}(^{R}P/I_P)$ où I_P est un idéal irréductible de R_P (théorème 1, p. 90 de [12]). M étant de torsion, I_P est un idéal essentiel de R_P. Il existe donc un entier n tel que $P^n R_P \subseteq I_P$, puisque R_P est un ordre régulier. Mais le quotient $R_P/P^n R_P$ est artinien, comme on peut le voir par récurrence sur n, sachant que PR_P est inversible dans R_P et que R_P/PR_P, anneau total de fractions de R/P, est artinien. On peut donc choisir un idéal à droite J_P minimal parmi ceux contenant strictement I_P.

R_P étant à idéaux à droite principaux, il existe deux éléments réguliers x et y dans R_P avec $I_P = xR_P$ et $J_P = yR_P$. Puisque J_P contient strictement I_P , il existe de plus a non inversible de R_P tel que $x = ya$. J_P/I_P est alors isomorphe à R_P/aR_P . Le choix de J_P prouve que aR_P est maximal dans R_P. On a donc

$$M = E_{R_P}(J_P/I_P) = E_{R_P}(R_P/aR_P) = E_R(R/aR_P \cap R),$$

d'où le résultat cherché.

(2.3) TYPES D'INJECTIFS CODIVISORIELS INDECOMPOSABLES.

(2.3.1) Rappelons qu'un idéal premier π est dit associé à un module M s'il existe un sous-module non nul N de M tel que π soit l'annulateur de tout sous-module non nul N' de N. L'ensemble des idéaux premiers associés à un module M donné est noté Ass(M). Si Ass(M) est réduit à π on dira que M est π-tertiaire.

LEMME. - *Pour un module codivisoriel non nul* M , Ass(M) *est non vide et inclus dans* $\mathcal{P} \cup \{0\}$.

DEMONSTRATION. - Si M est non nul, considérons la famille des ann N, N parcourant l'ensemble des sous-modules non nuls de M. Chacun de ces sous-modules étant codivisoriel, ann $N = \bigcap_{x \in N} \text{ann } x$ est un w-idéal. La condition noethérienne sur les w-idéaux inclus dans R permet d'exhiber un élément maximal π = ann N de cette famille. Démontrons que π est dans Ass(M).

En effet, pour tout sous-module non nul N' de N, on a ann $N \subseteq$ ann N', donc par maximalité de π, π = ann N'. Pour voir que π est premier, prenons deux idéaux bilatères I et J avec $IJ \subseteq \pi$.

Si l'on suppose que I n'est pas inclus dans π, il existe un élément a dans $I \setminus \pi$. On a alors NaR qui est un sous-module non nul de N puisque $a \notin \text{ann } N$; mais d'autre part, $NaR\ J = NaJ \subsetneq NIJ \subsetneq N\pi = 0$, ce qui prouve $J \subsetneq \text{ann } NaR = \pi$ π est donc bien premier et par suite $\pi \in \text{Ass}(M)$. Remarquons de plus que M étant codivisoriel, tout élément π de Ass(M) est un w-idéal premier. Il n'y a que deux possibilités pour un tel π : π est soit nul, soit idéal essentiel et dans ce cas c'est un c-idéal premier, donc un élément de $\mathcal{P}$.

2.3.2) PROPOSITION. - *Soit* M *un injectif indécomposable codivisoriel non nul. On a alors :*

(i) Si M *est sans torsion,* $\text{Ass}(M) = \{0\}$.

(ii) Si M *est de torsion et* $P \in \mathcal{P}$ *:*

Pour que $\text{Ass}(M) = \{P\}$ *, il faut et il suffit que* M *soit de la forme* E(R/I) *où* I *est un c-idéal à droite maximal contenant* P.

DEMONSTRATION. - Compte tenu du lemme précédent, Ass(M) est toujours non vide.

(i) : Si M est sans torsion : soit π dans Ass(M) avec $\pi = \text{Ann } N$. Supposer que π ne soit pas nul implique que l'annulateur de tout élément de N est un idéal essentiel, puisque contenant π qui est essentiel ; ce qui est absurde car N est sans torsion ; donc $\text{Ass}(M) = \{0\}$.

(ii) : Si M est de torsion, on sait par (2.2.4) qu'il existe un c-idéal à droite maximal I tel que M = E(R/I). La construction d'un tel I démontre qu'il existe un P dans $\mathcal{P}$ inclus dans I. Ce P annulant R/I, on a $P \subsetneq \text{ann } N$ pour tout sous-module non nul N de R/I. P étant un c-idéal bilatère maximal, il en résulte que P = ann N et donc que $P \in \text{Ass}(M)$. Montrons que Ass(M) est réduit à P.

Soit donc π un élément quelconque de Ass(M) de la forme π = ann N' pour un sous-module non nul de M. En posant N = N' $\cap$ R/I on obtient aussi π = ann N, donc π = P d'après la première partie du résultat (ii) et l'on a bien Ass(M) = {P}.

(2.3.3) Deux modules isomorphes ont évidemment les mêmes idéaux premiers associés. On a de plus :

THEOREME. - *L'application ψ de l'ensemble des types de* R-*modules injectifs codivisoriels indécomposables dans $\mathfrak{P} \cup \{o\}$ définie par $\psi(M) = \pi$ si Ass(M) = π est une bijection.*

DEMONSTRATION. - La proposition (2.3.2) prouve que Ass(M) = {o} si et seulement si M est sans torsion. Mais ces modules sont exactement les Q-modules simples (2.2.2). Q étant artinien simple tous ces modules sont Q-isomorphes donc R-isomorphes et définissent un seul type de R-modules. Traitons à présent le cas d'un idéal P de $\mathfrak{P}$. Pour exhiber un injectif codivisoriel indécomposable M P-tertiaire, il suffit de prendre un c-idéal à droite maximal I contenant P - par exemple la trace sur R d'un idéal à droite maximal I_P de R_P - par application de (2.3.2) le module M = E(R/I) convient. Soit N un autre R-module P-tertiaire ; par (2.3.2) il existe un idéal à droite maximal J_P de R_P tel que N = E(R/$J_P \cap$ R). On peut aussi écrire (2.2.4) que M = $E_{R_P}(R_P/I_P)$ et N = $E_{R_P}(R_P/J_P)$. Mais R_P est un anneau essentiellement borné, et M et N sont aussi des R_P-injectifs indécomposables PR_P-tertiaires ; d'après une propriété des anneaux essentiellement bornés (théorème 11, p. 95 de [12]), M et N sont R_P-isomorphes ; ils définissent donc le même type de R-modules, d'où la proposition.

(2.4) SOMMES DIRECTES D'INJECTIFS CODIVISORIELS.

(2.4.1) LEMME. - *Toute somme directe d'injectifs codivisoriels indécomposables de torsion (resp. sans torsion) est un module injectif codivisoriel de torsion (resp. sans torsion).*

DEMONSTRATION. - Le fait qu'une intersection finie de w-idéaux (resp. essentiels, non essentiels) est un idéal de même nature implique que toute somme directe de modules codivisoriels (resp. de torsion, sans torsion) est un module conservant cette propriété.

Puisque toute somme de Q-modules est un Q-module, donc un R-module injectif (2.2.2), la remarque ci-dessus jointe à la proposition (2.2.2) établit le lemme dans le cas sans torsion.

Supposons à présent que M soit somme directe d'une famille $(M_i)_{i \in I}$ d'injectifs indécomposables codivisoriels de torsion. Chacune de ces M_i est un R_P-module pour un certain $P \in \mathcal{T}$ (2.2.4) ; on a donc $M_i \otimes R_P = M_i$, mais $M_i \otimes R_{P'} = M_i \otimes Q = 0$ pour P' distinct de P. D'autre part, les $(M_i)_P = M_i \otimes R_P$ sont des R_P-modules injectifs (2.2.3, ii) ; donc, R_P étant noéthérien, $M_P = \bigoplus_{P \in \mathcal{T}} (M_i)_P$ somme directe d'injectifs est un module injectif. Les $(M_i)_P$ valant soit M_i , soit 0, M s'écrit donc $M = \bigoplus_{P \in \mathcal{T}} M_P$, chacun des M_P étant injectif. On va démontrer que M lui-même est injectif :

Soient I un idéal essentiel à droite de R et f un morphisme de I dans M. Posons J = Ker f ; comme M est de torsion, le quotient I/J est de torsion, ou encore JQ = IQ = Q, ce qui implique que J est lui aussi un idéal essentiel. On peut donc choisir un élément régulier c dans J. On a alors les inclusions $cR \subseteq J \subseteq I \subseteq R$, qui, par la condition K3 de Marubayashi ([6]), montrent que $\mathrm{Ker}\, f_P = JR_P = IR_P$ pour presque tout P dans $\mathcal{T}$.

Ainsi, pour presque tout P dans $\mathcal{P}$, l'application $f_P : IR_P \longrightarrow M_P$ est l'application nulle. Puisque le produit tensoriel $M_P \otimes R_{P'}$ est nul pour P' distinct de P, pour tout x de M_P on peut donc trouver $c \in \mathcal{C}(P')$ avec $xc = 0$; ce qui permet de démontrer (simple vérification) que la composée $I \longrightarrow IR_P \xrightarrow{f_P} M_P$ est la projection de f sur M_P. Ainsi, f a toutes ses projections nulles, sauf peut-être sur un nombre fini d'éléments $P_1, P_2, \ldots, P_r$ de $\mathcal{P}$. L'image de f étant contenue dans $M_{P_1} \times M_{P_2} \times \ldots \times M_{P_r}$ qui est un R-module injectif, f admet donc un prolongement à R tout entier ; ce qui prouve que M est un R-module injectif.

(2.4.2) PROPOSITION. - *Pour un* R*-module* M *il revient au même de dire :*

(i) M *est injectif codivisoriel.*

(ii) M *est un somme directe d'injectifs codivisoriels.*

(iii) M *est somme directe d'injectifs codivisoriels indécomposables.*

DEMONSTRATION. - Compte tenu de la condition noéthérienne sur les w-idéaux à droite de R (1.7), l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) est la proposition 1.2 de Teply ([14]). Pour montrer (iii) $\Rightarrow$ (i) on sépare les modules de torsion et les modules sans torsion et on applique le lemme (2.4.1). On a évidemment (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour prouver que (ii) $\Rightarrow$ (i), il suffit de décomposer chacun des modules de la somme directe en somme directe de modules indécomposables et d'appliquer (iii) $\Rightarrow$ (i).

3. LA LOCALISATION FONDAMENTALE $\mathcal{F}$, (SUITE).

(3.1) PROPOSITION. - *On a* $E(Q/R) = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} Q/R_P = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} E(R/P)$.

DEMONSTRATION. - Q/R est un module injectif codivisoriel de torsion; ce qui implique par (2.1) que Q/R admet $\bigoplus_{P \in \mathcal{P}} (Q/R)_P$ pour extension essentielle. Le localisé $(Q/R)_P$ est en fait le quotient Q/R_P. De plus, Q étant un module injectif sur l'anneau R_P qui est héréditaire, le quotient Q/R_P est lui-même R_P-injectif, donc aussi R-injectif. Q/R_P est codivisoriel : en effet soit $q \in Q$ et J l'annulateur de q dans R_P ; On a $qJ \subseteq R_P$, donc aussi $qJ_W \subseteq qJR_P \subseteq R_P$; ce qui prouve que $J_W = J$ et par suite que Q/R_P est codivisoriel . Par (2.4.2), $\bigoplus_{P \in \mathcal{P}} Q/R_P$ somme directe d'injectifs codivisoriels est un injectif codivisoriel ; puisque Q/R est essentiel dans cette somme directe, il en résulte que $E(Q/R) = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} Q/R_P$. La démonstration de la proposition (2.1.5) de [2] , que l'on peut recopier ici, montre que $Q/R_P = E(R/P)$; d'où $E(Q/R) = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} E(R/P)$.

(3.2) CARACTERISATION DES PSEUDONULS.

PROPOSITION. - *Un module* M *est pseudonul si et seulement si*

$\mathrm{Hom}_R(M, E(Q/R)) = 0$.

DEMONSTRATION. - Si M est pseudonul, E(Q/R) étant codivisoriel, on a évidemment $\mathrm{Hom}_R(M, E(Q/R)) = 0$. C'est la réciproque qui est intéressante :

Supposons que M ne soit pas pseudonul, il existe donc $x \in M$ pour lequel ann $x \notin \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F} = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{F}_P$, on peut trouver $P \in \mathcal{P}$ tel que ann$x \notin \mathcal{F}_P$.

D'après Marubayashi (lemme 8 de [8]), ann $x \notin \mathcal{F}_P$ implique $\mathrm{Hom}_R(R/\mathrm{ann}\ x\ ,\ E(R/P)) \neq 0$; ou encore $\mathrm{Hom}_R(xR, E(R/P)) \neq 0$.

Par injectivité, on peut en déduire $\mathrm{Hom}_R(M,E(R/P)) \neq 0$. Comme $E(R/P)$ se plonge dans $E(Q/R)$, (3.1), il en résulte que $\mathrm{Hom}_R(M,E(Q/R)) \neq 0$. Ce qui démontre l'équivalence cherchée.

(3.3) $E(Q/R)$ étant un R-R-bimodule, pour un R-module à droite M, on a :

PROPOSITION. - $\tilde{M} = \mathrm{Hom}_R(M,E(Q/R))$ *est un module à gauche codivisoriel.*

DEMONSTRATION. - La structure de module de $\tilde{M}$ est définie pour $r \in R$, $f \in \tilde{M}$ par $(rf)(x) = r.f(x)$ pour tout x dans M. L'annulateur d'un élément f de $\tilde{M}$ est $\bigcap_{x \in M} \mathrm{ann}\, f(x)$, où ann désigne l'annulateur à gauche. $E(Q/R)$ étant codivisoriel à gauche, chacun des ann $f(x)$ est un w-idéal à gauche. Toute intersection de w-idéaux étant un w-idéal, il en résulte que ann f est un w-idéal à gauche, et par suite que M est codivisoriel.

(3.4) CARACTERISATION DES CODIVISORIELS.

Pour tout module M, on peut définir de façon naturelle un morphisme $q_M : M \longrightarrow \tilde{\tilde{M}}$ par $q_M(x)f = f(x)$ pour tous $f \in \tilde{M}$ et $x \in M$. q_M est R-linéaire à droite ; de plus :

PROPOSITION. - *Pour qu'un module* M *soit codivisoriel il faut et il suffit que* $q_M : M \to \tilde{\tilde{M}} = \mathrm{Hom}_R^g(\mathrm{Hom}_R^d(M,E(Q/R)),E(Q/R))$ *soit injective.*

DEMONSTRATION. - Supposons que M soit codivisoriel et prenons $x \in M - \{0\}$. xR n'étant pas pseudonul, par (3.2) il existe $f \in \tilde{M}$ avec $f(xR) \neq 0$, donc $f(x) \neq 0$. Il en résulte que $q_M(x) \neq 0$.

Cette démonstration étant valable pour tout x non nul dans M, q_M est donc injectif.

Réciproquement, si q_M est injectif, M est plongé dans $\widetilde{M}$ qui est codivisoriel (3.3) et donc M est lui-même codivisoriel.

(3.5) REMARQUES. -

a) Soit I un idéal à droite essentiel. Il résulte de (3.4) que I est un c-idéal si et seulement si l'application

$$q_{R/I} : R/I \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^g(\mathrm{Hom}_R^d(R/I, E(Q/R)), E(Q/R))$$

est injective.

b) Les caractérisations (3.2) et (3.4) que nous donnons étant les mêmes que celles de (4.1) et (4.2) de Fossum dans son article [4] , les définitions de pseudonul et de codivisoriel que nous avons adoptées coïncident avec celles données par Fossum dans le cas de ses ordres maximaux.

4. DECOMPOSITION TERTIAIRE ET PRIMAIRE.

(4.1) DECOMPOSITION TERTIAIRE.

Soient M un R-module à droite de type fini, N un sous-module divisoriel strict de M. Dans ces conditions :

PROPOSITION. - *a)* $\mathrm{Ass}(M/N)$ *est non vide et fini, inclus dans* $\mathcal{P} \cup \{0\}$.

b) N *admet une décomposition tertiaire*

$$N = N_1 \cap \ldots \cap N_k$$

où les N_i *sont des sous-modules divisoriels de* M *on peut supposer cette décomposition sans éléments superflus, avec* $\mathrm{Ass}(M/N_i) \neq \mathrm{Ass}(M/N_j)$ pour $i \neq j$.

c) Si $N = N'_1 \cap \ldots \cap N'_\ell$ *est une autre décomposition tertiaire du même type que dans b), alors* $k = \ell$ *et* $\{\mathrm{Ass}(M/N_i)\}_{1 \leq i \leq k} = \{\mathrm{Ass}(M/N'_j)\}_{1 \leq j \leq k}$.

DEMONSTRATION. - Compte tenu de la condition de chaîne ascendante sur les w-idéaux à droite (1.7) et du lemme (2.3.1), la proposition résulte alors du théorème 1.6 de [11].

(4.2) DECOMPOSITION PRIMAIRE.

Nous dirons que N est un sous-module c-divisoriel de M si M/N est un module codivisoriel de torsion.

PROPOSITION. - *a) Tout c-idéal à droite (resp. à gauche) tertiaire de R est primaire.*

b) Tout sous-module c-divisoriel tertiaire dans un module de type fini est primaire.

On a alors un théorème de décomposition primaire analogue à (4.1).

DEMONSTRATION. - Un c-idéal à droite entier I étant essentiel, on a $\mathrm{Ass}(R/I) \subseteq \mathcal{P}$ (voir 2.3.1)). Donnons-nous un c-idéal à droite P-tertiaire, pour un certain $P \in \mathcal{P}$. Compte tenu du corollaire 2.3 de [11] , on voit facilement que I est P-primaire si et seulement s'il contient une puissance de P.

Démontrons le résultat intermédiaire suivant :
Pour tout idéal bilatère non nul B, il existe un entier n avec $I \cap B^n \subseteq (IB)^x$:

En effet, B étant un idéal essentiel, on a $BR_P = R_P$ sauf pour un nombre fini $P_1, P_2, \ldots, P_k$ d'éléments de $\mathcal{P}$. Ainsi $(IB)^x$ qui est égal à $\cap\, IBR_P$ s'écrit $IBR_{P_1} \cap \ldots \cap IBR_{P_k} \cap \bigcap_{P \in \mathcal{P}} IR_P$; I étant un c-idéal, il en résulte que $(IB)^x = IBR_{P_1} \cap \ldots \cap IBR_{P_k} \cap I$.

Mais chacun des R_{P_i} - $i = 1,2,\ldots,k$ - est un anneau essentiellement borné d'idéaux bilatères les puissances de $P_iR_{P_i}$; ce qui permet de trouver pour tout i, un entier n_i tel que $(P_iR_{P_i})^{n_i} \subseteq IBR_{P_i}$. Quels que soient les entiers ℓ_i vérifiant $\ell_i \geq n_i$, on a alors :

$$I \cap (P_1R_{P_1})^{\ell_1} \cap \ldots \cap (P_kR_{P_k})^{\ell_k} \subseteq (IB)^{\times}.$$

Par ailleurs, les BR_{P_i} étant des idéaux bilatères de R_{P_i} (cor. 1.11 de [7]), il existe un entier a_i pour lequel $BR_{P_i} = (P_iR_{P_i})^{a_i}$.

Choisissons en entier n tel que $na_i \geq n_i$ pour tous les indices i ; en remplaçant les ℓ_i par na_i on obtient :

$$I \cap (BR_{P_1})^n \cap \ldots \cap (BR_{P_k})^n \subseteq (IB)^{\times} .$$

Le choix des P_i permet d'écrire $I \cap (B^n)^{\times} \subseteq (IB)^{\times}$, donc a fortiori, $I \cap B^n \subseteq (IB)^{\times}$.

Revenons à la démonstration proprement dite, I étant supposé P-tertiaire, avec $P \in \mathcal{P}$:

Soit $I' = \{r \in R \ ; \ rP \subseteq I\}$; I' est un idéal à droite de R contenant strictement I, puisque I est P-tertiaire. De plus, le quotient I'/I est essentiel dans R/I ; en effet, si X est un idéal à droite contenant strictement I, I étant P-tertiaire, il existe un idéal U contenant strictement I et inclus dans X avec $UP \subseteq I$; ainsi U est inclus dans $X \cap I'$, ce qui prouve que $(X \cap I')/I \neq 0$ et que $I'/I \lhd R/I$. Par le résultat intermédiaire démontré ci-dessus, il existe un entier n tel que $P^n \cap I' \subseteq (I'P)^{\times}$. Compte tenu de la définition de I', il en découle que $P^n \cap I' \subseteq I$. Cette inclusion prouve que $(P^{n+1}/I) \cap (I'/I) = 0$, donc, par essentialité, $P^n + I/I = 0$, égalité traduite par $P^n \subseteq I$; ce qui achève la démonstration de a).

Pour b), supposons que M soit un module engendré sur R par $x_1,\ldots,x_r$. Si N est un sous-module c-divisoriel dans M, on peut toujours supposer que N = 0 par passage au quotient ; c'est-à-dire que M est un module codivisoriel de torsion, dans lequel 0 est P-tertiaire pour un certain $P \in \mathcal{P}$. On obtient alors pour tout i ($1 \leq i \leq r$), $\mathrm{Ass}(R/\mathrm{ann}\ x_i) = \mathrm{Ass}(x_iR) = \{P\}$; tous les $\mathrm{ann}\ x_i$ sont donc P-primaires, d'après a). Le radical primaire de M, intersection des radicaux des x_iR est donc égal à P, d'où b). La fin de l'énoncé est alors l'application de (4.1) dans les conditions particulières où nous sommes placés.

(4.3) COROLLAIRE. - (Artin-Rees). - *Pour tout sous-module c-divisoriel* N *d'un module de type fini* M *et tout idéal à droite essentiel de* R, J, *il existe un entier* n *tel que :*

$$MJ^n \cap N \subseteq (\overline{NJ})^M_{\mathcal{P}}$$

En particulier, pour tout c-idéal à droite I *et tout idéal à droite essentiel* J, *il existe un entier* n *tel que :*

$$I \cap J^n \subseteq (IJ)^{\times}.$$

DEMONSTRATION. - Sous les hypothèses du corollaire, M/NJ est aussi un module de torsion : c'est une conséquence facile de ce que M/N est de torsion, et J est un idéal essentiel. En notant $\overline{NJ}$ la $\mathcal{P}$-clôture dans M de NJ, on a à fortiori $M/\overline{NJ}$ de torsion ; $\overline{NJ}$ est donc un sous-module c-divisoriel de M. On peut donc appliquer la proposition (4.2) qui permet de décomposer $\overline{NJ}$ en modules primaires :

$$\overline{NJ} = N_1 \cap \ldots \cap N_r \cap N'_1 \cap \ldots \cap N'_s \quad \text{où les } N_i \text{ (resp. } N'_j\text{)}$$

sont des sous-modules primaires de M de radical primaire P_i (resp. P'_j contenant (resp. ne contenant pas) l'idéal J. L'application du corollaire 2.3 de [11] permet de trouver un entier t pour lequel

MP_i^t soit inclus dans N_i , i variant de 1 à r. J étant inclus dans chacun de ces P_i , on obtient

$$MJ^t \subseteq MP_1^t \cap \ldots \cap MP_r^t \subseteq N_1 \cap \ldots \cap N_r .$$

Il nous suffit donc pour achever la démonstration de prouver que $N \subseteq N_1' \cap \ldots \cap N_s'$. Pour celą prenons x dans N et j dans J ; on a $xRj \subseteq NJ \subseteq N_1' \cap \ldots \cap N_s'$. Si x n'était pas dans $N_1' \cap \ldots \cap N_s'$, il existerait un indice k pour lequel $xRj \in N_k'$ avec $x \notin N_k'$ et N_k' P_k'-primaire, ce qui impliquerait $j \in P_k'$ et par suite $J \subseteq P_k'$; d'où une contradiction avec la définition même des P_j'. Il en découle que l'on a bien $N \subseteq N_1' \cap \ldots \cap N_s'$ et en conclusion que $MJ^t \cap N \subseteq \overline{NJ}$.

(4.4) CARACTERISATION DES c-IDEAUX A DROITE PRIMAIRES.

Pour tout c-idéal (entier) à droite I, la condition K3 de Marubayashi permet de trouver un nombre fini d'éléments de $\mathcal{P}$: $P_1, P_2, \ldots, P_K$ tels que :

$$I = (IR_{P_1} \cap R) \cap \ldots \cap (IR_{P_K} \cap R).$$

Nous allons démontrer que cette décomposition est justement la décomposition primaire annoncée en (4.2).

PROPOSITION. - *Les c-idéaux à droite primaires d'un* AKR R *sont les idéaux de la forme* $I_P = I_P' \cap R$, *où* I_P' *est un idéal à droite essentiel de* R_P , *pour un certain* $P \in \mathcal{P}$; *et dans ce cas,* I_P *est* P-*primaire.*

DEMONSTRATION. - La proposition (4.2) nous ramène à la détermination des c-idéaux à droite tertiaires. Compte tenu du lemme (2.3.1), le problème posé est donc le suivant : Etant donné $P \in \mathcal{P}$ caractériser les c-idéaux à droite I pour lesquels $Ass(R/I) = \{P\}$.

Commençons par démontrer que si I' est un idéal à droite essentiel de R_P , $I = I' \cap R$ est un c-idéal à droite P-tertiaire : il est clair que I est un c-idéal à droite de R. Soit J (resp. A) un idéal à droite (resp. bilatère) avec $JA \subseteq I$. Si l'on avait $A \not\subseteq P$, il en résulterait que $JR_P = JAR_P \subseteq IR_P = I'$, donc que $J \subseteq I$ ainsi, par contraposition, on en déduit que Ass(R/I) qui est non vide, est inclus dans $\{0,P\}$. I étant un idéal essentiel, $0 \notin \text{Ass}(R/I)$ et par suite $\text{Ass}(R/I) = \{P\}$. Réciproquement, si I est un c-idéal à droite P-tertiaire, I s'écrit $(IR_{P_1} \cap R) \cap \ldots \cap (IR_{P_k} \cap R)$ - voir introduction de (4.4) - Par la première partie de la démonstration, cette décomposition est une décomposition tertiaire de I. L'unicité de la décomposition tertiaire (4.1) permet de dire que l'intersection se réduit à un seul terme correspondant à P, $I = IR_P \cap R$; ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE:

1 J. BECK, *Injective Modules over Krull domains,* J. of Algebra, 17, (1971), p. 116-131.

2 M. CHAMARIE, *Localisation dans les ordres maximaux,* Thèse de troisième cycle, Lyon 1973.

3 R. FOSSUM, *Maximal orders over Krull domains,* J. of Algebra, 70 (1968), p. 321-332.

4 R. FOSSUM, *Injective moduls over Krull orders,* Math. Scandi. 28 (1971), p. 233-246.

5 O. GOLDMAN, *Rings and moduls of quotients,* J. of Algebra 13 (1969), p. 10-47.

6 H. MARUBAYASHI, *Non commutative Krull rings,* Osaka J. of Math. 12 (1975), p. 703-714.

7 M. MARUBAYASHI, *On bounded Krull rings,* Osaka J. of Math. 13 (1976), p. 491-501.

8 H. MARUBAYASHI, *A characterization of bounded Krull prime rings,* Osaka J. of Math. 15 (1978), p. 13-20.

9 H. MARUBAYASHI, *Remarks on ideals in bounded Krull rings,* à paraitre Osaka J. of Math.

10 G. MAURY, *Théorie des ordres maximaux au sens de K. Asano,* Vorlesungen aus dem Math. Institute Giessen, Heft 6, (1976).

11 C. NASTASESCU, *Décomposition primaire et tertiaire,* Bull de la Soc. Sci. de la R.S. de Roumanie, tome 16 (66), nr.3-4 (1974).

12 G. RENAULT, *Algèbre non commutative,* Collection Varia Mathematica, Gauthier-Villars 7.

13 B. STENSTROM, *Rings, and moduls of quotients,* Lect. notes in math. 237, Springer-Verlag, 1971

14 M.L. TEMPLY, *Torsion free injective moduls,* Pacific J. of Math. Vol. 28 n°2 (1969).